Algebra di Boole

Roberto Maieli

Università degli Studi "Roma Tre"
maieli@uniroma3.it
http://logica.uniroma3.it/∼maieli/teaching

Corso: Fondamenti dell'Informatica (INF/01)
Ambito: CdS I livello (triennale) di Filosofia

Pre-requisiti 1

Assumiamo che lo studente abbia delle conoscenze elementari di logica magari acquisite in un corso di Logica e Filosofia della Scienza (ssd M-Fil/02) e conosca il **principio di induzione matematica**, in particolare, sappia cos'è:

- una definizione per induzione,
- una dimostrazione per induzione.

Pre-requisiti 2: articolazione del Corso di Fond. dell'Info.

1. il concetto di informazione e la sua **codifica**: codifica dei dati e delle istruzioni; codifica analogica e digitale
2. l'**elaborazione** e la **strutturazione** dell'informazione: problemi, algortimi e strutture dati, modelli di calcolo (macchine di Turing e Tesi di Church), algebra di Boole e circuiti logici.
3. i **linguaggi** per la formalizzazione dell'informazione: paradigmi di programmazione funzionale e dichiarativa
4. la **trasmissione** dell'informazione: quantità di informazione, caratterizzazione della sorgente e del canale, ridondanza, potenza dei segnali, larghezza di banda e capacità di canale;
5. le **architetture**: le infrastrutture hardware (processore, memoria, interfacce), software (SO, processi e file-system) e di rete (reti geografiche, locali e protocolli).
6. le **applicazioni**: WWW ed identificazione di risorse

Argomenti della lezione

L'obiettivo è presentare in modo rigoroso l'Algebra di Boole, strumento prezioso per l'analisi e la sintesi dei circuiti logici trattati nella lezione successiva.
Distingueiamo la definizione di **algebra** (un formalismo che soddisfa un insieme di regole) dai **modelli** (le interpretazioni di tale algebra).

1. presentazione dell'Algebra di Boole
2. un modello molto generale chiamato Algebra delle Classi (enunceremo il Teorema di Stone)
3. le principali proprietà dell'algebra di Boole
4. studio delle funzioni e delle espressioni (canoniche) booleane
5. cenni alle tecniche di *minimizzazione* delle funzioni Booleane
6. esercizi

tratteremo l'algebra di Boole senza fare riferimento ad alcuna interpretazione (verità/falsità o altro...)

George Boole (1815-1864) e il risveglio della logica

- The mathematical analysis of logic, being an essay towards a calculus of deductive reasoning (1847);
- An investigation of the laws of thought on which are founded the mathematical theory of logic and probabilities (1854).

indicano la rottura tra questa nuova e la vecchia concezione della logica (in parte anche quella Aristotelica): "*la logica* [dichiara Boole] *non ha niente a che vedere con la Filosofia, con lo studio dell'esistenza reale e la ricerca della cause. Non dobbiamo associare la logica alla metafisica, ma alla matematica.*"

Già Cartesio (1596, "Regulae ad directioned ingenii") aveva avuto un'idea di Matematica Universale;
Leibniz (1650, "De Arte Combinatoria") l'aveva precisata e aveva cominciato a realizzarla.
Nello stesso periodo di Boole molti matematici (inglesi) riflettono sui fondamenti astratti del calcolo (algebrico);

Per una trattazione formale moderna occorre arrivare all'inizio del 1900...

...ma cos'è un'algebra?

Una struttura algebrica un *insieme* dotato di una o più *operazioni* che soddisfano determinati *assiomi*.
Sulla base di questi assiomi è possibile dimostrare vari *teoremi* che risultano validi in contesti molto generali.
Le strutture algebriche hanno un ruolo centrale nell'algebra astratta e nella matematica moderna.
Un *gruppo* un insieme G dotato di una operazione binaria, che può essere indicata con il simbolo $*$, che soddisfa gli assiomi seguenti.

1. **proprietà associativa**: dati a, b, c appartenenti a G, vale $(a * b) * c = a * (b * c)$.
2. **esistenza dell'elemento neutro**: esiste in G un elemento neutro e rispetto all'operazione $*$, tale che $a * e = e * a = a$ per ogni a in G.
3. **esistenza dell'inverso**: ad ogni elemento a di G è associato un elemento b, detto inverso di a, tale che $a * b = b * a = e$.

Esempio: i numeri interi $(..., -1, 0, +1, ...)$ formano un gruppo $(\mathbb{Z}, +)$ con l'operazione $+$ di addizione e con 0 elemento neutro.

Algebra di Boole

come tutte le algebre, include un insieme supporto A e degli operatori binari $\oplus$ (somma) e $\otimes$ (prodotto) che associano a coppie $A \times A$ un elemento di A e per i quali valgono le seguenti leggi (assiomi): $\forall x, y, z \in A$

1. *somma e prodotto sono commutative*:
$$(x \oplus y) = (y \oplus x) \qquad (x \otimes y) = (y \otimes x)$$
2. *distributività della somma rispetto al prodotto e viceversa*:
$$\begin{array}{rcll} (x \oplus (y \otimes z)) & = & ((x \oplus y) \otimes (x \oplus z)) & \text{(no in aritmetica!)} \\ (x \otimes (y \oplus z)) & = & ((x \otimes y) \oplus (x \otimes z)) & \text{(si, in aritmetica)} \end{array}$$
3. *elementi neutri*:
$$(x \oplus 0) = x \qquad (x \otimes 1) = x$$
4. *ogni elemento x ha un complemento x'* tale
$$(x \oplus x') = 1 \qquad (x \otimes x') = 0$$

Esercizio: unicità dell'elemento complemento

Assumiamo per assurdo che esistano due complementi distinti che soddisfano l'assioma 4:

$$x \oplus x' = 1 \quad x \oplus x'' = 1 \quad x \otimes x' = 0 \quad x \otimes x'' = 0$$

mostriamo che $x = x'$, infatti:

$$\begin{aligned}
x' &= (x' \otimes 1) && \textit{elem.neutro} \\
&= x' \otimes (x'' \oplus x) && \textit{ipotesi} + \textit{comm.} \\
&= (x' \otimes x'') \oplus (x' \otimes x) && \textit{distr.} \\
&= (x' \otimes x'') \oplus 0 && \textit{ipotesi} \\
&= (x' \otimes x'') \oplus (x'' \otimes x) && \textit{ipotesi} + \textit{comm.} \\
&= (x'' \otimes x') \oplus (x'' \otimes x) && \textit{comm.} \\
&= x'' \otimes (x' \oplus x) && \textit{distr.} \\
&= x'' \otimes 1 && \textit{ipotesi} \\
&= x'' && \textit{elem.neutro.}
\end{aligned}$$

denoteremo con "$\sim x$" il complemento x' di x.

Algebra della Classi

l'algebra di Boole ammette molti *modelli*, cioè interpretazioni sia del supporto A che di $\oplus$ e $\otimes$;
L'algebra delle classi è una intepretazione dell'algebra di Boole.

- se S è un insieme finito,
- 2^S denota l'insieme delle parti (potenza) di S e contiene $2^{|S|}$ sottoinsiemi di S ($|S|$ denota la cardinalità di S).
- ESEMPIO: dato $S = \{a, b, c\}$, allora $2^S = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.
- l'algebra delle classi basata su un insieme finito S è una intepretazione dell'algebra di Boole ($\approx$ è il complemento risp. a S):

algebra di Boole		**algebra delle classi**
A	$\leftrightarrow$	2^S
$\oplus$	$\leftrightarrow$	$\cup$
$\otimes$	$\leftrightarrow$	$\cap$
$\sim$	$\leftrightarrow$	$\approx$
0	$\leftrightarrow$	$\emptyset$
1	$\leftrightarrow$	S

Algebra della Classi (continua)

facile verificare ad esempio i 4 assiomi:

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup \emptyset = A$, $A \cap S = A$
- $A \cup \approx A = S$, $A \cap \approx A = \emptyset$

Teorema (rappresentazione di Stone)

Ogni algebra di Boole con supporto finito è isomorfa ad una Algebra delle Classi basata su un insieme anch'esso finito; in particolare la cardinalità del suo supporto A deve essere una potenza di 2 (insieme delle parti di qualche insieme).

CONSEGUENZA: ciò vuol dire che per derivare dagli assiomi una qualche proprietà nell'Algebra di Boole si può mostrare che l'equivalente di tale proprietà nell'Algebra delle Classi sia valida.

Espressioni Booleane: definizione

Siamo interessati a studiare proprietà generali dell'Algebra di Boole, quindi ci serve un pò di astrazione:

Definiamo le *espressioni booleane* $E_1, E_2, E_3, \ldots$ come parole composte da operatori booleani, parentesi, costanti e variabili nel modo seguente:

1. sia gli elementi di A, dette *costanti*, che le *variabili* $x_0, x_1, \ldots$ (elementi generici di A) sono espressioni booleane;
2. se E, E_1, E_2 sono espressioni booleane, allora anche $(E_1 \oplus E_2), (E_1 \otimes E_2)$ ed $\sim E$ sono espressioni booleane;
3. non esistono altre espressioni booleane, oltre quelle che possono essere generate da un numero finito di applicazioni delle regole 1 e 2.

ESEMPI:
"$(\sim ((x_3 \oplus x_4) \otimes x_5))$" è una espressione booleana;
"$x_2 \otimes \oplus x_3)$" non è una espressione booleana.

Espressioni Booleane compatte

E' possibile semplificare la scrittura delle esperssioni booleane (togliendo le parentesi superflue).

- grazie all'associatività di cui godono le operazioni $\oplus$ e $\otimes$ si ha

$$x_0 \oplus x_1 \oplus \ldots \oplus x_{n-1} \text{ invece di } ((\ldots(x_0 \oplus x_1)\ldots)\ldots) \oplus x_{n-1})$$
$$x_0 \otimes x_1 \otimes \ldots \otimes x_{n-1} \text{ invece di } ((\ldots(x_0 \otimes x_1)\ldots)\ldots) \otimes x_{n-1})$$

- se $\sim$ ha la priorità massima, $\otimes$ quella media e $\oplus$ quella minima, allora scriviamo:

$$(x_0 \otimes x_1 \oplus x_2) \otimes x_3 \oplus \sim x_4$$

al posto di

$$((((x_0 \otimes x_1) \oplus x_2) \otimes x_3) \oplus (\sim x_4)$$

Espressioni Booleane equivalenti

- dalla definizione di espressione booleana risulta chiaro che se si assegna un valore (un elemento di A) ad ognuna delle n variabili, presenti in E, allora anche E assume uno specifico valore in A.
- per determinare questo valore, è sufficiente conoscere le funzioni che "interpretano" i tre operatori $\oplus, \otimes$ e $\sim$.
- queste funzioni dipendono a loro volta dal modello preso in considerazione per l'interpretazione.
- diremo che due esperssioni E_1, E_2 che fanno uso dello stesso numero n di variabili sono **equivalenti**, $E_1 = E_2$, se tali espressioni assumono lo stesso valore comunque si assegni alle n variabili valori di A.
- Le proprietà sull'Algebra di Boole che andiamo a mostrare, riposano su questa la nozione di equivalenza "$=$".

Proprietà dell'Algebra di Boole

- Gli assiomi (1)-(4) presentati all'inzio costituiscono l'insieme più compatto possibile di regole che caratterizza l'Algebra di Boole;
- da questi assimomi è possibile ricavare una ulteriore serie di *regole*, ossia relazioni di equivalenza tra espressioni booleane, di cui faremo uso in seguito.

Proprietà dell'estensione degli assiomi ad espressioni Bool

- la *prima proprietà* dice che possiamo sostituire negli assiomi 1-4 le variabili x, y, z con delle espressioni booleane arbitrariamente complesse E_1, E_2, E_3.
- la dimostrazione è per *induzione* sulla complessità (numero di operatori) di E.
- la dimostrazione è semplice ed è lasciata per esercizio:
  - la *base* (variabili "atomiche") è ovvia;
  - il *passo di induzione*: ad esempio $E = x \oplus y$, proviamo la commutatività $(E \oplus z) = (z \oplus E)$

$$
\begin{array}{rcll}
(x \oplus y) \oplus z & = & x \oplus (y \oplus z) & \mathit{assocc.} \\
 & = & x \oplus (z \oplus y) & \mathit{commut.} \\
 & = & (x \oplus z) \oplus y & \mathit{assoc.} \\
 & = & (z \oplus x) \oplus y & \mathit{comm.} \\
 & = & z \oplus (x \oplus y) & \mathit{assoc.}
\end{array}
$$

Principio della dualità

- data un'espressione booleana E, definiamo la sua *espressione duale* $\sim E$, come l'espressione che si ottiene da E scambiando le somme con i prodotti, gli elementi 0 con quelli duali 1 ed ogni elemento x con il suo duale $\sim x$
- ESEMPIO:
  - l'espressione $E = (x_0 \oplus x_1 \oplus 1) \otimes ((\sim x_1) \oplus (\sim x_2))$
  - il suo duale $\sim E = (\sim x_0 \otimes \sim x_1 \otimes 0) \oplus ((\sim\sim x_1) \otimes (\sim\sim x_2))$
- *Legge di Dualità*:
  per ogni coppia di formule E_1, E_2, se $E_1 = E_2$, allora $\sim E_1 = \sim E_2$
- *Legge dell'Involuzione della Dualità*:

$$\sim (\sim E) = E$$

Per dimostrare queste leggi possiamo usare:

1. l'induzione sulla complessità delle formule, oppure
2. trattandosi di un'algebra di Boole su supporto finito, via il Teorema di Rappresentazione di Stone ci si può convincere della loro validità trasferendole nel modello dell'algebra delle classi.

Alcune regole fondamentali

$$
\begin{array}{rrcl}
1 & E_1 \oplus E_2 = E_2 & sse & E_1 \otimes E_2 = E_1 \\
2 & E_1 \oplus (E_1 \otimes E_2) & = & E_1 \\
3 & E_1 \otimes (E_1 \oplus E_2) & = & E_1 \\
4 & E_1 \oplus ((\sim E_1) \otimes E_2) & = & E_1 \oplus E_2 \\
5 & E_1 \otimes ((\sim E_1) \oplus E_2) & = & E_1 \otimes E_2 \\
6 & \sim 0 & = 1 & \\
7 & \sim 1 & = 0 & \\
8 & \sim (E_1 \oplus E_2) & = & (\sim E_1) \otimes (\sim E_2) \\
9 & \sim (E_1 \otimes E_2) & = & (\sim E_1) \oplus (\sim E_2)
\end{array}
$$

Leggi di De Morgan (8 e 9):
il complemento di una somma è uguale al prodotto dei complementi dei termini e, dualmente, il complemento di un prodotto è uguale alla somma dei complementi dei fattori.

Regole di questo tipo consentono, come vedremo, di semplificare le espressioni booleane associate a specifici circuiti logici.

Funzioni Booleane

- Da adesso in poi faremo riferimento ad un'algebra di Boole definita sul supporto finito di due soli elementi $A = \{0, 1\}$
- Quest'algebra prende il nome di **Algebra di Commutazione**.
- Una **funzione booleana** $f(x_0, ..., x_{n-1})$ con n variabili in un'Algebra di Commutazione è una qualsiasi funzione del tipo:

$$f : \{0, 1\}^n \mapsto \{0, 1\}$$

- Intuitivamente una funzione booleana di n variabili può essere vista come una tabella che associa ad ognuna delle 2^n possibili assegnazioni di valori, il corrispondente valore Bool della funzione.
- Esempi: la funzione (unaria) negazione e le funzioni (binarie) disgiunzione classica (o inclusiva) e congiunzione:

x	$\sim x$
0	1
1	0

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	y	$x \otimes y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Esempi di funzione booleana a 3 variabili

x	y	z	$(x \oplus y) \otimes z$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

x	y	z	$(x \oplus y) \otimes \sim z$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Funzioni ed espressioni booleane

- Qual'è la relazione tra funzioni ed espressioni booleane?
- La risposta è semplice:
  - **ad una espressione** E **di** n **variabili corrisponde un'unica funzione** di n variabili.

    Possiamo infatti calcolare il valore di ciascuna delle 2^n assegnazioni ottenendo per ogni assegnazione il valore 0 o 1, quindi una tabella ossia una funzione;
  - viceversa, **ad una funzione ad** n **variabili corrispondono infinite espressioni** di n variabili.

    Partiamo infatti da una tabella e scopriamo che vi sono infinite espressioni booleane distinte ma equivalenti.

    ESEMPIO: l'espressione $x_0 \oplus x_1 \oplus x_2$ può essere trasformata in una infinità di espressioni equivalenti:

$$
\begin{aligned}
x_0 \oplus x_1 \oplus x_2 &= (x_0 \oplus x_1 \oplus x_2) \otimes (x_0 \oplus x_1 \oplus \sim x_1 \oplus x_2) = \\
&= (x_0 \oplus x_1 \oplus x_2) \otimes (1 \oplus 0) = \ldots
\end{aligned}
$$

Rappresentazioni canoniche di una funzione booleana

Tra le diverse espressioni equivalenti corrispondenti ad una stessa funzione, ne esistono due molto usate nella progettazione dei circuiti:

- la **forma canonica disgiuntiva** (FCD);
- la **forma canonica congiuntiva** (FCC).

Introduciamo la seguente terminologia:

- i **letterali**, denotati da z_i, sono le occorrenze distinte di variabili del tipo x_i oppure $\sim x_i$;
- data una funzione f di n variabili, chiamiamo:
  - **mintermine** associato ad f il **prodotto di n letterali**;
  - **maxtermine** associato ad f la **somma di n letterali**.

  ESEMPIO: data una funzione f con due variabili x_0, x_1 :
  - tutti i mintermini associati ad f sono:

  $$(\sim x_1 \otimes \sim x_0) \quad (\sim x_1 \otimes x_0) \quad (x_1 \otimes \sim x_0) \quad (x_1 \otimes x_0)$$

  - tutti i maxtermini associati ad f sono:

  $$(\sim x_1 \oplus \sim x_0) \quad (\sim x_1 \oplus x_0) \quad (x_1 \oplus \sim x_0) \quad (x_1 \oplus x_0)$$

  Tutti i mintermini (risp,. maxtermini) derivati da n variabili sono 2^n.

Forma canonica disgiuntiva (1/3)

- i mintermini sono particolari funzioni booleani che hanno la **proprietà di valere 1 per un'unica assegnazione di valori alle n variabili** (la congiunzione vale 1 solo se tutti i congiunti valgono 1), mentre valgono 0 per tutte le rimanenti assegnazioni.
- ESEMPIO: supponiamo $n = 3$ (quindi 3 variabili x_0, x_1, x_2) e consideriamo uno degli $8 = 2^3$ mintermini, ad esempio

  $$P = x_2 \otimes \sim x_1 \otimes x_0.$$

  Tale mintermine vale 1 quando $x_2 = x_0 = 1$ e $x_1 = 0$;

  negli altri rimanenti 7 casi, il mintermine vale 0.
- IDEA: **è possibile rappresentare una qualsiasi funzione booleana tramite una somma di mintermini** (una disgiunzione di congiunzioni).

  A tale scopo è sufficiente partire dalla rappresentazione tabellare della funzione e derivare, dalle assegnazioni dei valori per cui la funzione vale 1, i corrispondenti mintermini.

Forma canonica disgiuntiva (2/3)

ecco formalmente la procedura per costruire l'espressione canonica disgiuntiva a partire da f:

1. data la tabella di una funzione $f(x_0, \ldots, x_{n-1})$ si fa corrispondere a ciascuna delle 2^n assegnazioni del tipo 10...01 il mintermine $z_{n-1} \otimes z_{n-2} \otimes \ldots \otimes z_1 \otimes z_0$ ponendo per ogni i, il letterale $z_i = x_i$ se l'i-esima assegnazione vale 1, oppre ponendo $z_i = \sim x_i$ se l'i-esima assegnazione vale 0.

   In tal modo ad ognuna delle $m = 2^n$ assegnazioni corrisponde un mintermine di n letterali.

2. infine si deriva l'espressione booleana E costituita dalla somma $\oplus$ di tutti e soli i mintermini che corrispondono ad assegnazioni per cui f vale 1.

Un Esempio di Forma Canonica Disgiuntiva (3/3)

consideriamo una funzione booleana in 3 variabili;

x_0	x_1	x_2	$f(x_0, x_1, x_2)$	*mintermini*
0	0	0	0	
0	0	1	1	$(x_2 \otimes \sim x_1 \otimes \sim x_0)$
0	1	0	1	$(\sim x_2 \otimes x_1 \otimes \sim x_0)$
0	1	1	0	
1	0	0	0	
1	0	1	1	$(x_2 \otimes \sim x_1 \otimes x_0)$
1	1	0	0	
1	1	1	0	

solo per 3 assegnazioni di valori alle variabili la funzione restituisce valore 1, per cui potrà essere rappresentata da un'espressione canonica disgiuntiva che è la somma di tre mintermini:

$$E_{FCD} = (x_2 \otimes \sim x_1 \otimes \sim x_0) \oplus (\sim x_2 \otimes x_1 \otimes \sim x_0) \oplus (x_2 \otimes \sim x_1 \otimes x_0)$$

$$f(x, y, z) = 1 \;\; sse \;\; E = 1$$

Canonicità: ad una funzione fissata corrisponde un'*unica* FCD.

Forma canonica congiuntiva (1/2)

- Come caso delle FCD il nostro obiettivo è mostrare che ogni funzione booleana ammette un'unica rappresentazione canonica costituita dal prodotto (congiunzione) di opportumi maxtermini (somme o disgiunzioni).
- Utilizziamo la FCD, le leggi sulla dualità e quelle di De Morgan.
- **Deriviamo la forma canonica congiuntiva del complemento** $\sim f$ **di** f (identifichaimo tutti i mintermini in cui la funzione vale 0): ad ogni assegnazione del tipo 01...01 facciamo corrispondere il mintermine $z_{n-1} \otimes z_{n-2} \otimes ... \otimes z_1, z_0$ ponendo $z_i = x_i$ se l'i-esima variabile vale 1 altrimenti $z_i = \sim x_i$ se l'i-esima variabile vale 0. La forma canonica disgiuntiva di $\sim f$ sarà data dalla somma dei mintermini.
- Complementiamo la forma canonica disgiuntiva derivata al passo precedente via le Leggi di De Morgan; otteniamo una espressione che è un prodotto (congiunzione) di maxtermini (somme); questa espressione rappresenta $\sim\sim f = f$

Un esempio di Forma Canonica Congiuntiva (2/2)

x_0	x_1	x_2	$f(x_0, x_1, x_2)$	*mintermine*
0	0	0	0	$(\sim x_2 \otimes \sim x_1 \otimes \sim x_0)$
0	0	1	1	
0	1	0	1	
0	1	1	0	$(x_2 \otimes x_1 \otimes \sim x_0)$
1	0	0	0	$(\sim x_2 \otimes \sim x_1 \otimes x_0)$
1	0	1	1	
1	1	0	0	$(\sim x_2 \otimes x_1 \otimes x_0)$
1	1	1	0	$(x_2 \otimes x_1 \otimes x_0)$

E_c è l'espressione in FCD corrispondente al complemento $\sim f$ di f:

$$\begin{aligned} E_c \quad = \quad & (\sim x_2 \otimes \sim x_1 \otimes \sim x_0) \oplus (\sim x_2 \otimes x_1 \otimes x_0) \oplus \\ & (\sim x_2 \otimes \sim x_1 \otimes x_0) \oplus (\sim x_2 \otimes x_1 \otimes x_0) \oplus (x_2 \otimes x_1 \otimes x_0) \end{aligned}$$

Neghiamo (complementiamo) E_c via De Morgan ottenendo la FCC:

$$\begin{aligned} E_{FCC} \quad = \quad & (x_2 \oplus x_1 \oplus x_0) \otimes (x_2 \oplus \sim x_1 \oplus \sim x_0) \otimes \\ & (x_2 \oplus x_1 \oplus \sim x_0) \otimes (x_2 \oplus \sim x_1 \oplus \sim x_0) \otimes (\sim x_2 \oplus \sim x_1 \oplus \sim x_0) \end{aligned}$$

Ovviamente $E_{FCD} = F_{FCC}$.

Il problema della “minimizzazione“ (1/2)

- Abbiamo visto che una qualunque funzione booleana può essere rappresentata da diverse (infinite) espressioni (alcune canoniche).
- Una questione che ha senso (computazionale) porsi è quella della *minimizzazione di una funzione booleana*: cioè il problema di derivare l'**espressione "minima“** (rispetto al numero di occorrenze di letterali) **corrispondente alla data funzione**.
- questo problema ha una ricaduta pratica notevole: significa costruire circuiti più semplici (con meno componenti di calcolo).
- esistono varie tecniche per affrontare questo problema:
  - **Mappe di Karnaugh** efficienti ma applicabili soltanto a funzioni con poche variabili (≤ 4); usa un metodo grafico;
  - **Metodo di Quine-McCluskey** consente di minimizzare funzioni con un numero arbitrario di variabili; tale metodo può in alcuni casi avere una complessità che cresce esponenzialmente (computazionalmente molto costoso). Risulta comunque mediamente efficiente

Il problema della “minimizzazione“ (2/2)

1. I due procedimenti di minimizzazione menzionati determinano l’espressione minima *tra quelle esprimibili in forma di somma di prodotti di letterali (FCD)*.
2. A-priori non si può escludere che esistano altre espressioni che non sono somme di prodotti di letterali ma con un numero assoluto inferiore di letterali ed operatori.
3. Espressioni non canoniche esistono come mostra il prossimo:
4. ESERCIZIO: si dimostri che l’espressione minima in forma di somma di prodotti

$$(x_2 \otimes x_0) \oplus (\sim x_4 \otimes x_3 \otimes x_0) \oplus (x_2 \otimes x_1) \oplus (\sim x_4 \otimes x_3 \otimes x_1)$$

   è equivalente alla seguente espressione, ma con meno occorrenze di letterali e non in forma canonica (*hint*: distributività):

$$(x_1 \oplus x_0) \otimes ((\sim x_4 \otimes x_3) \oplus x_2)$$

5. purtroppo oltre a quelli esposti non si conoscono altre tecniche di minimizzazione.

Esercizi

1. Dare una rappresentazione tabellare di tutte le possibili funzioni booleane binarie.
2. Trovare la forma canonica congiuntiva e quella disgiuntiva equivalente all'espressione $(x_1 \oplus x_3) \otimes \sim (x_0 \otimes x_1 \oplus \sim x_2)$.
3. l'operatore NOR è definito dall'espressione bool $\sim (x \oplus y)$. Simulare gli operatori $\sim$, $\oplus$ e $\otimes$ tramite espressioni che usano solo porte NOR.
4. l'operatore NAND è definito dall'espressione bool $\sim (x \otimes y)$. Simulare gli operatori $\sim$, $\oplus$ e $\otimes$ tramite espressioni che usano solo porte NAND.

Commenti e Riferimenti Bibliografici

- l'algebra di Boole ammette numerosi modelli (interpretazioni sia del supporto che degli operatori).
- il *calcolo proposizionale* è un tipico un esempio di modello di Bool in cui 0 e 1 stanno per *falso* e *vero*, la variabili stanno per proposizioni logiche e gli operatori $\oplus, \otimes, \sim$ stanno chiaramente per la disgiunzione ($\vee$), congiunzione ($\wedge$) e negazione ($\neg$).
- l'algebra di Boole è stata riscoperta negli anni '40 del secolo scorso da von Neumann per l'analisi e la sintesi dei circuiti elettronici (prossime lezioni);
- per chi volesse saperne di più su l'algebra di Boole: *Boolean Reasoning* di F.M. Brown, 1990.
- il Teorema di Stone presuppone conoscenze algebriche avanzate; una sua dimostrazione si può trovare in *Logique Mathématiques: cours et exercices* di R. Cori e D. Lascar, 1994.
- la questioni di minimizzazione è stata studiata intensivamente tra gli anni '50 e '60 del secolo scorso; ma è un terreno ancora aperto, ci sono alcune congetture su tecniche di minimizzazione basate sulla fattorizzazione di espressioni booleane arbitrarie, si veda *An introduction to the theory of complexity* di Bovet e Crescenzi, 1994.