Calcolo dei Sequenti per LJ/LK e Teorema di Eliminazione del Taglio

Roberto Maieli

Università degli Studi "Roma Tre"
maieli@uniroma3.it
http://logica.uniroma3.it/∼maieli/teaching

Corso di Logica di II Livello

Pre-requisiti

Assumiamo che lo studente, possibilmente appartenente ad CdS Magistrale in Informatica o Filosofia, abbia giá seguito con profitto un Corso introduttivo di Logica di I Livello (triennale).

il calcolo dei sequenti (CS, Gentzen 1934)

Questo tipo doi calcolo differerisce da altri sistemi logici fomali (come la deduzione naturale (DN) o quelli Assiomatici alla Hilbert):

1. mentre nella DN e nei SA le regole di inferenze si applicano a formule logiche, nel CS queste si applicano ad asserzioni di derivabilità dette sequenti

   $$A_1, ..., A_n \vdash B.$$

   Un sequente afferma (ipotizza) la derivabilità logica della formula conclusione B a partire dalle formule premesse $A_1, ..., A_n$.

   Una regola di inferenza consente di derivare un nuovo sequente conclusione S in funzione di altri sequenti premesse $S_1, ..., S_{n=1,2}$

   $$\frac{S_1 \quad ... \quad S_{n=1,2}}{S}.$$

2. tutte le regole sono tali che nuovi connettivi logici possono essere solo introdotti ma mai eliminati. Questo fornisce al sistema una struttura "quasi costruttiva" che ha molte importanti conseguenze sulla Teoria della Dimostrazione (consistenza, sotto-formula).

Calcolo dei Sequenti Intuizionista (LJ): gruppo regole d'identità e strutturali

Regole di Indentità:

$$\frac{}{A \vdash A}\ \text{axioma} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad A, \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash B}\ \text{cut o taglio}$$

Regole Strutturali: consentono di manipolare l'ordine e il numero dello ipotesi di un sequente

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma' \vdash A}\ (\text{perm.})^1 \qquad \frac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}\ (\text{contr.}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}\ (\text{ind. L}) \qquad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash A}\ (\text{ind. R})$$

[1] se Γ' è una permutazione di Γ

Calcolo dei Sequenti Intuizionista (LJ): gruppo regole logiche e negazione

Regole della congiunzione:

$$\frac{\Gamma, A \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}\ (\wedge L_1) \qquad \frac{\Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}\ (\wedge L_2) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ \wedge R$$

Regole della disgiunzione:

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}\ (\vee L) \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee R_1) \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee R_2)$$

Regole dell'implicazione:

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash C}\ (\rightarrow L) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}\ (\rightarrow R)$$

Regole della negazione:

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \neg A \vdash}\ (\neg L) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash}{\Gamma \vdash \neg A}\ (\neg R)$$

Calcolo dei Sequenti Classico (LK) : 1/5

- Una derivazione in LJ è un albero....
- Il sistema presentato fino ad ora corrisponde all'insieme delle regole logiche chiamate intuizioniste; è facile osservare che tali regole sono corrette: esse lette dall'alto verso il basso preservano la nozione di dimostrabilità (cioè preservano il valore Vero), mentre lette dal basso verso l'alto preservano la nozione di refutabilità (preservano il valore Falso).
- Per ottenere un sistema per la Logica Classica (LK) è necessario aggiungere una regola riduzione ad assurdo o una ad essa equivalente. Prima di discutere tale regola è bene soffermarsi ad analizzare alcune proprietà importanti del calcolo LJ.
- Come vedremo in seguito, in LJ la regola del taglio è ridondante. Questo è il contenuto dell'Hauptsatz di Gentzen: ogni dimostrazione di un sequente $\Gamma \vdash A$ che fa uso della regala del taglio può essere riscritta in una dimostrazione dello stesso sequente che non fa uso di tagli.

Calcolo dei Sequenti Classico (LK) : 2/5

- Data una dimostrazione senza-tagli (cut-free o normale), la proprietà più eclatante del Calcolo dei Sequenti è la cosidetta

  Proprietá della Sottoformula: una dimostrazione priva di tagli di $\Gamma \vdash A$ contiene solo sequenti le cui formule sono sotto-formule delle formule in Γ, A.

- La proprietá è una semplice conseguenza della struttura del calcolo che fa sí che si abbiano solo regole di introduzione dei connettivi e mai regole di eliminazione. Dunque, una volta costruita una formula composta, non esiste modo di eliminarla nel proseguio dell'albero di derivazione. Come già accennato all'inizio, questa proprietá conferisce al calcolo dei sequenti una natura "costruttiva" che ha molte importanti ripercussioni sulla meccanizzazione del processo inferenziale e sulla ricerca automatica delle dimostrazioni.

Calcolo dei Sequenti Classico (LK) : 3/5

- torniamo alla legge di riduzione all'assurdo; la sua traduzione immediata porterebbe alla seguente regola:

  $$\frac{\Gamma, \neg A \vdash}{\Gamma \vdash A}\ (\mathrm{RAA})$$

  il problema è che questa regola viola la proprietà della sottoformula: concludiamo A utilizzando una formula piú complessa $\neg A$.

- si potrebbe pensare di risolvere il problema aggiungendo semplicemente l'assioma del terzo escluso $\vdash A \vee \neg A$;

  Osserva che RAA e Terzo Escluo sono equivalenti; infatti, in presenza del Terzo Esculo, RAA diventa derivabile e viceversa

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, \neg A \vdash}{\Gamma, \neg A \vdash A}\ (\text{ind R}) \qquad \dfrac{A \vdash A}{\Gamma, A \vdash A}\ (\text{ind L})}{\Gamma, A \vee \neg A \vdash A}\ (\vee\ \mathrm{L}) \qquad \vdash A \vee \neg A}{\Gamma \vdash A}\ (\text{taglio})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg A \vdash \neg A}{\neg A \vdash A \vee \neg A}\ (\vee\ \mathrm{R})}{\neg(A \vee \neg A), \neg A \vdash}\ (\neg\ \mathrm{L})}{\neg(A \vee \neg A) \vdash A}\ (\mathrm{RAA})}{\neg(A \vee \neg A) \vdash A \vee \neg A}\ (\vee\ \mathrm{R})}{\neg(A \vee \neg A), \neg(A \vee \neg A) \vdash}\ (\neg\ \mathrm{L})}{\neg(A \vee \neg A) \vdash}\ (\text{contr. L})}{\vdash A \vee \neg A}\ (\mathrm{RAA})$$

Calcolo dei Sequenti Classico (LK) : 4/5

- Si noti che in presenza del Terzo Esculo, RAA diventa derivabile ma a condizione che si usi la regola del taglio. In effetti, l'introduzione dell' assioma del terzo escluo $\vdash A \vee \neg A$ ha una conseguenza altrettanto spiacevole della perdita della proprietà della sotto-formula: in generale la regola del taglio non risulta più essere eliminabile dal sistema.
- Per risolvere questo problema si è costretti a introdurre una modifica piuttosto cospicua nel sistema. In effetti, la ragione principale delle difficoltà che si sono incontrate nella trattazione della nozione classica di negazione ($\neg\neg A = A$) sono imputabili alla eveidente asimmetria del calcolo LJ introdotto rispetto alla gestione della parte destra e sinistra del sequente.

  Come esercizio, si verifichi che in LJ

$$\vdash A \quad \Rightarrow \quad \vdash \neg\neg A$$

$$\vdash \neg\neg A \quad \not\Rightarrow \quad \vdash A.$$

Calcolo dei Sequenti Classico (LK) : 5/5

- Per eliminare l'asimmetria di LJ consideriamo sequenti della forma:

  $$\Gamma \vdash \Delta$$

  dove $\Gamma = A_1, \ldots, A_n$ e $\Delta = B_1, \ldots, B_m$ sono sequenze finite, eventualmente vuote, di formule.

- Per ragioni di dualità, se la ",“ a sinistra del sequente ha il significato di congiunzione, la ",“ a destra ha il significato di disgiunzione, cos ecco la lettura del sequente precedente:

  $$A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \vdash B_1 \vee \ldots \vee B_m$$

- Tutte le regole strutturali hanno ora un loro corrispettivo destro: l'insieme delle conclusioni può essere permutato, contratto o indebolito.

- Le regole (logiche) di introduzione dei connettivi e la regola del taglio restano sostanzialmente immutate, a parte l'aggiunta di una sequenza parametrica di formule Δ nella parte destra di tutti i sequenti.

Calcolo dei Sequenti Classico (LK) : identità e strutturali

Regole di Indentità:

$$\frac{}{A \vdash A}\ \text{axioma} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\ \text{cut o taglio}$$

Regole Strutturali:

$$\frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, B, A, \Gamma' \vdash \Delta}\ (\text{perm. L}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, B, A, \Delta'}\ (\text{perm. R})$$

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (\text{contr. L}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ (\text{contr. R})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (\text{ind. L}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A}\ (\text{ind. R})$$

Calcolo dei Sequenti Classico (LK) : regole logiche

Regole della congiunzione:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\,(\wedge L_1) \qquad \frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\,(\wedge L_2) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}\,\wedge R$$

Regole della disgiunzione:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\,(\vee L) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\,(\vee R_1) \qquad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\,(\vee R_2)$$

Regole dell'implicazione:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\,(\to L) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\,(\to R)$$

Regole della negazione:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\,(\neg L) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\,(\neg R)$$

Il Terzo Escluo ($\vdash A \vee \neg A$) è derivabile in LK

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A}{\vdash A, \neg A}\,(\neg R)}{\vdash A \vee \neg A, A}\,(\vee R)}{\vdash A \vee \neg A, A \vee \neg A}\,(\vee R)}{\vdash A \vee \neg A}\,(contr.R)
$$

LK: alcune definizioni (1/2)

- Come già osservato, (a parte la regola del taglio, le regole di LK permettono unicamente di introdurre dei connettivi, ma mai di eliminarli (proprietà della sottoformula).
- La formula del sequente in cui è stato introdotto il connettivo è detta **formula principale** dell'inferenza logica.
- Le sottoformule costituenti la formula principale sono dette **formule ausiliarie** dell'inferenza.
- Tutte le altre formule (che non sono principali o ausiliarie) dei sequenti coinvolti nella regola logica assumono il ruolo di **parametri**.
- L'insieme dei parametri è detto **contesto** della regola.
- Nel caso delle regole strutturali consideremo tutte le formule come parametri.

LK: alcune definizioni (2/2)

- Quando una formula ausiliaria compare nel sequente premessa dell'inferenza nello stesso lato del sequente in cui compare la formula principale, allora diremo che ha la stessa polarità della formula principale; altrimento ha polarità inversa.
- Ad esempio nelle regole dell'implicazione:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ (\to L) \qquad\qquad \frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ (\to R)$$

  $A \to B$ è la formula principale, A e B sono formule ausiliarie e $\Gamma \cup \Delta$ è il contesto; inoltre, B ha la stessa polarità della formula principale, mentre A ha polarità opposta.
- Osserva: la polarità delle formule costituenti (o ausiliarie) dipende dal connettivo introdotto e non dalla regola; nel caso di $A \to B$, B ha la stessa polarità di $A \to B$, mentre A ha polarità opposta.

Eliminazione del Taglio per LK

Teorema (Gentzen's Hauptsatz)

La regola del taglio è eliminabile dal sistema LK, ovvero per ogni sequente $\Gamma \vdash \Delta$ dimostrabile in LK è possibile ottener in modo effettivo una nuova dimostrazione dello stesso sequente che non contiene nessuna applicazione della regola del taglio

L'interesse del teorema è nella natura effettiva (algoritmica) del procedimento di eliminazione dei tagli. Questo risultato costituisce uno dei teoremi più rilevanti della moderna teoria della dimostrazione. Noi daremo una traccia dell dimostrazione (piuttotso lunga e complessa).

- il **livello di un taglio** è la somma delle profondità delle premesse della regola del taglio (senza contare, nella profondità, l'applicazione di regole strutturali);
- la **complessità di una formula** è data dal numero di connettivi in essa presenti;
- il **grado di un taglio** è la complessità della formula sulla quale avviene il taglio

Gentzen's Hauptsatz: idea della dimostrazione (1/5)

La dimostrazione si effettua per induzione sul grado del taglio con una sotto-induzione sul livello del taglio. Data una prova di un sequente che contenente delle applicazioni della regola del taglio, tale prova viene trasformata in un'altra avente tagli di grado inferiore oppure di livello più basso. Vi sono due possibilità:

1. il **taglio è logico**: entrambe le regole utilizzate appena prima della regola del taglio sono regole logiche di introduzione della formula su cui avviene il taglio;
2. il **taglio é strutturale** in tutti gli altri casi: quando almeno una delle due regole immediatamente precedenti il taglio utilizza la formula A del taglio in modo parametrico (A appartiene al contesto); diremo che la *regola è parametrica in* A.

L'idea della dimostrazione è quella di muovere le regole di taglio "verso l'alto" fino a ridursi al caso di tagli con assiomi che possono essere eliminati semplicemente (caso base della sotto-induzione sulle profonditá).

Gentzen's Hauptsatz: i tagli logici (2/5)

Un taglio logico viene rimpiazzato da uno o piú tagli di grado inferiore.

Esempio (1)

il taglio a sinistra si riduce nei tagli a destra di grado inferiore.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}(\to R) \quad \dfrac{\Gamma' \vdash A, \Delta' \qquad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}(\to L)}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}(cut_1) \quad \mapsto \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma, A \vdash B, \Delta \qquad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}(cut_2) \qquad \Gamma' \vdash A, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}(cut_3)$$

Esempio (2)

il taglio a sinistra si riduce nel taglio a destra di grado inferiore.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}(\vee R) \quad \dfrac{\Gamma', A \vdash \Delta' \qquad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma', A \vee B \vdash \Delta'}(\vee L)}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}(cut_1) \quad \mapsto \quad \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}(cut_2)$$

Gentzen's Hauptsatz: i tagli strutturali (3/5)

In generale, con i tagli struturali, é sempre possibile spostare la regola che utilizza la formula del taglio A in modo parametrico al di sotto della regola del taglio, costruendo una dimostrazione con un taglio di livello inferiore.

Esempio (3)

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma, B \vdash C, \Delta, A}{\Gamma \vdash B \to C, \Delta, A}\ (\to R) \qquad A, \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash B \to C, \Delta, \Delta'}\ (cut_1)$$

si riduce in una prova dello stesso sequente con un taglio a livello inferiore

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma, B \vdash C, \Delta, A \qquad A, \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', B \vdash C, \Delta, \Delta'}\ (cut_2)}{\Gamma, \Gamma' \vdash B \to C, \Delta, \Delta'}\ (\to R)$$

Gentzen's Hauptsatz: i tagli strutturali (4/5)

I maggiori problemi si incontrano quando la formula su cui si effettua il taglio è stata appena contratta in una delle due premesse, come nel caso seguente.

Esempio (4)

$$\dfrac{(contr.R)\,\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A} \qquad A, \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\,(cut_1)$$

l'ovvia trasformazione sembrerebbe questa:

$$\dfrac{(cut_3)\,\dfrac{(cut_2)\,\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A, A \qquad A, \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta', A} \qquad A, \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', \Gamma' \vdash \Delta, \Delta', \Delta'}}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\,(contr.L/R)$$

ma ... (continua)

Gentzen's Hauptsatz: i tagli strutturali (5/5)

Tuttavia, questa regola di riduzione (strutturale), unitamente a quella simmetrica per gestire il caso della contrazione nella premessa destra del sequente, può dar luogo a sequenze infinite di riduzione, come nel seguente caso (lasciato per esercizio):

Esempio (5)

$$\dfrac{(contr.R)\,\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A} \qquad \dfrac{A, A, \Gamma' \vdash \Delta'}{A, \Gamma' \vdash \Delta'}\,(contr.L)}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\,(cut_1)$$

Per ovviare a questo problema si può considerare una versione generalizzata della regola del taglio, in cui si permette il taglio simultaneo su più occorrenze diverse (possibilmente $n \neq m$) della stessa formula A:

Definizione (multi-taglio)

$$\dfrac{(contr.R)\,\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, mA} \qquad nA, \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\,(multi - taglio)$$

In LK il taglio è eliminabile ma non è derivabile (Prop. Sottoformula).

Sulle Regole Strutturali (1/5)

- Osserviamo che nelle regole di LK per $\wedge$ e $\vee$ aventi due premesse i contesti di ambedue le premesse sono uguali; tali regole sono **dipendenti dal contesto o additive**.
- Grazie alle regole strutturali è possibile però ottenere dei sistemi equivalenti ad LK nei quali alcune o tutte le regole additive sono sostituite da regole **libere dal contesto o moltiplicative** nelle quali si rilasciano i vincoli sui contesti:

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\,(\wedge_m L) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma' \vdash B, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \wedge B, \Delta, \Delta'}\,(\wedge_m R)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \vee B \vdash \Delta, \Delta'}\,(\vee_m L) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\,(\vee_m R)$$

- dimostreremo come esercizio che le due formulazioni sono equivalenti (ciascuna formulazione è derivabile dall'altra) in presenza delle regole strutturali

Esercizio: le regole per $\wedge_m$ sono equivalenti a quelle per $\wedge_a$

– deriviamo la regola per $\wedge_m R$ da quella per $\wedge_a R$

$$\dfrac{(ind.L/R)\,\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash A, \Delta, \Delta'} \qquad \dfrac{\Gamma' \vdash B, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash B, \Delta, \Delta'}\,(ind.L/R)}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \wedge B, \Delta, \Delta'}\,(\wedge_m R)$$

– e viceversa, deriviamo la regola per $\wedge_a R$ da quella per $\wedge_m R$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma, \Gamma \vdash A \wedge B, \Delta, \Delta}\,(\wedge_m R)}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}\,(contr.L/R)$$

– deriviamo la regola per $\wedge_m L$ da quelle per $\wedge_a L$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B, B \vdash \Delta}\,(\wedge_a 1L)}{\Gamma, A \wedge B, A \wedge B \vdash \Delta}\,(\wedge_a 2L)}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\,(contr.L)$$

– infine, deriviamo la regola per $\wedge_a 1L$ (resp.$\wedge_a 2L$) da quella per $\wedge_m L$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A, B \vdash \Delta}\,(ind.L)}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\,(\wedge_m L) \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A, B \vdash \Delta}\,(ind.L)}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\,(\wedge_m L)$$

Sulle Regole Strutturali (2/5)

La ragione della distinzione delle regole in additive e moltiplicative é dovuta alla tecnica della riduzione del taglio.
In particolare per ridurre un taglio tra due formule introdotte con regole con la "stessa natura" non è necessario richiedere l'uso di regole strutturali. Ad esempio:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}(\wedge_a R) \qquad \dfrac{\Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta'}(\wedge_a^1 L)}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}(cut_1)$$

si riduce al taglio più semplice senza aggiunta di regole strutturali

$$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}(cut_2)$$

mentre per ridurre un taglio tra due formule introdotte con regole di "diversa natura" è necessario contrarre o indebolire la prova ridotta:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}(\wedge_a R) \qquad \dfrac{\Gamma', A, B \vdash \Delta'}{\Gamma', A \wedge B \vdash \Delta'}(\wedge_m L)}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}(cut)$$

Sulle regole strutturali (3/5)

- Dunque le regole strutturali assumono un ruolo di primaria importanza nel Calcolo dei Sequenti. La presenza o l'assena di queste regole determina sistemi logici notevolmente differenti tra di loro.
- Come abbiamo visto, il sistema LJ (corrispondente alla Logica Intuizionista) si ottiene imponendo nel sistema LK che alla destra dei sequenti vi sia al più una formula; ciòimpedisce chiaramente la presenza delle regole strutturali a destra.
- In generale, le logiche che non hanno tutte le regole strutturali sono dette Logiche Substrutturali.
- Discuteremo brevemente alcune di queste.

Sulle regole strutturali (4/5)

- Il Calcolo di Lambek è (1958) un esempio di Sistema (intuizionista) completamente privo di regole strutturali; tale calcolo viene utilizzato per modellare importanti caratteristiche tipiche del linguaggio naturale (grammatiche categoriali).
- Sistemi nei quali sono assenti le regole di indebolimento sono dette Logiche della rilevanza; il nome è dovuto essenzialmente al fatto che nelle regole di inferenza le premesse devono essere "rilevanti" per la conclusione; tali logiche sono usate in Intelligenza Artificiale per modellare ragionamenti con incertezza.
- Le logiche nelle quali sono assenti le regole di contrazione sono spesso chiamate Logiche BCK; il nome deriva dal fatto che il frammento implicativo (le formule chiuse sotto l'implicazione) di tali logiche può essere assiomatizzato dai seguenti schemi logici:
  $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$
  $(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$
  $A \to (B \to A)$.

Sulle regole strutturali (5/5)

Infine, nella Logica Lineare introdotta da Girard (1987) sono assenti sia le regole di indebolimento che quelle di contrazione; tali regole vengono però reintrodotte in maniera "controllata" utilizzando dei nuovi connettivi (modalità) "!" e "?".

Ciò comporta, come visto in precedenza, lo "sdoppiamento" dei connettivi $\wedge$ e $\vee$ nelle corrispondenti versioni additive e moltiplicative.

La logica lineare offre in particolare:

- una visione più sottile della logica classica, mettendo particolarmente in evidenza il ruolo delle formule come vere e proprie "risorse" di calcolo, con innumerevoli applicazioni in particolare all'informatica.
- una lettura innovativa, geometrica, delle dimostrazioni, viste più generalmente come grafi (reti di dimostrazioni), rappresentazioni de-sequenzializzate, parallele.