Errata Corrige Logica Volume 1
Dimostrazioni e modelli al primo ordine

V. M. Abrusci
L. Tortora de Falco

18 gennaio 2022

Segnaliamo alcuni miglioramenti possibili nel Volume 1. In taluni casi si tratta di formulazioni più adeguate di enunciati o dimostrazioni, in altri di correzioni di veri e propri errori. Rimangono vari refusi che verranno corretti in una prossima edizione.

1 Capitolo 2: Alcune nozioni preliminari

- sostituire il primo punto dell'Osservazione 1 p. 38 con quanto segue:

  «(i) Se $(X, \leqslant)$ è bene ordinato, allora la relazione $\leqslant$ è ben fondata su X: un sottoinsieme $\{x_i :\ i \in \mathbb{N}\}$ di X tale che per ogni $i \in \mathbb{N}$ vale $x_i > x_{i+1}$ non ha un minimo.»

- la Definizione 4 p. 41 che permette di definire l'estensione di un albero è sbagliata, nel senso che permette solo di allungare di 1 nodo il ramo di un albero e quindi di prolungare l'albero solo con nodi unari, mentre nella costruzione dell'analisi canonica del Capitolo 3 il prolungamento degli alberi finiti viene fatto mediante nodi unari oppure binari. È pertanto opportuno:

  1. a p.40 sostituire l'ultimo paragrafo (dopo l'Osservazione 6) con il paragrafo seguente:
     «Concludiamo il paragrafo presentando una semplice costruzione sugli alberi finiti[1] che ci sarà utile nel Paragrafo 3.4 per definire l'analisi canonica. Intuitivamente $\mathcal{A} \sqsubset_1 \mathcal{B}$ quando l'albero $\mathcal{B}$ è ottenuto dall'albero $\mathcal{A}$ allungando di (esattamente) un nodo (esattamente) uno dei rami di $\mathcal{A}$ oppure allungando (esattamente) di due nodi (esattamente) uno dei rami di $\mathcal{A}$. Mentre $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$ quando l'albero $\mathcal{B}$ è ottenuto prolungando (in modo finito) l'albero $\mathcal{A}$ con diramazioni unarie o binarie. Data una "catena non decrescente" di alberi finiti, se ne può facilmente definire l'"estremo superiore", che è anch'esso un albero (questa volta potenzialmente infinito).»
  2. sostituire la Definizione 4 p. 41 con quanto segue:
     «Siano $\mathcal{A} = (A, \leqslant_A)$ e $\mathcal{B} = (B, \leqslant_B)$ due alberi finiti. Scriveremo $\mathcal{A} \sqsubset_1 \mathcal{B}$ quando si verifica (esattamente) una delle due situazioni seguenti:
     1) $\mathcal{B}$ è un'estensione unaria di $\mathcal{A}$:
        - esiste $b \in B$ tale che $b \notin A$ e $B = A \cup \{b\}$;
        - per ogni $a \in A$ e per ogni $a' \in A$, vale l'equivalenza $a \leqslant_A a' \iff a \leqslant_B a'$;
        - esiste una foglia a_0 di $\mathcal{A}$ tale che $b <_B a_0$.

     2) $\mathcal{B}$ è un'estensione binaria di $\mathcal{A}$:
        - esistono $b_1, b_2 \in B$ tali che $b_1 \neq b_2$, $b_1 \notin A$, $b_2 \notin A$ e $B = A \cup \{b_1, b_2\}$;

[1] Un albero $\mathcal{A} = (A, \leqslant_A)$ è finito quando l'insieme A è finito.

- per ogni $a \in A$ e per ogni $a' \in A$, vale l'equivalenza $a \leqslant_A a' \iff a \leqslant_B a'$;
- esiste una foglia a_0 di $\mathcal{A}$ tale che $b_1 <_B a_0$ e $b_2 <_B a_0$.

Scriveremo $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$ quando esiste $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, ed un insieme $\{\mathcal{A}_i : i \in \{1, \ldots, n\}\}$ di alberi finiti tali che $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1$, $\mathcal{B} = \mathcal{A}_n$ e per ogni $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ vale $\mathcal{A}_i \sqsubset_1 \mathcal{A}_{i+1}$[2].

Dato un insieme $\{\mathcal{A}_n : n \in \mathbb{N}\}$ di alberi finiti tali che per ogni $n \in \mathbb{N}$ valga $\mathcal{A}_n \sqsubseteq \mathcal{A}_{n+1}$, denotiamo $Sup\{\mathcal{A}_n : n \in \mathbb{N}\}$ l'albero $\mathcal{A} = (A, \leqslant)$ così definito:

- $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$
- per ogni $x \in A$ e per ogni $y \in A$, vale l'equivalenza $x \leqslant y \iff \exists i \in \mathbb{N}(x \leqslant_{A_i} y)$[3].»

- sostituire l'ultima frase prima del paragrafo "Esempio: gli interi naturali" a p. 43 con quanto segue:

  «Quando l'insieme $\mathbf{X}$ è definito induttivamente, l'altezza di $x \in \mathbf{X}$ coincide con il minimo delle altezze degli alberi generativi di x (Osservazione 7).»

- sostituire l'ultima frase prima della Proposizione 2 p.47 con quanto segue:

  «La dimostrazione che segue dimostra entrambi gli enunciati (Proposizioni 1 e 2), in quanto usa l'assioma di scelta (nella Formulazione 1-buon ordinamento) solo nel caso in cui l'albero $\mathcal{A}$ è più che numerabile.»

- anche nella nota 16 p. 48 va eliminato il riferimento a Zermelo, e la seconda frase della nota va sostituita con quanto segue:

  «Nel caso A più che numerabile, il cardinale di A esiste per l'assioma di scelta nella Formulazione 1-buon ordinamento: si può bene ordinare A.»

2 Capitolo 3: Dimostrabilità e soddisfacibilità

- Nella regola $(\forall)$ del calcolo dei sequenti LK a p. 72, bisogna specificare che la variabile y è diversa dalle altre variabili che possono occorrere libere nella formula attiva nella regola : $y \notin \{x_1, \ldots, x_n\}$. Equivalentemente si può richiedere che y non occorra libera nella formula principale della regola $\forall x A(x, x_1, \ldots, x_n)$.

- La dimostrazione del Teorema 14 di correttezza a p. 75-76 non è scritta in modo ottimale. S'intende la parte che fa intervenire LK_c. Una prima possibilità è sostituire, nelle 3 affermazioni in presenza delle costanti nuove, "π_c" a "LK_c", il che rende almeno giusta la dimostrazione, ma non chiarissima. Meglio si può fare sostituendo interamente la dimostrazione con quella che segue:

  Dimostrazione. Intuitivamente, il risultato è una semplice verifica del fatto che per ogni $\mathcal{L}$-struttura $\mathcal{M}$:

  1. se Γ è un sequente conclusione di una regola 0-aria, allora $\mathcal{M} \models \Gamma$
  2. se Γ (risp. Δ) è il sequente premessa (risp. conclusione) di una regola unaria, allora dal fatto che $\mathcal{M} \models \Gamma$ segue che $\mathcal{M} \models \Delta$
  3. se Γ_1 e Γ_2 sono i due sequenti premesse di una regola binaria, e se Δ è il sequente conclusione della regola, allora dal fatto che $\mathcal{M} \models \Gamma_1$ e che $\mathcal{M} \models \Gamma_2$ segue che $\mathcal{M} \models \Delta$.

[2]Si noti che per $n = 1$ avremo $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{A}$, ed infatti la relazione $\sqsubseteq$ è ottenuta applicando alla relazione $\sqsubset_1$ un'operazione canonica e ben nota in letteratura: si dice che $\sqsubseteq$ è *la chiusura riflessiva e transitiva* della relazione $\sqsubset_1$.

[3]Per costruzione, dire che esiste $i \in \mathbb{N}$ tale che $x \leqslant_{A_i} y$ equivale a dire che per ogni $i \in \mathbb{N}$ per il quale $x, y \in A_i$ vale $x \leqslant_{A_i} y$.

Incontriamo però una difficoltà dovuta alla presenza, in una generica derivazione di LK, di formule che non sono né chiuse né a parametri in una struttura, mentre noi abbiamo scelto di definire il valore in una struttura solo delle formule chiuse a parametri nella struttura (seguendo l'idea che solo le formule "chiuse" possono avere un valore). Dobbiamo allora ricorrere ad un piccolo artefatto per dimostrare il teorema.
Introduciamo un insieme infinito (numerabile) $\mathcal{C}$ di nuovi simboli di costante che mettiamo in corrispondenza biunivoca con l'insieme $\mathcal{V}$ delle variabili vincolabili di $\mathcal{L}$, e consideriamo il linguaggio $\mathcal{L}'$ ottenuto a partire da $\mathcal{L}$ aggiungendo i simboli di costante presenti in $\mathcal{C}$. Introduciamo inoltre la variante di LK, che denotiamo con LK_c, ottenuta sostituendo la regola $(\forall)$ con la seguente regola:

$$\frac{\vdash \Gamma, A(c/x)}{\vdash \Gamma, \forall x A}$$

dove la condizione da rispettare sarà adesso che la costante c non appaia in Γ.

Se π è una derivazione in LK di A a partire da T, si può ottenere una derivazione π_c in LK_c di A a partire da T, sostituendo ad ogni occorrenza libera di una data variabile x il corrispondente simbolo di costante $c \in \mathcal{C}$: ovviamente in tal modo si sostituiscono a variabili diverse diversi simboli di costante. La derivazione π_c è una derivazione in LK_c di A da T che fa esclusivamente uso di formule chiuse di $\mathcal{L}'$.

Vogliamo ora dimostrare che se Λ è una teoria di $\mathcal{L}$, F è una formula chiusa di $\mathcal{L}$ e se π' è una derivazione, in LK_c, di F da Λ tale che in π' occorrono solo formule chiuse di $\mathcal{L}'$, allora (in $\mathcal{L}'$) vale $\Lambda \models F$. Per fare ciò mostriamo, per le $\mathcal{L}'$-strutture, la seguente variante delle tre condizioni precedenti:

1. se Γ è un sequente costituito solo da formule chiuse di $\mathcal{L}'$ e Γ è conclusione di una regola 0-aria di LK_c, allora $\mathcal{M}' \models \Gamma$ per ogni $\mathcal{L}'$-struttura $\mathcal{M}'$
2. se Γ (risp. Δ) è un sequente costituito solo da formule chiuse di $\mathcal{L}'$ e Γ (risp. Δ) è il sequente premessa (risp. conclusione) di una regola unaria di LK_c, allora dal fatto che $\mathcal{M}' \models \Gamma$ per ogni $\mathcal{L}'$-struttura $\mathcal{M}'$ che soddisfa Λ, segue che $\mathcal{M}' \models \Delta$ per ogni $\mathcal{L}'$-struttura $\mathcal{M}'$ che soddisfa Λ
3. se Γ_1 e Γ_2 sono i due sequenti premesse di una regola binaria di LK_c, se Δ è il sequente conclusione della regola e se i sequenti Γ_1, Γ_2 e Δ sono costituiti solo da formule chiuse di $\mathcal{L}'$, allora dal fatto che $\mathcal{M}' \models \Gamma_1$ e $\mathcal{M}' \models \Gamma_2$ per ogni $\mathcal{L}'$-struttura $\mathcal{M}'$ che soddisfa Λ, segue che $\mathcal{M}' \models \Delta$ per ogni $\mathcal{L}'$-struttura $\mathcal{M}'$ che soddisfa Λ.

La dimostrazione è immediata salvo nel caso della nuova regola del $\forall$: in questo caso vogliamo dimostrare che se ogni $\mathcal{L}'$-struttura che soddisfa Λ soddisfa il sequente $\Gamma, A(c/x)$ (dove c non appare in Γ), allora ogni $\mathcal{L}'$-struttura che soddisfa Λ soddisfa anche $\Gamma, \forall x A$. Sia dunque $\mathcal{M}'$ una $\mathcal{L}'$-struttura che soddisfa Λ; vogliamo dimostrare che $\mathcal{M}' \models \Gamma, \forall x A$. Se $\mathcal{M}' \models \Gamma$, la conclusione è immediata: supponiamo dunque che $\mathcal{M}' \not\models \Gamma$, e fissiamo un elemento a' del supporto M' di $\mathcal{M}'$. Vogliamo dimostrare che $\mathcal{M}' \models A[a'/x]$, il che, vista l'arbitrarietà dell'elemento $a' \in M'$ (e applicando la Definizione 22 p. 67), permetterà di concludere che $\mathcal{M}' \models \forall x A$. Consideriamo allora la $\mathcal{L}'$-struttura $\mathcal{M}''$ ottenuta a partire da $\mathcal{M}'$ cambiando (eventualmente) il valore di c nella struttura in maniera tale che risulti $c_{\mathcal{M}''} = a'$. Poiché in Λ non sono presenti i simboli di costante che occorrono in $\mathcal{C}$, per la Definizione 22 p. 67 di valore di una formula in una struttura, da $\mathcal{M}' \models \Lambda$ segue che $\mathcal{M}'' \models \Lambda$, e dunque per ipotesi $\mathcal{M}'' \models \Gamma, A(c/x)$. Ma per l'ipotesi fatta su $\mathcal{M}'$ ($\mathcal{M}' \not\models \Gamma$) e poiché c non occorre in Γ, questo significa che $\mathcal{M}'' \not\models \Gamma$, dunque necessariamente $\mathcal{M}'' \models A(c/x)$, e cioè $\mathcal{M}'' \models A[a'/x]$, il che equivale (per definizione di $\mathcal{M}''$) a $\mathcal{M}' \models A[a'/x]$. Dall'arbitrarietà dell'elemento $a' \in M'$ ne segue che $\mathcal{M}' \models \forall x A$ e dunque anche nel caso $\mathcal{M}' \not\models \Gamma$ vale comunque che $\mathcal{M}' \models \Gamma, \forall x A$.

Dalla dimostrazione delle tre affermazioni precedenti segue che se Λ è una teoria di $\mathcal{L}$, F è una formula chiusa di $\mathcal{L}$ e se π' è una derivazione, in LK_c, di F da Λ tale che in π' occorrono solo formule chiuse di $\mathcal{L}'$, allora, per ogni $\mathcal{L}'$-struttura $\mathcal{M}'$ che soddisfa Λ, vale $\mathcal{M}' \models S$ per ogni sequente S che appare

in π'. E dunque $\Lambda \models F$ (in $\mathcal{L}'$) per ogni teoria Λ di $\mathcal{L}$ e per ogni formula chiusa F di $\mathcal{L}'$ tali che F è derivabile da Λ mediante una derivazione di LK_c in cui occorrono solo formule chiuse di $\mathcal{L}'$.
In particolare, poiché la derivazione π_c è una derivazione in LK_c di A da T in cui occorrono solo formule chiuse di $\mathcal{L}'$, ne discende che nel linguaggio $\mathcal{L}'$ vale $T \models A$.

Mostriamo ora l'enunciato del teorema di correttezza: sia $\mathcal{M}$ una $\mathcal{L}$-struttura che soddisfa T. Per ottenere una $\mathcal{L}'$-struttura $\mathcal{M}_c$ bisogna definire l'interpretazione delle costanti di $\mathcal{C}$, cosa che si può fare in tanti modi. Ma *qualunque sia il modo scelto*, la struttura $\mathcal{M}_c$ ottenuta soddisferà ancora T (visto che nelle formule di T non compaiono le costanti di $\mathcal{C}$). Dunque per quanto già dimostrato $\mathcal{M}_c \models A$. Sempre perché in A non compaiono le costanti di $\mathcal{C}$, la restrizione di $\mathcal{M}_c$ ad $\mathcal{L}$ (ottenuta "dimenticando" l'interpretazione delle costanti di $\mathcal{C}$) continuerà a soddisfare A. Ma la restrizione di $\mathcal{M}_c$ ad $\mathcal{L}$ è $\mathcal{M}$: dunque $\mathcal{M} \models A$. $\square$

- La terza frase della Definizione 28 p. 90 va sostituita con quanto segue:

  «Non vi sono regole ipotesi in π_S e non è dunque necessario indicare l'insieme delle formule associato alle conclusioni di tali regole.»

- a p. 95 righe 3-8 (dal basso): nella frase

  «Se $\exists x B$ occorre in una presentazione di sequente di φ, basta considerare una presentazione di sequente $\vdash \Gamma$ di φ con distanza maggiore di k dalla presentazione di sequente iniziale $\vdash \Gamma_0 = \vdash A$ e la cui formula prescelta sia appunto $\exists x B$: nella premessa della paraprova π_S (Definizioni 26 e 28) avente $\vdash \Gamma$ come conclusione occorre certamente la formula $B(t/x)$.»

  la nozione di "distanza" non è stata definita precisamente, e può essere più efficacemente sostituita con quella di lunghezza di un particolare cammino dell'analisi canonica. Pertanto si può sostituire la frase precedente con la seguente:

  «Se $\exists x B$ occorre in una presentazione di sequente di φ, basta considerare una presentazione di sequente $\vdash \Gamma$ di φ tale che la lunghezza del cammino di φ che va dalla radice $\vdash \Gamma_0 = \vdash A$ alla presentazione di sequente $\vdash \Gamma$ abbia lunghezza maggiore di k e la cui formula prescelta sia appunto $\exists x B$: nella premessa della paraprova π_S (Definizioni 26 e 28) avente $\vdash \Gamma$ come conclusione occorre certamente la formula $B(t/x)$.»

- a p. 96 righe 13-14 (dall'alto): la frase

  «Ma ci si può anche convincere che per ogni sequente S di φ, esiste S' sequente di φ tale che $\Lambda_S \subsetneq \Lambda_{S'}$.»

  si può sostituire con la frase

  «Ma ci si può anche convincere che per ogni sequente S di φ, esiste S' sequente di φ tale che $\Lambda_S \subsetneq \Lambda_{S'}$; ancora più precisamente $\Lambda_{S'} = \Lambda_S \cup \{A\}$ per un'opportuna formula A, con $A \notin \Lambda_S$.»

- A pagina 98, dopo la Nota 65 bisogna mettere un punto e non due punti. Il seguito è quanto segue, che sostituisce tutta la fine della dimostrazione del lemma:

  «Conformemente alla Definizione 19, per ogni variabile per predicato R di arietà $k \geqslant 1$, per ogni elemento di M^k, cioè per ogni k-upla $(\nu_1, \ldots, \nu_k)$ di termini chiusi di $\mathcal{L}$, dobbiamo dire se $(\nu_1, \ldots, \nu_k) \in R_{\mathcal{M}}$ o se invece $(\nu_1, \ldots, \nu_k) \notin R_{\mathcal{M}}$. Poniamo:

  - se $R(\nu_1, \ldots, \nu_k) \in AT$[4], allora $(\nu_1, \ldots, \nu_k) \in R_{\mathcal{M}}$;
  - se invece $R(\nu_1, \ldots, \nu_k) \notin AT$ e $\neg R(\nu_1, \ldots, \nu_k) \notin AT$, allora possiamo scegliere indifferentemente $(\nu_1, \ldots, \nu_k) \in R_{\mathcal{M}}$ oppure $(\nu_1, \ldots, \nu_k) \notin R_{\mathcal{M}}$.

  Se X è una lettera proposizionale, quando $X \in AT$ poniamo $X_{\mathcal{M}} = 1$, mentre quando $X \notin AT$ e $\neg X \notin AT$ possiamo scegliere indifferentemente $X_{\mathcal{M}} = 0$ oppure $X_{\mathcal{M}} = 1$. Naturalmente questa definizione è corretta per l'ipotesi del lemma: per ogni $A \in AT$, abbiamo $\neg A \notin AT$ e $\mathbf{F} \notin AT$.

[4] Rammentiamo che, conformemente alla Definizione 12, $R(\nu_1, \ldots, \nu_k)$ è una formula atomica chiusa di $\mathcal{L}$.

Si noti ora che una qualsiasi formula $A \in AT$ tale che $A \neq \mathbf{V}$, in quanto formula atomica chiusa di $\mathcal{L}$, è della forma $A = R(\tau_1/x_1, \ldots, \tau_n/x_n) = R(t_1(\tau_1/x_1, \ldots, \tau_n/x_n), \ldots, t_k(\tau_1/x_1, \ldots, \tau_n/x_n))$, dove $R(x_1, \ldots, x_n) = R(t_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, t_k(x_1, \ldots, x_n))$ è una formula atomica di $\mathcal{L}$, $n \geqslant 0$, e $\tau_1, \ldots, \tau_n$ sono termini chiusi di $\mathcal{L}$. Se $R(\tau_1/x_1, \ldots, \tau_n/x_n) \in AT$, allora ponendo $\nu_i = t_i(\tau_1/x_1, \ldots, \tau_n/x_n)$ per $i \in \{1, \ldots, k\}$ otteniamo k termini chiusi di $\mathcal{L}$ tali che $R(\nu_1, \ldots, \nu_k) \in AT$, e pertanto per quanto precede vale $\mathcal{M} \models R(\nu_1, \ldots, \nu_k)$, cioè $\mathcal{M} \models R(\tau_1/x_1, \ldots, \tau_n/x_n)$, ovvero $\mathcal{M} \models A$. Dunque $\mathcal{M} \models AT$.»

- Alla fine dell'Osservazione 47 p.98, si può dare qualche dettaglio sull'equivalenza $\mathcal{M} \models A[\tau_1, \ldots, \tau_n] \iff \mathcal{M} \models A(\tau_1/x_1, \ldots, \tau_n/x_n)$, che si dimostra per induzione sull'altezza della formula $A(x_1, \ldots, x_n)$:
  - il punto fondamentale è che se R è un predicato di arietà $k \geqslant 0$ e $\nu_1, \ldots, \nu_k$ sono termini chiusi di $\mathcal{L}$, allora per la Definizione 22 p.67-68 si ha $\mathcal{M} \models R(\nu_1, \ldots, \nu_k) \iff (\nu_{1_\mathcal{M}}, \ldots, \nu_{k_\mathcal{M}}) \in R_\mathcal{M}$. Ciò è dovuto al fatto che i termini ν_i hanno zero parametri: con le notazioni della Definizione 22 nella formula a parametri $A[a_1, \ldots, a_n]$ si ha $n = 0$ e $A(x_1, \ldots, x_n) = R(\nu_1, \ldots, \nu_k)$ è una formula *chiusa* (senza parametri). Stiamo quindi sfruttando la definizione di soddisfacibilità in $\mathcal{M}$ di una formula atomica chiusa: per ogni $i \in \{1, \ldots, k\}$, il termine $t_i(x_1, \ldots, x_n) = \nu_i$ è chiuso, e quindi $A(x_1, \ldots, x_n) = R(t_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, t_k(x_1, \ldots, x_n)) = R(\nu_1, \ldots, \nu_k)$ è una formula atomica chiusa.
  - dal punto precedente segue immediatamente, per la variabile speciale per predicato R di arietà $k \geqslant 0$, l'equivalenza seguente: $\mathcal{M} \models R(\nu_1, \ldots, \nu_k) \iff \mathcal{M} \models R[\nu_1, \ldots, \nu_k]$, con ν_i termine chiuso per ogni $i \in \{1, \ldots, k\}$. Infatti, per la definizione di soddisfacibilità della formula atomica $R[\nu_1, \ldots, \nu_k]$ sui k parametri $\nu_1, \ldots, \nu_k$, vale $\mathcal{M} \models R[\nu_1, \ldots, \nu_k] \iff (\nu_1, \ldots, \nu_k) \in R_\mathcal{M}$. Ma poiché $\nu_{i_\mathcal{M}} = \nu_i$, vale l'equivalenza $(\nu_{1_\mathcal{M}}, \ldots, \nu_{k_\mathcal{M}}) \in R_\mathcal{M} \iff (\nu_1, \ldots, \nu_k) \in R_\mathcal{M}$, e quindi in definitiva $\mathcal{M} \models R(\nu_1, \ldots, \nu_k) \iff (\nu_{1_\mathcal{M}}, \ldots, \nu_{k_\mathcal{M}}) \in R_\mathcal{M} \iff (\nu_1, \ldots, \nu_k) \in R_\mathcal{M} \iff \mathcal{M} \models R[\nu_1, \ldots, \nu_k]$;
  - più generalmente, se $R(x_1, \ldots, x_n) = R(t_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, t_k(x_1, \ldots, x_n))$ (per qualche $n \geqslant 0$) è una formula atomica e $\tau_1, \ldots, \tau_n$ sono termini chiusi di $\mathcal{L}$, poniamo $\nu_i = t_i(\tau_1/x_1, \ldots, \tau_n/x_n)$. Si ha: $\mathcal{M} \models R[\tau_1, \ldots, \tau_n] \iff (t_{1_\mathcal{M}}[\tau_1, \ldots, \tau_n], \ldots, t_{k_\mathcal{M}}[\tau_1, \ldots, \tau_n]) \in R_\mathcal{M}$
    $\iff (t_1(\tau_1/x_1, \ldots, \tau_n/x_n), \ldots, t_k(\tau_1/x_1, \ldots, \tau_n/x_n)) \in R_\mathcal{M} \iff (\nu_1, \ldots, \nu_k) \in R_\mathcal{M}$
    $\iff (\nu_{1_\mathcal{M}}, \ldots, \nu_{k_\mathcal{M}}) \in R_\mathcal{M} \iff \mathcal{M} \models R(\nu_1, \ldots, \nu_k)$
    $\iff \mathcal{M} \models R(t_1(\tau_1/x_1, \ldots, \tau_n/x_n), \ldots, t_k(\tau_1/x_1, \ldots, \tau_n/x_n)) \iff \mathcal{M} \models R(\tau_1/x_1, \ldots, \tau_n/x_n)$;
  - i casi dei connettivi sono banali;
  - anche il caso dei quantificatori è banale: se $A(x_1, \ldots, x_n) = \forall y B(y, x_1, \ldots, x_n)$, allora $\mathcal{M} \models A[\tau_1, \ldots, \tau_n] \iff$ per ogni $m \in |\mathcal{M}|$ vale $\mathcal{M} \models B[m, \tau_1, \ldots, \tau_n] \iff$ per ogni τ termine chiuso di $\mathcal{L}$ vale $\mathcal{M} \models B[\tau, \tau_1, \ldots, \tau_n] \iff$ per ogni τ termine chiuso di $\mathcal{L}$ vale $\mathcal{M} \models B(\tau/y, \tau_1/x_1, \ldots, \tau_n/x_n) \iff$ per ogni τ termine chiuso di $\mathcal{L}$ vale $\mathcal{M} \models B[\tau, \tau_1/x_1, \ldots, \tau_n/x_n] \iff$ per ogni $m \in |\mathcal{M}|$ vale $\mathcal{M} \models B[m, \tau_1/x_1, \ldots, \tau_n/x_n] \iff \mathcal{M} \models \forall y B(y, \tau_1/x_1, \ldots, \tau_n/x_n) \iff \mathcal{M} \models A(\tau_1/x_1, \ldots, \tau_n/x_n)$. Il caso $A(x_1, \ldots, x_n) = \exists y B(y, x_1, \ldots, x_n)$ è del tutto analogo.
- a p. 108, la prima frase del primo punto (riga 5 dall'alto) si può sostituire con quanto segue:

  «il teorema di compattezza per i linguaggi più che numerabili si può dimostrare senza passare dal teorema fondamentale dell'analisi canonica (si veda il Paragrafo 5.1, dove viene usata la tecnica tradizionale dei testimoni di Henkin).»

3 Capitolo 4: Verso la teoria della dimostrazione: il teorema di eliminazione del taglio per LK

- p. 117-121: la definizione del passo di riduzione per i quantificatori è errata. Va anche parzialmente modificato il caso (cc) in fondo a p. 123 quando R_1 è una regola $\forall$, come discusso nel punto seguente.

Il testo seguente sostituisce il testo del libro che va dall'Osservazione 63 p. 117 fino alla fine del passo ($\forall/\exists$) in fondo alla p.121. I cambiamenti significativi riguardano solo la parte che comincia con la frase «Si tratta ora di definire la nozione di "derivazione pulita"...» a p. 118, la definizione della relazione di equivalenza tra derivazioni non cambia.

In quanto segue faremo nuovamente riferimento alla Definizione 12 p. 56 di formula (quindi prima del quozientamento rispetto alla relazione $\sim$ della Definizione 16 p. 61). Se A è una formula, x una variabile e t un termine, nello scrivere $A(t/x)$ affermiamo, spesso implicitamente, che t è un termine *sostituibile* in A (con una parola presente a p.60 del Volume 1), cioè che le variabili di t non occorrono vincolate in A.

Una formula viene chiamata *pulita* quando nessuna variabile occorre sia vincolata che libera in essa. Conseguenza immediata della Definizione 16 p. 61 è che per ogni formula C è sempre possibile trovare una formula pulita C' tale che $C \sim C'$.
Un sequente Γ si dice *pulito* quando nessuna variabile occorre sia vincolata che libera in Γ[5]. Se Γ e Γ' sono due multinsiemi di formule, scriveremo $\Gamma \sim \Gamma'$ per indicare l'esistenza di una presentazione $A_1, \ldots, A_n$ (risp. $A'_1, \ldots, A'_n$) di Γ (risp. Γ') tale che $A_i \sim A'_i$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$. Si noti che se $A' \sim A$ (risp. $\Gamma' \sim \Gamma$) allora l'insieme delle variabili che occorrono libere in A (risp. Γ) coincide con l'insieme delle variabili che occorrono libere in A' (risp. Γ'). Vale anche per i sequenti la proprietà enunciata per le formule: dato un sequente Γ è sempre possibile trovare un sequente pulito Γ' tale che $\Gamma \sim \Gamma'$.

Useremo spesso l'espressione "variabile fresca", intendendo una variabile diversa da "qualunque variabile presente nel contesto considerato in quel momento"[6]. Poiché il linguaggio contiene infinite variabili individuali si dispone sempre, in un contesto in cui occorre un numero finito di variabili, di una quantità infinita di variabili fresche.

Osservazione 1. *Siano x, y due variabili individuali distinte, A una formula, t e τ due termini, entrambi sostituibili in A. Se x (risp. y) non occorre in τ (risp. t), allora $A(t/x)(\tau/y) = A(\tau/y)(t/x) = A(t/x, \tau/y)$.*

Lemma 1. *Sia A una formula, t un termine sostituibile in A e $v_1, \ldots, v_k$ variabili individuali. Se $A(t/x) \sim A'$ e A' è pulita, allora esiste $z \notin \{v_1, \ldots, v_k\}$ tale che $A' = A''(t/z)$ dove t è sostituibile in A'' e, per ogni variabile fresca w, vale $A(w/x) \sim A''(w/z)$ (e dunque $\exists x A \sim \exists z A''$ e $\forall x A \sim \forall z A''$).*

Dimostrazione. Possiamo supporre, senza perdita di generalità, che x occorre libera in A. Infatti, se x non occorre libera in A, allora $A(t/x) = A$, e dunque $A \sim A'$ e basterà prendere $z \notin \{v_1, \ldots, v_k\}$ tale che z non occorre in A'. Si pone allora $A'' = A'$ e vale $A' = A''(t/z) = A''$ e per w fresca vale $A(w/x) = A \sim A' = A''(w/z)$.

Supponiamo dunque che x occorra libera in A e che t sia sostituibile in A, e dimostriamo il lemma per induzione sull'altezza della formula A.

Se A è atomica, allora per le ipotesi fatte $A = P(\tau_1, \ldots, \tau_k)$ con P predicato di arità $k \geqslant 1$ e x occorre in qualcuno dei termini $\tau_1, \ldots, \tau_k$. Sia $t_i = \tau_i(t/x)$. Per la definizione della relazione di equivalenza tra formule, se $A(t/x) = P(t_1, \ldots, t_k) \sim A'$, allora $A' = A(t/x) = P(t_1, \ldots, t_k)$. Basta allora prendere z fresca e porre $A'' = A(z/x)$ per ottenere che $A''(t/z) = A' = A(t/x)$. Evidentemente, per ogni variabile fresca w, vale $A(w/x) = A''(w/z)$, e dunque a fortiori $A(w/x) \sim A''(w/z)$.

Se $A = B \wedge C$ oppure $A = B \vee C$, la dimostrazione è la stessa, quindi per fissare le idee supponiamo ad esempio che sia $A = B \wedge C$. Vale $A(t/x) = B(t/x) \wedge C(t/x)$ e dal fatto che $A(t/x) \sim A'$ e A' è pulita discende che $A' = B' \wedge C'$ con $B(t/x) \sim B'$, $C(t/x) \sim C'$ e B' e C' pulite[7]. Possiamo dunque

[5] Ne discende che una formula che occorre in un sequente pulito è pulita.

[6] Un altro modo di intendere le variabili fresche è il seguente: quanto si dice per una variabile fresca vale per qualunque variabile salvo un numero finito (eventualmente nullo) di variabili.

[7] Si osservi che se t è sostituibile in A, ovviamente t è sostituibile in B ed in C.

applicare l'ipotesi induttiva a B e C: per qualche $z, u \notin \{v_1, \ldots, v_k\}$ vale $B' = B''(t/z)$, $C' = C''(t/u)$ (con t sostituibile in B'' ed in C'') e per w fresca vale $B(w/x) \sim B''(w/z)$ e $C(w/x) \sim C''(w/u)$. Scegliendo allora una nuova variabile fresca v, poniamo $A'' = B''(v/z) \wedge C''(v/u)$. Il termine t è sostituibile in A'' e vale $A''(t/v) = B''(t/z) \wedge C''(t/u) = B' \wedge C' = A'$. Inoltre per w fresca si ha: $A''(w/v) = B''(w/z) \wedge C''(w/u) \sim B(w/x) \wedge C(w/x) = A(w/x)$.

Se $A = \exists u B$ oppure $A = \forall u B$ la dimostrazione è la stessa, quindi per fissare le idee supponiamo ad esempio che sia $A = \exists u B$. Poiché x occorre libera in A si ha $u \neq x$, e poiché le variabili di t non sono vincolate in A la variabile u non occorre in t. Pertanto (t è sostituibile in B e) vale $A(t/x) = (\exists u B)(t/x) = \exists u(B(t/x))$. Da $A(t/x) \sim A'$ e A' è pulita discende che $A' = \exists v B'$ è pulita. Per la definizione della relazione $\sim$, se prendiamo una variabile fresca y (in particolare: $y \neq x$, y non occorre in A, y non occorre in A') si ha $B(t/x)(y/u) \sim B'(y/v)$. Per l'Osservazione 1 ($x \neq u$, $x \neq y$ e u non occorre in t) vale $B(t/x)(y/u) = B(y/u)(t/x)$. Possiamo dunque applicare l'ipotesi induttiva a $B(y/u)$ ed all'insieme di variabili $\{v_1, \ldots, v_k, y, v\}$: da $B(y/u)(t/x) \sim B'(y/v)$ con $B'(y/v)$ pulita discende che per qualche $z \notin \{v_1, \ldots, v_k, y, v\}$ vale $B'(y/v) = B'''(t/z)$ dove t è sostituibile in B''' e per w fresca (in particolare $w \notin \{y, u, v, z\}$) vale $B(y/u)(w/x) \sim B'''(w/z)$.
Osserviamo che poiché $\exists v B'$ è pulita la variabile v non occorre in $B'(y/v) = B'''(t/z)$, e dal fatto che (secondo le nostre supposizioni) x occorre libera in A discende che t occorre in $A(t/x)$ e t occorre anche in $B'''(t/z)$; pertanto se v non occorre in $B'(y/v) = B'''(t/z)$ in particolare v non occorre in t. Poniamo allora $B'' = B'''(v/y)$[8]; vale dunque $B''' = B''(y/v)$ e per w fresca $B'''(w/z) = B''(y/v)(w/z)$. Poiché t è sostituibile in B''', t è sostituibile anche in B''. Per l'Osservazione 1 ($v \neq z$, $y \neq z$ e v non occorre in t) vale $B'''(t/z) = B''(y/v)(t/z) = B''(t/z)(y/v)$, e per w fresca da un lato ($u \neq x$ e $u \neq w$ e $x \neq y$) vale $B(y/u)(w/x) = B(w/x)(y/u)$ e dall'altro ($v \neq z$ e $v \neq w$ e $z \neq y$) vale $B''(y/v)(w/z) = B''(w/z)(y/v)$: da $B(y/u)(w/x) \sim B'''(w/z)$ discende allora $B(w/x)(y/u) \sim B''(w/z)(y/v)$. Dal fatto che y non occorre in A (e $w \neq y$) segue che y non occorre in $B(w/x)$; e dal fatto che y non occorre in A' segue che y non occorre in B'' e dunque ($y \neq w$) y non occorre in $B''(w/z)$. Di conseguenza, per definizione della relazione $\sim$, da $B(w/x)(y/u) \sim B''(w/z)(y/v)$ discende $\exists u(B(w/x)) \sim \exists v(B''(w/z))$, e poiché $u \neq x, w$ e $v \neq z, w$, ne consegue che $(\exists u B)(w/x) \sim (\exists v B'')(w/z)$.
Poniamo infine $A'' = \exists v B''$: poiché t è sostituibile in B'' e v non occorre in t, il termine t è sostituibile in A''. Per w fresca abbiamo appena osservato che vale $A(w/x) \sim A''(w/z)$. D'altra parte, $B'(y/v) = B'''(t/z) = B''(t/z)(y/v)$, e dunque $\exists v B' = \exists v(B''(t/z))$. Ma v non occorre in t e $v \neq z$, e quindi $A' = \exists v B' = \exists v(B''(t/z)) = (\exists v B'')(t/z) = A''(t/z)$. $\square$

Poiché stiamo facendo riferimento alla nozione di formula prima del quozientamento rispetto al nome delle variabili vincolate, la nozione di derivazione che consideriamo nel seguito fa riferimento alla formulazione delle regole di LK del Paragrafo 3.3.1 dove però l'identità tra formule va sostituita con l'equvalenza. Concretamente, ciò significa che

- la regola assioma ha come conclusione due formule equivalenti (e non necessariamente uguali):

$$\frac{}{\vdash A, \neg A'}$$

  dove $A \sim A'$;

- la regola di taglio ha come formule attive nelle premesse due formule equivalenti (e non necessariamente uguali):

$$\frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Delta, \neg A'}{\vdash \Gamma, \Delta}\,(cut)$$

  dove $A \sim A'$;

- la regola di contrazione si può applicare a due formule equivalenti (e non necessariamente uguali):

[8] Si noti che y non occorre in A', quindi y non occorre in B', mentre y occorre in $B'''(t/z) = B'(y/x)$ e tutte le occorrenze di y in B''' sono libere. Poiché $y \neq v$, ne discende che y non occorre in $B'' = B'''(v/y)$.

$$\frac{\vdash \Gamma, A, A'}{\vdash \Gamma, A''} (C)$$

dove $A \sim A'$ e A'' è una qualunque formula equivalente ad A (e ad A').

– nel contesto di una regola additiva di introduzione della congiunzione, si chiede che i due contesti delle due premesse siano equivalenti (e non necessariamente uguali):

$$\frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Gamma', B}{\vdash \Gamma'', A \wedge B} (\wedge_a)$$

dove $\Gamma \sim \Gamma'$ e Γ'' è un qualunque sequente equivalente a Γ (ed a Γ').

Osservazione 2. *È possibile estendere alle derivazioni di LK la Definizione 16 p. 61 di equivalenza tra formule: due derivazioni sono equivalenti quando "differiscono solo per il nome delle loro variabili vincolate". Sappiamo ormai che dare una definizione "ragionevolmente precisa" richiede un pò di attenzione.*
Volendo estendere la relazione $\sim$ alle derivazioni, si può procedere per induzione sul numero delle regole della derivazione, e gli accorgimenti da prendere sono molto simili a quelli presi per le formule: va tenuto presente che anche se la derivazione π_0 di $P(y)$ non è *equivalente alla derivazione π'_0 di $P(z)$, potrebbe accadere che la derivazione π di $\forall y P(y)$ sia equivalente alla derivazione π' di $\forall z P(z)$, dove π e π' sono le derivazioni ottenute applicando una regola $(\forall)$ a π_0 e π'_0. Rispetto al caso delle formule, nel caso delle derivazioni bisogna anche stare attenti alle variabili proprie delle regole $(\forall)$[9]: al momento di fare una sostituzione del termine t alla variabile z nella derivazione π, se vogliamo poter sostituire* tutte *le occorrenze di z, è opportuno anche sincerarsi del fatto che z non sia una variabile propria di qualche regola $(\forall)$; se lo fosse, basterà naturalmente sostituirla con un'altra variabile. In definitiva, si ottiene la definizione seguente, dove per analogia con quanto fatto per le formule, scriveremo $\pi(x_1, \ldots, x_n)$ per indicare che le variabili che occorrono libere in π sono tutte elementi dell'insieme $\{x_1, \ldots, x_n\}$.*

Supponiamo che π (risp. π') abbia come sequente conclusione $\vdash \Gamma$ (risp. $\vdash \Gamma'$), che sia $\Gamma \sim \Gamma'$ e che sia R l'ultima regola di π (risp. π'):

– *se R è una regola 0-aria di LK, allora $\pi \sim \pi'$*

– *se $R \neq (\forall)$, e se π_1 (risp. π_1 e π_2) è la (risp. sono le) sottoderivazione(i) premessa(e) di R, allora da $\pi_1 \sim \pi'_1$ (risp. da $\pi_1 \sim \pi'_1$ e $\pi_2 \sim \pi'_2$) segue che $\pi \sim \pi'$*

– *se $R = (\forall)$, la derivazione π sarà della forma*

$$\begin{array}{c} \pi_0(y, x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \dfrac{\vdash \Gamma_0, A(y, x_1, \ldots, x_n)}{\vdash \Gamma_0, \forall x A(x, x_1, \ldots, x_n)} R \end{array}$$

Supponiamo che la derivazione π' sia della forma

$$\begin{array}{c} \pi'_0(z, x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \dfrac{\vdash \Gamma'_0, A'(z, x_1, \ldots, x_n)}{\vdash \Gamma'_0, \forall u A'(u, x_1, \ldots, x_n)} R \end{array}$$

con $\Gamma_0 \sim \Gamma'_0$ e $\forall u A'(u, x_1, \ldots, x_n) \sim \forall x A(x, x_1, \ldots, x_n)$.
Se esiste $\pi_1(y, x_1, \ldots, x_n)$ (risp. $\pi'_1(z, x_1, \ldots, x_n)$) tale che $\pi_1(y, x_1, \ldots, x_n) \sim \pi_0(y, x_1, \ldots, x_n)$ (risp. $\pi'_1(z, x_1, \ldots, x_n) \sim \pi'_0(z, \ldots, x_n)$) e nella quale non appaiono come variabili proprie di

[9] Si veda il Paragrafo 3.3.1.3.3 per la definizione di variabile propria di una regola $(\forall)$.

qualche regola $\forall$ né y né z, indichiamo con w una variabile che non occorre né in $\pi_1(y, x_1, \ldots, x_n)$ né in $\pi'_1(z, x_1, \ldots, x_n)$, e denotiamo con $\pi_1(w, x_1, \ldots, x_n)$ (risp. $\pi'_1(w, x_1, \ldots, x_n)$) la derivazione ottenuta sostituendo in $\pi_1(y, x_1, \ldots, x_n)$ (risp. $\pi'_1(z, x_1, \ldots, x_n)$) tutte le occorrenze libere di y (risp. z) con w: se $\pi_1(w, x_1, \ldots, x_n) \sim \pi'_1(w, x_1, \ldots, x_n)$, allora $\pi \sim \pi'$.

Osservazione 3. *Con le notazioni dell'Osservazione 2 nel caso della regola $R = (\forall)$, si noti che se $y = z$, se $\pi_0(y, x_1, \ldots, x_n) \sim \pi'_0(y, x_1, \ldots, x_n)$ e se y non è una variabile propria di $\pi'_0(y, x_1, \ldots, x_n)$, allora $\pi \sim \pi'$: basterà prendere $\pi_1(y, x_1, \ldots, x_n) = \pi'_1(z, x_1, \ldots, x_n) = \pi'_0(y, x_1, \ldots, x_n)$.*

Si tratta ora di definire la nozione di "derivazione pulita", mostrare come per formule e sequenti che data una derivazione ne esiste sempre una pulita ad essa equivalente e definire il passo $(\forall/\exists)$ di eliminazione del taglio sulle derivazioni pulite (in modo analogo a quanto fatto nel definire la sostituzione di un termine ad una variabile in una formula: Definizione 17 p. 61). Ciò che abbiamo in mente è che in una derivazione pulita ad ogni variabile propria corrisponda *esattamente* una regola di introduzione del $\forall$, e che siano due a due disgiunti i tre insiemi seguenti: l'insieme delle variabili proprie, l'insieme delle variabili vincolate, l'insieme delle variabili libere. L'aspetto un pò ambiguo sta nella distinzione tra "variabile propria" e "variabile libera" di una derivazione, nel senso che fatalmente le occorrenze di una variabile propria sono libere, eppure vorremmo distinguerle dalle "altre" occorrenze di variabili libere, e ci riusciremo solo in parte (ma quanto basta per dare una definizione corretta del passo $(\forall/\exists)$ di eliminazione del taglio). Concettualmente la definizione è piuttosto chiara, e riposa sulla fondamentale caratteristica delle variabili vincolate e proprie di una derivazione di poter essere rinominate a piacere (con i dovuti accorgimenti). Se vogliamo essere più precisi però, la definizione diventa fastidiosa[10].

Introduciamo preliminarmente alcune notazioni e convenzioni: per una derivazione π, denotiamo con $V(\pi)$ (risp. $VP(\pi)$, $VV(\pi)$, $VL(\pi)$) l'insieme delle variabili (risp. variabili proprie, variabili vincolate, variabili libere) della derivazione π, dove s'intende che $x \in V(\pi)$ (risp. $x \in VP(\pi)$, $x \in VV(\pi)$, $x \in VL(\pi)$) quando x occorre (risp. occorre come variabile propria, occorre come variabile vincolata, occorre come variabile libera) in qualche formula di π[11]. Per un sequente (o una formula) Γ, denotiamo con $V(\Gamma)$ l'insieme delle variabili che occorrono (libere o vincolate) in qualche formula di Γ. Analogamente si definiscono gli insiemi $VV(\Gamma)$ e $VL(\Gamma)$. Convenzionalmente, con $V(\pi)$ (risp. $VV(\pi)$) s'intende parlare di *tutte* le variabili (risp. variabili vincolate) di π: se ad esempio y è una variabile propria di π che non occorre in π, noi considereremo che $y \in VP(\pi)$ e anche che $y \in V(\pi)$, mentre invece $y \notin VL(\pi)$. Analogamente, se la formula $A = \forall y P(x)$ occorre in π, noi considereremo che $y \in VV(A)$ e che $y \in VV(\pi)$.
Infine, se π è una derivazione, x è una variabile e t è un termine, denotiamo con $\pi(t/x)$ l'albero ottenuto sostituendo ogni occorrenza libera di x in π con il termine t: facendo riferimento all'analoga notazione per le formule, con la notazione $\pi(t/x)$ diamo per implicito che in ogni formula che occorre in π il termine t sia sostituibile. Si osservi che ciò non è sufficiente a garantire che $\pi(t/x)$ sia una derivazione perché potrebbe non essere rispettata la condizione sulla variabile propria di alcune regole $(\forall)$: se le regole $\forall$ di $\pi(t/x)$ rispettano la condizione sulla variabile propria, allora $\pi(t/x)$ è una derivazione.

Osservazione 4. *Per A, A' formule e π, π' derivazioni, valgono le seguenti proprietà:*

- *se $A \sim A'$, allora $VL(A) = VL(A')$;*
- *se $x \in VL(\pi) \backslash VP(\pi)$ e $\pi \sim \pi'$, allora $x \in VL(\pi')$;*
- *se $\pi \sim \pi'$ e u è una variabile fresca, allora, per ogni variabile x, gli alberi $\pi(u/x)$ e $\pi'(u/x)$ sono due derivazioni, e vale $\pi(u/x) \sim \pi'(u/x)$.*

La definizione di derivazione pulita procede per induzione sulla derivazione α, distinguendo i casi possibili a seconda dell'ultima regola R di α (e facendo riferimento alla formulazione delle regole di LK del Paragrafo 3.3.1)

[10] Come già scritto, abbiamo scelto di non "nascondere" questo genere di difficoltà, ritenendo che se non hanno ancora una soluzione davvero convincente vuol forse dire che nascondono aspetti non ancora completamente compresi.

[11] Si osservi che per ogni derivazione π che contenga almeno una regola $(\forall)$ nella cui premessa occorra la variabile propria vale $VP(\pi) \cap VL(\pi) \neq \emptyset$: una variabile propria di π -che occorra in π- occorre sempre libera in π.

- se R è una regola 0-aria, α è pulita quando la conclusione di R è un sequente pulito;
- se R è una regola unaria contrazione (risp. $\mathbf{F}$, $\vee_m$) con conclusione un sequente pulito, e se α_1 è la derivazione avente come conclusione il sequente premessa di R, la derivazione α è pulita quando lo è α_1[12];
- se $R = (W)$, la situazione è la seguente:

$$\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \vdots \\ \dfrac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, A}\,(W) \end{array}$$

  la derivazione α è pulita quando α_1 è pulita, la conclusione di R è un sequente pulito, le variabili che occorrono in A non sono variabili proprie di α_1, le variabili vincolate (risp. libere) di A non occorrono libere (risp. vincolate) in α_1
- se $R = (\vee_a)$, la situazione è la seguente:

$$\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \vdots \\ \dfrac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, A \vee B}\,(\vee_a) \end{array}$$

  la derivazione α è pulita quando α_1 è pulita, la conclusione di R è un sequente pulito, le variabili che occorrono in B non sono variabili proprie di α_1, le variabili vincolate (risp. libere) di B non occorrono libere (risp. vincolate) in α_1
- se $R = (\exists)$, la situazione è la seguente:

$$\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \vdots \\ \dfrac{\vdash \Gamma, A(t/x)}{\vdash \Gamma, \exists x A}\,(\exists) \end{array}$$

  la derivazione α è pulita quando α_1 è pulita, la conclusione di R è un sequente pulito, x non occorre libera in α_1 ed x non è una variabile propria di α_1
- se $R = (\forall)$, la situazione è la seguente (y non occorre libera in Γ):

$$\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \vdots \\ \dfrac{\vdash \Gamma, A(y/x)}{\vdash \Gamma, \forall x A}\,(\forall) \end{array}$$

  la derivazione α è pulita quando α_1 è pulita, la conclusione di R è un sequente pulito, y non occorre vincolata in α_1 (e quindi in particolare y non occorre vincolata in Γ e neanche in $A(y/x)$), y non è variabile propria di α_1, ed x non occorre libera in α_1 (in particolare $x \neq y$ e più generalmente x è diversa da tutte le variabili proprie di α)[13]
- se $R = (cut), \wedge_m, \wedge_a$, e se chiamiamo α_1 ed α_2 le due derivazioni aventi come conclusione rispettivamente Γ_1 e Γ_2, i due sequenti premesse di R, la derivazione α è pulita quando α_1 ed α_2 lo sono, la conclusione di R è un sequente pulito, e per $i, j \in \{1, 2\}$ ed $i \neq j$ si ha $VP(\alpha_i) \cap V(\alpha_j) = VV(\alpha_i) \cap VL(\alpha_j) = \emptyset$.

[12] In questi casi non abbiamo introdotto nuove variabili e neanche cambiato "statuto" (vincolato, libero, proprio) ad alcuna di esse.

[13] A rigore può accadere che y (al pari delle altre variabili proprie di α_1) non occorra in α_1, ed in tal caso specifichiamo che x è diversa da tutte le variabili proprie di α.

Osservazione 5. *Si verifica facilmente che se π è una derivazione pulita e u è una variabile fresca, allora, per ogni variabile x, l'albero $\pi(u/x)$ è una derivazione, ed è una derivazione pulita.*

Osservazione 6. *Risulta chiaro per definizione che una sottoderivazione di una derivazione pulita è anch'essa pulita. Si può dimostrare (per induzione sulla derivazione) che data una qualsiasi derivazione pulita α di LK, valgono le seguenti proprietà:*

1. *se $y \in VP(\alpha)$ allora y è variabile propria di esattamente una regola $\forall$ di α;*
2. *$VP(\alpha) \cap VV(\alpha) = \emptyset$;*
3. *$VV(\alpha) \cap VL(\alpha) = \emptyset$;*
4. *se $x \in VP(\alpha)$, allora x occorre solo sopra l'unica regola $\forall$ di α avente x come variabile propria (in particolare dunque, se x occorre libera nel sequente conclusione di α allora $x \notin VP(\alpha)$).*

Si dimostra anche d'altra parte (sempre per induzione sulla derivazione α) che data una qualsiasi derivazione α esiste una derivazione pulita α' di LK tale che $\alpha \sim \alpha'$, e precisamente:

Proposizione 1. *Per ogni derivazione α in LK, e presi comunque due insiemi $\{p_1, \dots, p_k\}$ e $\{v_1, \dots, v_h\}$ di variabili individuali, esiste una derivazione α', tale che:*

- *α' è pulita;*
- *$\alpha' \sim \alpha$;*
- *$VV(\alpha') \cap \{v_1, \dots, v_h\} = \emptyset$;*
- *$VP(\alpha') \cap \{p_1, \dots, p_k\} = \emptyset$.*

Dimostrazione. Per induzione sul numero di regole $l(\alpha)$ di α. Chiamiamo R l'ultima regola di α. Useremo il fatto evidente seguente: se π è una derivazione pulita e u è una variabile fresca, allora u è sostituibile in ogni formula che occorre in π e, per ogni variabile x, l'albero $\pi(u/x)$ è una derivazione ed è pulita.

Se α consiste di un'unica regola 0-aria di conclusione Γ, osserviamo che è sempre possibile trovare un sequente Γ' che sia pulito e tale che $\Gamma' \sim \Gamma$ e $VV(\Gamma') \cap \{v_1, \dots, v_h\} = \emptyset$.

Se R è una regola unaria contrazione (risp. $\mathbf{F}$, $\vee_m$) la conclusione è una conseguenza immediata dell'applicazione dell'ipotesi induttiva alla sottoderivazione di α ottenuta eliminando la regola R. Sfruttiamo in questo caso la possibilità di applicare la regola di contrazione a due formule equivalenti.

Se $R = (W)$ possiamo rappresentare α come segue:

$$\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \vdots \\ \dfrac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, A}\,(W) \end{array}$$

Possiamo applicare l'ipotesi induttiva alla derivazione α_1 e agli insiemi $\{v_1, \dots, v_h\} \cup VL(A)$ e $\{p_1, \dots, p_k\} \cup VL(A)$: esiste una derivazione pulita α_1' di conclusione Γ' tale che $\alpha_1' \sim \alpha_1$ e $VV(\alpha_1') \cap (\{v_1, \dots, v_h\} \cup VL(A)) = \emptyset$ e $VP(\alpha_1') \cap (\{p_1, \dots, p_k\} \cup VL(A)) = \emptyset$.
Scegliamo ora una formula pulita A' tale che $A' \sim A$ e $VV(A') \cap (V(\alpha_1') \cup \{p_1, \dots, p_k\} \cup \{v_1, \dots, v_h\}) = \emptyset$ (in particolare $VV(A') \cap V(\Gamma') = \emptyset$). Definiamo la derivazione α' come segue:

$$\begin{array}{c} \alpha_1' \\ \vdots \\ \dfrac{\vdash \Gamma'}{\vdash \Gamma', A'}\,(W) \end{array}$$

Verifichiamo che α' soddisfa le proprietà volute. Senz'altro per definizione $\alpha' \sim \alpha$. Inoltre:

- α'_1 è pulita (per ipotesi induttiva);
- Γ', A' è un sequente pulito: Γ' lo è per ipotesi induttiva, A' è pulita per definizione. Inoltre, se x occorre libera in A' allora x non occorre vincolata in Γ' (perché $VV(\alpha'_1) \cap VL(A') = VV(\alpha'_1) \cap VL(A) = \emptyset$) e se x occorre vincolata in A' allora x non occorre libera in Γ' (perché $VV(A') \cap V(\alpha'_1) = \emptyset$);
- $V(A') \cap VP(\alpha'_1) = \emptyset$: infatti $V(A') \cap VP(\alpha'_1) = (VL(A') \cap VP(\alpha'_1)) \cup (VV(A') \cap VP(\alpha'_1)) \subseteq (VL(A) \cap VP(\alpha'_1)) \cup (VV(A') \cap V(\alpha'_1)) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$;
- $VV(A') \cap VL(\alpha'_1) = \emptyset$: infatti $VV(A') \cap VL(\alpha'_1) \subseteq VV(A') \cap V(\alpha'_1) = \emptyset$;
- $VL(A') \cap VV(\alpha'_1) = \emptyset$: infatti $VL(A') \cap VV(\alpha'_1) = VL(A) \cap VV(\alpha'_1) = \emptyset$.

Da quanto precede discende che α' è una derivazione pulita. Infine: $VV(\alpha') = VV(\alpha'_1) \cup VV(A')$, e pertanto da $VV(\alpha'_1) \cap (\{v_1, \ldots, v_h\}) = \emptyset$ e $VV(A') \cap \{v_1, \ldots, v_h\} = \emptyset$ discende che $VV(\alpha') \cap \{v_1, \ldots, v_h\} = \emptyset$. E d'altra parte $VP(\alpha') = VP(\alpha'_1)$ e pertanto da $VP(\alpha'_1) \cap \{p_1, \ldots, p_k\} = \emptyset$ discende che $VP(\alpha') \cap \{p_1, \ldots, p_k\} = \emptyset$.

Se $R = (\vee_a)$, la dimostrazione è analoga al caso $R = (W)$.

Se $R = (\exists)$ possiamo rappresentare α come segue:

$$\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \vdots \\ \dfrac{\vdash \Gamma, A(t/x)}{\vdash \Gamma, \exists x A}\ (\exists) \end{array}$$

Applichiamo l'ipotesi induttiva alla derivazione α_1 ed agli insiemi $\{v_1, \ldots, v_h\}$ e $\{p_1, \ldots, p_k\}$: esiste una derivazione pulita α'_1 di conclusione Γ', A' tale che $\alpha'_1 \sim \alpha_1$ e $VV(\alpha'_1) \cap \{v_1, \ldots, v_h\} = \emptyset$ e $VP(\alpha'_1) \cap \{p_1, \ldots, p_k\} = \emptyset$.
Applicando il Lemma 1 all'equivalenza $A(t/x) \sim A'$ (con A' pulita) e all'insieme di variabili $\{v_1, \ldots, v_h\} \cup \{p_1, \ldots, p_k\} \cup V(\alpha) \cup V(\alpha'_1)$, otteniamo $A' = A''(t/z)$, dove t è sostituibile in A'', $z \notin \{v_1, \ldots, v_h\} \cup \{p_1, \ldots, p_k\} \cup V(\alpha_1) \cup V(\alpha'_1)$, e, per w variabile fresca, vale $A(w/x) \sim A''(w/z)$. Dunque $\Gamma, A(t/x) \sim \Gamma', A''(t/z) = \Gamma', A'$ e $\Gamma, \exists x A \sim \Gamma', \exists z A''$. Inoltre A'' è pulita perché A' è pulita e z è fresca. Definiamo la derivazione α' come segue:

$$\begin{array}{c} \alpha'_1 \\ \vdots \\ \dfrac{\vdash \Gamma', A''(t/z)}{\vdash \Gamma', \exists z A''}\ (\exists) \end{array}$$

Verifichiamo che α' soddisfa le proprietà volute. Da $\alpha_1 \sim \alpha'_1$ e $\Gamma, \exists x A \sim \Gamma', \exists z A''$ segue che $\alpha \sim \alpha'$. Inoltre:

- α'_1 è pulita (per ipotesi induttiva);
- $\Gamma', \exists z A''$ è un sequente pulito: Γ' è pulito per ipotesi induttiva, A'' è pulita e z non è vincolata in A'' dunque $\exists z A''$ è pulita. Inoltre, se v occorre libera in $\exists z A''$ allora v occorre libera in $A''(t/z)$ e dunque (poiché $\Gamma', A''(t/z) = \Gamma', A'$ è un sequente pulito) v non occorre vincolata in Γ'. D'altra parte, se v occorre vincolata in $\exists z A''$ allora $v = z$ (e allora v non occorre libera in Γ' perché $z \notin VV(\alpha'_1)$) oppure $v \in VV(A''(t/z))$ (e allora v non occorre libera in Γ' perché $\Gamma', A''(t/z)$ è un sequente pulito per ipotesi induttiva): in ogni caso v non occorre libera in Γ';
- $z \notin VL(\alpha'_1)$: la variabile z è stata scelta fresca e quindi in particolare $z \notin VL(\alpha'_1)$;

– $z \notin VP(\alpha'_1)$: la variabile z è stata scelta fresca e quindi in particolare $z \notin VP(\alpha'_1)$.

Da quanto precede discende che α' è una derivazione pulita. Infine: sempre perché z è stata scelta fresca si ha $z \notin \{v_1, \ldots, v_h\} \cup \{p_1, \ldots, p_k\}$, e pertanto da $VV(\alpha') = VV(\alpha'_1) \cup \{z\}$ segue $VV(\alpha') \cap \{v_1, \ldots, v_h\} = \emptyset$ (perché per ipotesi induttiva $VV(\alpha'_1) \cap \{v_1, \ldots, v_h\} = \emptyset$) e da $VP(\alpha') = VP(\alpha'_1)$ segue $VP(\alpha') \cap \{p_1, \ldots, p_k\} = \emptyset$ (perché per ipotesi induttiva $VP(\alpha'_1) \cap \{p_1, \ldots, p_k\} = \emptyset$).

Se $R = (\forall)$ possiamo rappresentare α come segue, con y non libera in Γ:

$$\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \vdots \\ \dfrac{\vdash \Gamma, A(y/x)}{\vdash \Gamma, \forall x A} \ (\forall) \end{array}$$

Applichiamo l'ipotesi induttiva alla derivazione α_1 ed agli insiemi $\{v_1, \ldots, v_h\} \cup \{y\}$ e $\{p_1, \ldots, p_k\} \cup \{y\}$: esiste una derivazione pulita α'_1 di conclusione Γ', A' tale che $\alpha'_1 \sim \alpha_1$ e $VV(\alpha'_1) \cap \{v_1, \ldots, v_h, y\} = \emptyset$ e $VP(\alpha'_1) \cap \{p_1, \ldots, p_k, y\} = \emptyset$.
Applicando il Lemma 1 all'equivalenza $A(y/x) \sim A'$ (con A' pulita) e all'insieme di variabili $\{y\} \cup \{v_1, \ldots, v_h\} \cup \{p_1, \ldots, p_k\} \cup V(\alpha) \cup V(\alpha'_1)$, otteniamo $A' = A''(y/z)$, dove y è sostituibile in A'', $z \notin \{y\} \cup \{v_1, \ldots, v_h\} \cup \{p_1, \ldots, p_k\} \cup V(\alpha) \cup V(\alpha'_1)$, e, per w variabile fresca, vale $A(w/x) \sim A''(w/z)$. Dunque $\Gamma, A(y/x) \sim \Gamma', A''(y/z) = \Gamma', A'$ e $\Gamma, \forall x A \sim \Gamma', \forall z A''$. Inoltre A'' è pulita perché A' è pulita e z è fresca. Consideriamo la derivazione β seguente:

$$\begin{array}{c} \alpha'_1 \\ \vdots \\ \dfrac{\vdash \Gamma', A''(y/z)}{\vdash \Gamma', \forall z A''} \ (\forall) \end{array}$$

Dal fatto che $\alpha_1 \sim \alpha'_1$ e $y \notin VP(\alpha'_1)$ segue (per l'Osservazione 3) che $\alpha \sim \beta$. Consideriamo ora una variabile fresca u[14] ed osserviamo che (per l'Osservazione 5) $\alpha'_1(u/y)$ è una derivazione pulita di conclusione $\Gamma', A''(u/z)$. Chiamiamo α' la derivazione seguente:

$$\begin{array}{c} \alpha'_1(u/y) \\ \vdots \\ \dfrac{\vdash \Gamma', A''(u/z)}{\vdash \Gamma', \forall z A''} \ (\forall) \end{array}$$

Verifichiamo che α' soddisfa le proprietà volute. Per ipotesi induttiva $y \notin VP(\alpha'_1)$; dunque $VP(\alpha'_1(u/y)) = VP(\alpha'_1)$. D'altra parte u è fresca e pertanto $u \notin VP(\alpha'_1)$. In definitiva $y, u \notin VP(\alpha'_1) = VP(\alpha'_1(u/y))$. Per w fresca vale $\alpha'_1(w/y) = \alpha'_1(u/y)(w/u)$, e quindi a fortiori $\alpha'_1(w/y) \sim \alpha'_1(u/y)(w/u)$. Dalla definizione di equivalenza tra derivazioni ne discende allora che $\beta \sim \alpha'$ e quindi $\alpha \sim \alpha'$. Inoltre:

– $\alpha'_1(u/y)$ è una derivazione pulita: conseguenza dell'Osservazione 5;
– $\Gamma', \forall z A''$ è un sequente pulito: Γ' è pulito per ipotesi induttiva, $\forall z A''$ è pulita perché A'' è pulita e z non occorre in $A''(u/z)$. Inoltre, se v occorre libera in $\forall z A''$ allora v occorre libera in $A''(u/z)$ e dunque (poiché $\Gamma', A''(u/z)$ è un sequente pulito) v non occorre vincolata in Γ'. D'altra parte, se v occorre vincolata in $\forall z A''$ allora $v = z$ (e allora v non occorre libera in Γ' perché $z \notin VV(\alpha'_1)$) oppure $v \in VV(A''(u/z))$ (e allora v non occorre libera in Γ' perché $\Gamma', A''(u/z)$ è un sequente pulito): in ogni caso v non occorre libera in Γ';

[14] Se sapessimo che $y \notin \{p_1, \ldots, p_k\}$ potremmo prendere direttamente $\alpha' = \beta$, ma ciò non è in generale garantito e dobbiamo pertanto scegliere una variabile fresca u per essere certi che $u \notin \{p_1, \ldots, p_k\}$.

- $u \notin VV(\alpha_1'(u/y))$: immediato perché u è fresca;
- $u \notin VP(\alpha_1'(u/y))$: immediato perché u è fresca e $y \notin VP(\alpha_1')$;
- $z \notin VL(\alpha_1'(u/y))$: sappiamo che $z \notin V(\alpha_1')$ ed u è fresca (quindi $u \neq z$);
- $z \notin VP(\alpha')$: sappiamo che $z \notin V(\alpha_1')$ e $VP(\alpha_1') = VP(\alpha_1'(u/y))$ e $u \neq z$.

Da quanto precede discende che α' è una derivazione pulita. Infine, osserviamo che $VV(\alpha_1'(u/y)) = VV(\alpha_1')$, e rammentiamo ancora che $VP(\alpha_1') = VP(\alpha_1'(u/y))$. Ne discende che $VV(\alpha') \cap \{v_1, \ldots, v_h\} = (VV(\alpha_1'(u/y)) \cup \{z\}) \cap \{v_1, \ldots, v_h\} = (VV(\alpha_1') \cup \{z\}) \cap \{v_1, \ldots, v_h\} = \emptyset$ (perché $z \notin \{v_1, \ldots, v_h\}$ e $VV(\alpha_1') \cap \{v_1, \ldots, v_h\} = \emptyset$ per ipotesi induttiva). E ne discende d'altra parte che $VP(\alpha') \cap \{p_1, \ldots, p_k\} = (VP(\alpha_1'(u/y)) \cup \{u\}) \cap \{p_1, \ldots, p_k\} = (VP(\alpha_1') \cup \{u\}) \cap \{p_1, \ldots, p_k\} = \emptyset$ (perché $u \notin \{p_1, \ldots, p_k\}$ e $VP(\alpha_1') \cap \{p_1, \ldots, p_k\} = \emptyset$ per ipotesi induttiva).

Se R è una regola binaria (cut, $\wedge_m$, $\wedge_a$) possiamo rappresentare α come segue:

$$\dfrac{\begin{matrix}\alpha_1 \\ \vdots \\ \vdash \Gamma_1\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\alpha_2 \\ \vdots \\ \vdash \Gamma_2\end{matrix}}{\vdash \Gamma}\ (R)$$

Applichiamo l'ipotesi induttiva alla derivazione α_1 ed all'insieme $V(\alpha) \cup \{v_1, \ldots, v_h\} \cup \{p_1, \ldots, p_k\}$: esiste una derivazione pulita α_1' di conclusione Γ_1' tale che $\alpha_1' \sim \alpha_1$ e $VV(\alpha_1') \cap (V(\alpha) \cup \{v_1, \ldots, v_h\} \cup \{p_1, \ldots, p_k\}) = \emptyset$ e $VP(\alpha_1') \cap (V(\alpha) \cup \{v_1, \ldots, v_h\} \cup \{p_1, \ldots, p_k\}) = \emptyset$. Applichiamo ora l'ipotesi induttiva alla derivazione α_2 ed all'insieme $V(\alpha_1') \cup \{v_1, \ldots, v_h\} \cup \{p_1, \ldots, p_k\}$: esiste una derivazione pulita α_2' di conclusione Γ_2' tale che $\alpha_2' \sim \alpha_2$ e $VV(\alpha_2') \cap (V(\alpha_1') \cup \{v_1, \ldots, v_h\} \cup \{p_1, \ldots, p_k\}) = \emptyset$ e $VP(\alpha_2') \cap (V(\alpha_1') \cup \{v_1, \ldots, v_h\} \cup \{p_1, \ldots, p_k\}) = \emptyset$. Definiamo la derivazione α' come segue:

$$\dfrac{\begin{matrix}\alpha_1' \\ \vdots \\ \vdash \Gamma_1'\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\alpha_2' \\ \vdots \\ \vdash \Gamma_2'\end{matrix}}{\vdash \Gamma'}\ (R)$$

Verifichiamo che α' soddisfa le proprietà volute. Senz'altro per definizione $\alpha' \sim \alpha$. Per dimostrare che Γ' è un sequente pulito, osserviamo preliminarmente che:

1. se x occorre libera in una formula di Γ_1', allora x non occorre vincolata in alcuna formula di Γ_2';
2. se x occorre vincolata in una formula di Γ_1', allora x non occorre libera in alcuna formula di Γ_2'.

Il Punto 1 discende immediatamente dal fatto che $VV(\alpha_2') \cap V(\alpha_1') = \emptyset$. Quanto al Punto 2, poiché α_2' è pulita sappiamo che una variabile x che occorre libera in Γ_2' non è una variabile propria di α_2' (per l'Osservazione 6): $x \in VL(\alpha_2') \setminus VP(\alpha_2')$. Ma allora, per l'Osservazione 4, vale $x \in VL(\alpha_2)$, e poiché $VV(\alpha_1') \cap V(\alpha) = \emptyset$ se ne deve concludere che $x \notin VV(\alpha_1')$: se x occorre libera in Γ_2' allora x non occorre vincolata in α_1' e quindi a fortiori non occorre vincolata in Γ_1'.

Dimostriamo che Γ' è un sequente pulito: se x occorre libera in Γ' allora x occorre libera in Γ_1' oppure x occorre libera in Γ_2'. Vediamo perché, in entrambi i casi, x non occorre vincolata in Γ': basta mostrare che x non occorre vincolata né in Γ_1' né in Γ_2'. Se x occorre libera in Γ_1', allora x non occorre vincolata in Γ_1' (perché Γ_1' è pulito) e x non occorre vincolata in Γ_2' (per il Punto 1). Se invece x occorre libera in Γ_2', allora x non occorre vincolata in Γ_2' (perché Γ_2' è pulito) e x non occorre vincolata in Γ_1' (per il Punto 2).
D'altra parte, se x occorre vincolata in Γ' allora x occorre vincolata in Γ_1' oppure x occorre vincolata in Γ_2'. Vediamo perché, in entrambi i casi, x non occorre libera in Γ': basta mostrare che x non occorre libera né in Γ_1' né in Γ_2'. Se x occorre vincolata in Γ_1', allora x non occorre libera in Γ_1' (perché Γ_1' è

pulito) e x non occorre libera in Γ'_2 (per il Punto 2). Se invece x occorre vincolata in Γ'_2, allora x non occorre libera in Γ'_2 (perché Γ'_2 è pulito) e x non occorre libera in Γ'_1 (per il Punto 1).

Valgono inoltre le seguenti proprietà per α':

- $VP(\alpha'_2) \cap V(\alpha'_1) = \emptyset$: immediato dall'ipotesi induttiva applicata ad α_2;
- $VP(\alpha'_1) \cap V(\alpha'_2) = \emptyset$: mostriamo che nei tre casi possibili per una variabile $x \in V(\alpha'_2)$ (cioè $x \in VV(\alpha'_2)$ oppure $x \in VP(\alpha'_2)$ oppure $x \in VL(\alpha'_2) \backslash VP(\alpha'_2)$) vale necessariamente $x \notin VP(\alpha'_1)$. Da $VV(\alpha'_2) \cap V(\alpha'_1) = VP(\alpha'_2) \cap V(\alpha'_1) = \emptyset$ discende che se $x \in VV(\alpha'_2) \cup VP(\alpha'_2)$ allora $x \notin VP(\alpha'_1)$. Se invece $x \in VL(\alpha'_2) \backslash VP(\alpha'_2)$, allora (per l'Osservazione 4) vale $x \in VL(\alpha_2) \subseteq V(\alpha_2)$ e sappiamo, per l'ipotesi induttiva applicata ad α_1, che $VP(\alpha'_1) \cap V(\alpha_2) = \emptyset$: anche in quest'ultimo caso dunque vale $x \notin VP(\alpha'_1)$;
- $VV(\alpha'_2) \cap VL(\alpha'_1) = \emptyset$: immediato dall'ipotesi induttiva applicata ad α_2;
- $VV(\alpha'_1) \cap VL(\alpha'_2) = \emptyset$: mostriamo che nei due casi possibili per una variabile $x \in VL(\alpha'_2)$ (cioè $x \in VP(\alpha'_2)$ oppure $x \in VL(\alpha'_2) \backslash VP(\alpha'_2)$) vale necessariamente $x \notin VV(\alpha'_1)$. Da $VP(\alpha'_2) \cap V(\alpha'_1) = \emptyset$ segue che se $x \in VP(\alpha'_2)$ allora $x \notin V(\alpha'_1)$ e quindi a fortiori $x \notin VV(\alpha'_1)$. Se invece $x \in VL(\alpha'_2) \backslash VP(\alpha'_2)$, allora (per l'Osservazione 4) vale $x \in VL(\alpha_2) \subseteq V(\alpha_2)$ e sappiamo, per l'ipotesi induttiva applicata ad α_1, che $VV(\alpha'_1) \cap V(\alpha_2) = \emptyset$: anche in quest'ultimo caso dunque vale $x \notin VV(\alpha'_1)$.

Dalle proprietà appena stabilite, dal fatto che Γ' è un sequente pulito e che α'_1 e α'_2 sono derivazioni pulite discende che α' è una derivazione pulita. Infine, da $VV(\alpha'_1) \cap \{v_1, \ldots, v_h\} = VV(\alpha'_2) \cap \{v_1, \ldots, v_h\} = \emptyset$ discende che $VV(\alpha') \cap \{v_1, \ldots, v_h\} = (VV(\alpha'_1) \cap \{v_1, \ldots, v_h\}) \cup (VV(\alpha'_2) \cap \{v_1, \ldots, v_h\}) = \emptyset$. E, d'altra parte, da $VP(\alpha'_1) \cap \{p_1, \ldots, p_k\} = VP(\alpha'_2) \cap \{p_1, \ldots, p_k\} = \emptyset$ discende che $VP(\alpha') \cap \{p_1, \ldots, p_k\} = (VP(\alpha'_1) \cap \{p_1, \ldots, p_k\}) \cup (VP(\alpha'_2) \cap \{p_1, \ldots, p_k\}) = \emptyset$. □

Corollario 1. *Data una qualsiasi derivazione α di LK, esiste una derivazione pulita α' tale che $\alpha \sim \alpha'$.*

Possiamo ora riprendere la definizione del passo $(\forall/\exists)$ dell'insieme $\mathcal{T}$: se $R_1 = \forall$ è una regola che introduce $A = \forall x B(x, x_1, \ldots, x_n)$ ed $R_2 = \exists$ è una regola che introduce $\neg A = \exists x \neg B(x, x_1, \ldots, x_n)$, allora π_1 e π_2 saranno rispettivamente le due derivazioni seguenti:

$$\begin{array}{c} \pi'_1 \\ \vdots \\ \dfrac{\vdash \Gamma, B(y/x,, x_1, \ldots, x_n)}{\vdash \Gamma, \forall x B(x, x_1, \ldots, x_n)} R_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \pi'_2 \\ \vdots \\ \dfrac{\vdash \Delta, \neg B(t/x, x_1, \ldots, x_n)}{\vdash \Delta, \exists x \neg B(x, x_1, \ldots, x_n)} R_2 \end{array}$$

Per il Corollario 1, possiamo scegliere π pulita ed equivalente alla derivazione di partenza: supponiamo dunque che la derivazione π di partenza sia essa stessa pulita[15]. La sostituzione $\pi'_1(t/y, x_1, \ldots, x_n)$ sarà allora la sostituzione di t in π'_1 ad ogni occorrenza della variabile y. In questo caso la trasformazione associa a π la derivazione π' seguente:

[15]Nel seguito continueremo a scrivere $B(t/x, x_1, \ldots, x_n)$ e $\neg B(t/x, x_1, \ldots, x_n)$ intendendo $B'(t/x, x_1, \ldots, x_n)$ e $\neg B'(t/x, x_1, \ldots, x_n)$ con $B \sim B'$.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1'(t/y, x_1, \dots, x_n)\\ \vdots \\ \vdash \Gamma, B(t/x, x_1, \dots, x_n)\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_2'\\ \vdots \\ \vdash \Delta, \neg B(t/x, x_1, \dots, x_n)\end{array}}{\vdash \Gamma, \Delta}$$

L'operazione di sostituzione è in tal caso corretta. Vediamo perché. Se t non occorre in π vuol dire che x non occorre in B, e quindi y non occorre come variabile propria in π: in tal caso $B(t/x, x_1, \dots, x_n) = B$, $\pi_1'(t/y, x_1, \dots, x_n) = \pi_1'$ e tale (apparente) sostituzione è evidentemente corretta. Possiamo dunque considerare il caso in cui x occorre in B (e dunque t occorre in π). In tal caso:

- ogni regola $(\forall)$ di $\pi_1'(t/y, x_1, \dots, x_n)$ ha la stessa variabile propria della corrispondente regola di π_1': infatti la variabile y occorre una sola volta in π come variabile propria (Punto 1 dell'Osservazione 6), e pertanto nel sostituire t ad y in π_1' non si sostituisce alcuna variabile propria di π_1';
- se v è una variabile che occorre in t, allora v occorre libera in π, e dunque non occorre vincolata in π_1' (perché $VV(\pi) \cap VL(\pi) = \emptyset$ per il Punto 3 dell'Osservazione 6), e quindi v non è catturata impropriamente da una quantificazione nella sostituzione di t ad y in π_1';
- ogni regola $(\forall)$ di $\pi_1'(t/y, x_1, \dots, x_n)$ rispetta il vincolo sulla variabile propria (non occorrere libera nel contesto). Infatti, se la sostituzione di t ad y in π_1' può rendere, nella regola S di introduzione del quantificatore universale con variabile propria z, il termine t presente nel contesto di S, certamente z non può occorrere in t, in quanto (Punto 4 dell'Osservazione 6) nella derivazione π la variabile propria z occorre solo al di sopra di S mentre t occorre in π_2'.

La trasformata della derivazione π di partenza sarà la classe di equivalenza di π'.

Il sequente conclusione non cambia. Non abbiamo aggiunto regole strutturali. Questo è uno dei "casi-chiave" (*key cases*) della procedura introdotta da Gentzen.

- a p. 123 il passo di riduzione (*cc*) va modificato, nel caso in cui la regola R_1 è unaria. Il testo alla fine di p. 123 «Se R_1 è unaria, allora π_1 sarà…» e si conclude a p. 124 con «otterremo dunque

  $$\dfrac{}{\vdash \mathbf{V}, \Gamma_1, \Delta}\,(\top)$$

  »

  va sostituito con quanto segue:

  «Se R_1 è unaria, allora vi sono due sottocasi:

  1. se $R_1 \neq \forall$, allora π_1 sarà

     $$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1'\\ \vdots\end{array}}{\vdash \Gamma_1, A}\,R_1'}{\vdash \Gamma, A}\,R_1$$

     In questo caso, la trasformata di π sarà la derivazione seguente:

     $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1'\\ \vdots\end{array}}{\vdash \Gamma_1, A}\,R_1' \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_2\\ \vdots\end{array}}{\vdash \Delta, \neg A}\,R_2}{\vdash \Gamma_1, \Delta}\,cut}{\vdash \Gamma, \Delta}\,R_1$$

  2. se invece $R_1 = \forall$, allora la derivazione π è della forma seguente (con $\Gamma = \Gamma_{11}, \forall x B$)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1' \\ \vdots\end{matrix}}{\vdash \Gamma_{11}, B(y/x), A}\,R_1'}{\vdash \Gamma_{11}, \forall x B, A}\,\forall \qquad \dfrac{\begin{matrix}\pi_2 \\ \vdots\end{matrix}}{\vdash \Delta, \neg A}\,R_2}{\vdash \Gamma, \Delta}\,cut$$

In tal caso bisogna preliminarmente scegliere una derivazione pulita equivalente a quella di partenza: assumiamo dunque che la derivazione precedente sia pulita. La trasformata della derivazione π sarà la derivazione seguente

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1' \\ \vdots\end{matrix}}{\vdash \Gamma_{11}, B(y/x), A}\,R_1' \qquad \dfrac{\begin{matrix}\pi_2 \\ \vdots\end{matrix}}{\vdash \Delta, \neg A}\,R_2}{\vdash \Gamma_{11}, B(y/x), \Delta}\,cut}{\vdash \Gamma, \Delta}\,\forall$$

Poiché π è pulita e y è una variabile propria di π, sappiamo per il Punto 4 dell'Osservazione 6 che y occorre in π solo sopra la regola $R_1 = \forall$ ed in particolare y non occorre libera nella sottoderivazione π_2 e tantomeno nel sequente Δ: ciò permette di applicare correttamente la regola $\forall$ nella trasformata di π qui sopra descritta. Si noti che in assenza dell'ipotesi π pulita nulla garantisce che y non occorra libera in Δ, e se y occorre libera in Δ non si può applicare una regola $\forall$ con variabile propria y e non sappiamo definire la trasformata di π.

Se R_1 è 0-aria, allora R_1 è la regola logica additiva $\top$ che introduce la costante $\mathbf{V}$: il passo si denota $(\top - cc)$, la derivazione π_1 sarà semplicemente

$$\dfrac{}{\vdash \mathbf{V}, A, \Gamma_1}\,(\top)$$

dove $\Gamma = \mathbf{V}, \Gamma_1$ e la trasformata di π verrà ottenuta cancellando π_2: otterremo dunque

$$\dfrac{}{\vdash \mathbf{V}, \Gamma_1, \Delta}\,(\top)$$

»

- a p. 128, prima del Paragrafo 4.1.3 ("Terzo passo: definizione di $\mathcal{T}_{rev}$ e seconda strategia dimostrativa"), è opportuno inserire l'osservazione seguente:

  Osservazione 7. *Quando π è pulita possiamo applicarle qualunque passo di eliminazione del taglio. La procedura di eliminazione del taglio può allora essere applicata ad una data derivazione π qualsiasi considerando π' pulita tale che $\pi' \sim \pi$ (la cui esistenza è garantita dal Corollario 1), poi applicando un passo di eliminazione del taglio (di tipo (S_1) oppure di tipo (S_2) oppure di tipo (L)) a π' ottenendo in tal modo π_1'. Successivamente si considera π_1'' pulita tale che $\pi_1'' \sim \pi_1'$ e si applica il passo successivo a π_1''. La procedura termina perché se α e α' sono due derivazioni quasi senza tagli equivalenti, con le notazioni introdotte nel Volume 1, vale $(deg(\alpha), en(\alpha)) = (deg(\alpha'), en(\alpha'))$.*

- I risultati 2. e 3. del Paragrafo 4.1 menzionati a p. 134 possono essere meglio formulati, integrando nel testo le note 14 e 15 p.134. Pertanto la parte finale del Paragrafo 4.1 a p. 134, a partire dalla frase «Valgono i seguenti risultati.» si può riformulare come segue:

  «Valgono i seguenti risultati:

  1. se π è una derivazione di $\vdash \Gamma$ di grado massimo n e di rango k, allora esiste una derivazione senza tagli di $\vdash \Gamma$ di rango non superiore a $2_n(2k+2)$;

2. teorema di Orevkov (1982): Esiste una successione $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ di formule del primo ordine tali che, per ogni k:
   - esiste una derivazione (con tagli) di C_k di rango lineare in k, cioè esistono $\alpha \in \mathbb{N}$ e $k_0 \in \mathbb{N}$ tali che, per ogni $k \geqslant k_0$, il rango della derivazione di C_k non supera αk;
   - tutte le derivazioni senza tagli di C_k hanno rango almeno iperesponenziale in k, cioè esistono $\alpha \in \mathbb{N}$ e $k_0 \in \mathbb{N}$ tali che, per ogni $k \geqslant k_0$, il rango di qualsiasi derivazione senza tagli di C_k è almeno pari a $\alpha 2_k(0)$.
3. Per la successione $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ di formule del primo ordine del teorema di Orevkov, il numero di passi di eliminazione del taglio (della procedura $\mathcal{T}_{glob}$) che trasformano una derivazione (con tagli) di C_k di rango lineare in k in una (qualsiasi) derivazione senza tagli di C_k è almeno iperesponenziale in k.»

- è opportuno sostituire l'enunciato del Teorema 23 p.134 con quanto segue:

  «Sia M un insieme di formule di $\mathcal{L}$ chiuso per sostituzione (cioè se $A(x, x_1, \ldots, x_n) \in M$, allora $A(t/x, x_1, \ldots, x_n) \in M$ per qualsiasi termine t)[16].»

- è opportuno sostituire l'enunciato della Proposizione 11 p.135 con quanto segue:

  «Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio del primo ordine. Per ogni formula F di $\mathcal{L}$ esiste una formula G tale che si può derivare il sequente $\vdash F \leftrightarrow G$, e tale che G è in *forma normale prenessa*: $G = Q_1x_1 \ldots Q_nx_nG'$, $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, $Q_i \neq Q_{i+1}$ per $1 \leqslant i < n$, e G' è una formula senza quantificatori. Inoltre, per ogni variabile individuale y di $\mathcal{L}$, se y occorre libera in G allora y occorre libera anche in F.»

4 Capitolo 5: Verso la teoria dei modelli: alcune conseguenze del teorema di compattezza

- A pagina 139, si può specificare nell'enunciato del Lemma 6, ad esempio mediante una nota, che la cardinalità dei linguaggi $\mathcal{L}$ ed $\mathcal{L}'$ non interviene nella dimostrazione del teorema di compattezza. L'enunciato del Lemma 6 si può dunque sostituire con quanto segue:

  «Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio e T una teoria in $\mathcal{L}$ finitamente soddisfacibile.

  Esiste un linguaggio $\mathcal{L}' \supseteq \mathcal{L}$ ottenuto aggiungendo ad $\mathcal{L}$ dei simboli di costante e tale che $\mathcal{L}'$ ha la stessa cardinalità di $\mathcal{L}$[17], ed esiste una teoria $T' \supseteq T$ in $\mathcal{L}'$, tali che:

  – T' è finitamente soddisfacibile
  – T' ha dei testimoni in $\mathcal{L}'$.»

- A pagina 140 il paragrafo che comincia con le parole "Possiamo dunque definire il valore di $R[\tau_1, \ldots, \tau_n]$ in $\mathcal{M}$ come segue" con i due item ed il testo che segue che termina con ", avremo per ogni formula atomica chiusa F di $\mathcal{L}$: $F \in T$ sse $\mathcal{M} \models F$." va sostituito con quanto segue:

  «Conformemente alla Definizione 19, per ogni variabile per predicato R di arietà $k \geqslant 1$, per ogni elemento di M^k, cioè per ogni k-upla $(\nu_1, \ldots, \nu_k)$ di termini chiusi di $\mathcal{L}$, dobbiamo dire se $(\nu_1, \ldots, \nu_k) \in R_{\mathcal{M}}$ o se invece $(\nu_1, \ldots, \nu_k) \notin R_{\mathcal{M}}$. Poniamo:

  $$(\nu_1, \ldots, \nu_k) \in R_{\mathcal{M}} \iff R(\nu_1, \ldots, \nu_k) \in T.^{18}$$

[16] In particolare quando M contiene solo formule chiuse (e quindi per qualunque teoria) questa condizione sarà sempre soddisfatta.

[17] Il fatto che $\mathcal{L}$ ed $\mathcal{L}'$ abbiano la stessa cardinalità non verrà sfruttato nella dimostrazione che segue del teorema di compattezza.

[18] Rammentiamo che, conformemente alla Definizione 12, $R(\nu_1, \ldots, \nu_k)$ è una formula atomica chiusa di $\mathcal{L}$.

Se X è una lettera proposizionale, poniamo $X_{\mathcal{M}} = 1 \iff X \in T$.

Ricordando l'Osservazione 47 p. 98, da questa definizione discende che se (per qualche $n \geqslant 0$) la formula $R(x_1, \ldots, x_n) = R(t_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, t_k(x_1, \ldots, x_n))$ è una formula atomica di $\mathcal{L}$, allora, per ogni n-upla $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ di termini chiusi di $\mathcal{L}$, valgono le equivalenze seguenti:
$\mathcal{M} \models R(\tau_1/x_1, \ldots, \tau_n/x_n) \iff$
$\mathcal{M} \models R[\tau_1, \ldots, \tau_n] \iff$
$(t_{1_{\mathcal{M}}}[\tau_1, \ldots, \tau_n], \ldots, t_{k_{\mathcal{M}}}[\tau_1, \ldots, \tau_n]) \in R_{\mathcal{M}} \iff$
$(t_1(\tau_1/x_1, \ldots, \tau_n/x_n), \ldots, t_k(\tau_1/x_1, \ldots, \tau_n/x_n)) \in R_{\mathcal{M}} \iff$
$R(t_1(\tau_1/x_1, \ldots, \tau_n/x_n), \ldots, t_k(\tau_1/x_1, \ldots, \tau_n/x_n)) \in T \iff R(\tau_1/x_1, \ldots, \tau_n/x_n) \in T$.
Si noti ora che una qualsiasi formula atomica chiusa F di $\mathcal{L}$, tale che $F \neq \mathbf{V}, \mathbf{F}$, è della forma $F = R(\tau_1/x_1, \ldots, \tau_n/x_n)$, dove $R(x_1, \ldots, x_n)$ è una formula atomica di $\mathcal{L}$, $n \geqslant 0$, e $\tau_1, \ldots, \tau_n$ sono termini chiusi di $\mathcal{L}$. Da quanto precede discende allora che $\mathcal{M} \models R(\tau_1/x_1, \ldots, \tau_n/x_n) \iff R(\tau_1/x_1, \ldots, \tau_n/x_n) \in T$. Inoltre, per l'ipotesi di finita soddisfacibilità di T, avremo $\mathbf{F} \notin T$ (e quindi per massimalità $\mathbf{V} \in T$). In definitiva, per la definizione di interpretazione appena data, avremo che, per ogni formula atomica chiusa F di $\mathcal{L}$, vale l'equivalenza $F \in T$ sse $\mathcal{M} \models F$. »

Si riprende il testo con la frase "Più generalmente, dimostreremo che per ogni formula chiusa F di $\mathcal{L} \ldots$"

- A pagina 152-153, gli enunciati delle proposizioni 16 e 17 fanno riferimento alla "teoria dei gruppi" ed alla "teoria dei campi", ma la nozione di teoria ha un senso tecnico preciso nell'ambito della nostra trattazione ed è dunque più opportuno sostituire gli enunciati delle due proposizioni con i due enunciati seguenti:

  Proposizione 16:
  « Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio del primo ordine.

  (i) La nozione di gruppo finito non è assiomatizzabile in $\mathcal{L}$.

  (ii) La nozione di gruppo infinito non è finitamente assiomatizzabile in $\mathcal{L}$.»

  Proposizione 17:
  « Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio del primo ordine.

  (i) La nozione di campo di caratteristica diversa da zero non è assiomatizzabile in $\mathcal{L}$.

  (ii) La nozione di campo di caratteristica zero non è finitamente assiomatizzabile in $\mathcal{L}$.»

- Dopo la Definizione 33 p.154, si può inserire l'osservazione seguente:

  Osservazione 8. *Dalla Definizione 33 di isomorfismo tra strutture, discende immediatamente che, se $\mathcal{M}$ ed $\mathcal{N}$ sono due strutture per il linguaggio $\mathcal{L}$ tali che φ è un isomosrfismo di $\mathcal{M}$ in $\mathcal{N}$, allora, per ogni termine $t(x_1, \ldots, x_n)$ di $\mathcal{L}$ e per ogni $a_1, \ldots, a_n \in M$, vale l'uguaglianza $\varphi(t_{\mathcal{M}}[a_1, \ldots, a_n]) = t_{\mathcal{N}}[\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)]$. La dimostrazione rigorosa è per induzione sull'altezza del termine $t(x_1, \ldots, x_n)$.*

  Questa osservazione viene utilizzata nel caso base (quello delle formule atomiche) della dimostrazione della Proposizione 18 p.154-155.

- A p. 156, una parte della dimostrazione della Proposizione 19 si può formulare più precisamente: è opportuno sostituire l'ultima parte della dimostrazione («Viceversa…») con quanto segue:

  «Viceversa, sia $f \in \mathcal{L}$ di arietà $k \geqslant 1$ un simbolo di funzione e siano $a_1, \ldots, a_k \in M$ (risp. sia c un simbolo di costante). Si ha ovviamente $f_{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_k) \in M$ (risp. $c_{\mathcal{M}} \in M$). Sia dunque $b \in M$ tale che $b = f_{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_k)$ (risp. $b = c_{\mathcal{M}}$): avremo $\mathcal{M} \models y = f(x_1, \ldots, x_k)[b, a_1, \ldots, a_k]$ (risp. $\mathcal{M} \models y = c[b]$), e dunque per ipotesi $\mathcal{N} \models y = f(x_1, \ldots, x_k)[b, a_1, \ldots, a_k]$ (risp. $\mathcal{N} \models y = c[b]$), da cui segue che $f_{\mathcal{N}}(a_1, \ldots, a_k) = f_{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_k) \in M$ (risp. $c_{\mathcal{N}} = c_{\mathcal{M}} \in M$). Sia ora $R \in \mathcal{L}$ di arietà $k \geqslant 0$ un simbolo di predicato e siano $a_1, \ldots, a_k \in M$. Per ipotesi, $\mathcal{M} \models R[a_1, \ldots, a_k] \iff \mathcal{N} \models R[a_1, \ldots, a_k]$.»

- p. 161 in basso, la dimostrazione di $\mathcal{M}^\star \subset \mathcal{N}_1$ è ridondante (va bene per costanti e funzioni, per i predicati non serve quanto scritto, che peraltro è già stato sfruttato nella dimostrazione del Lemma 10 p. 160 ed è quindi naturale che non compaia di nuovo). Sostituire il secondo item con quanto segue:

  «$\mathcal{M}^\star \subset \mathcal{N}_1$: infatti, per definizione di $\mathcal{N}_1$ vale $c_{\mathcal{N}_1} = c_{\mathcal{M}}$ per ogni simbolo di costante c di $\mathcal{L}$, e $f_{\mathcal{N}_1}(a_1, \dots, a_n) = f_{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n)$ per ogni simbolo di funzione f di arietà $n \geqslant 1$ di $\mathcal{L}_M$ (cioè di $\mathcal{L}$) e per ogni $a_1, \dots, a_n \in M$. Inoltre, ogni simbolo R di predicato di arietà $k \geqslant 1$ di $\mathcal{L}_M$ è anche un predicato di $\mathcal{L}$; e, per ogni $b_1, \dots, b_k \in |\mathcal{M}|$, valgono le equivalenze: $(b_1, \dots, b_k) \in R_{\mathcal{M}^\star} \iff (b_1, \dots, b_k) \in R_{\mathcal{M}} \iff \mathcal{M} \models R[b_1, \dots, b_k] \iff \mathcal{N}|_{\mathcal{L}} \models R[\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_k)] \iff \mathcal{N} \models R[\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_k)] \iff \mathcal{N} \models R[\psi(b_1), \dots, \psi(b_k)] \iff (\psi(b_1), \dots, \psi(b_k)) \in R_{\mathcal{N}} \iff (b_1, \dots, b_k) \in R_{\mathcal{N}_1}$. In definitiva vale dunque $R_{\mathcal{M}^\star} = R_{\mathcal{N}_1} \cap |\mathcal{M}|^k$.»

- Eliminare completamente la Nota 22 p.162.