Esercizi del corso LM410-Teoremi sulla Logica 1

Esercizi sul Capitolo 3 (Parte 2)

Esercizio 3.6 (Derivabilità) Derivare in LK le formule seguenti:

1. $(A \to B) \vee (B \to A)$, dove A e B sono formule qualsiasi
2. $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \leftrightarrow \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$, dove P e Q sono due variabili speciali per predicati di arietà 1
3. $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$, dove P e Q sono due variabili speciali per predicati di arietà 1

Esercizio 3.7 (Derivabilità)

Siano P e Q due variabili speciali per predicato di arietà 1, sia R una variabile speciale per predicato di arietà 2, e sia a una variabile speciale individuale.

1. Derivare la formula $\exists x Q(x)$ a partire dalle ipotesi $\forall x \forall y((P(x) \wedge R(x,y)) \to Q(y))$, $\forall x R(x,x)$ e $P(a)$
2. Derivare la formula $\forall x Q(x)$ a partire dalle ipotesi $\forall x \forall y((P(x) \wedge R(x,y)) \to Q(y))$, $\forall x R(a,x)$ e $P(a)$
3. Derivare la formula $\exists x \forall y R(y,x)$ a partire dalle ipotesi $\forall x \forall y((P(x) \wedge Q(y)) \to R(x,y))$, $\forall x P(x)$ e $\exists x Q(x)$
4. Derivare la formula $\exists x Q(x)$ a partire dalle ipotesi $\forall x \forall y((P(x) \wedge R(x,y)) \to Q(y))$, $\forall x \exists y R(x,y)$ e $\exists x P(x)$

Esercizio 3.8 (Derivabilità)

Sia R una variabile speciale per predicato di arietà 2.

1. Derivare $\forall y \exists x R(y,x)$ a partire dall'ipotesi $\exists x \forall y R(y,x)$. È possibile derivare $\exists x \forall y R(y,x)$ a partire dall'ipotesi $\forall y \exists x R(y,x)$?
2. Derivare $\forall x \exists y R(y,x)$ a partire dalle ipotesi $\forall x \exists y R(x,y)$ e $\forall x \forall y(R(x,y) \to R(y,x))$
3. Dimostrare che una relazione su di un insieme M che sia simmetrica, transitiva, e tale che ogni elemento di M sia in relazione con almeno un elemento di M, è una relazione riflessiva.

Esercizio 3.9 (Derivabilità) Derivare in LK le formule seguenti:

1. $\exists x(P(x) \to \forall y P(y))$, dove P è una variabile speciale per predicati di arietà 1
2. $\exists x \forall y(((P(y) \to P(x)) \to P(x)) \to P(y))$, dove P è una variabile speciale per predicati di arietà 1
3. $\exists x \forall y((Q(y) \to P(x)) \to (Q(x) \to P(y)))$, dove P e Q sono due variabili speciali per predicati di arietà 1

Esercizio 3.10 (Derivabilità) Supponiamo che:

1. Tutti i clienti hanno preso almeno un formaggio o un dolce;
2. Coloro che hanno preso un dolce hanno preso un caffè;
3. Coloro che hanno preso un caffè non hanno tutti preso un dolce.

Possiamo dedurne che qualcuno ha preso un formaggio? E che qualcuno ha preso un dolce?

Esercizio 3.11 (Derivabilità) Se in una certa città tutti i barbieri radono tutti e soli gli uomini che non radono sé stessi, cosa possiamo dedurre sul sesso dei barbieri della città?

Esercizio 3.12 (Derivabilità) Supponiamo che:

- Tutti conoscono qualcuno che conosce un iniziato
- Alberto non è un iniziato.

Se ne deduca che esiste un non-iniziato che conosce un iniziato.

Esercizio 3.13 (Il teorema di messa in forma normale prenessa)

Lo scopo dell'esercizio è dimostrare il *teorema di messa in forma normale prenessa*:

<< Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio del primo ordine. Per qualunque formula F di $\mathcal{L}$, esiste una formula G tale che:

- è derivabile il sequente $\vdash F \leftrightarrow G$;
- G è in *forma normale prenessa*: $G = Q_1x_1 \dots Q_nx_nG'$, $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ e G' è una formula senza quantificatori;
- se la variabile z occorre libera in G, allora z occorre libera anche in F. >>

1. Siano P e Q due predicati unari. Dimostrare (in LK) che la formula $\forall xP(x) \vee Q(y)$ equivale a $\forall x(P(x) \vee Q(y))$ e che la formula $\exists xP(x) \vee Q(y)$ equivale a $\exists x(P(x) \vee Q(y))$. Osservare che se z occorre libera in $\forall x(P(x) \vee Q(y))$ (risp. in $\exists x(P(x) \vee Q(y)))$, cioè se $z = y$, allora z occorre libera anche in $\forall xP(x) \vee Q(y)$ (risp. $\exists xP(x) \vee Q(y)$).

   Dimostrare che invece non è derivabile né $(\forall xP(x) \vee Q(x)) \to \forall x(P(x) \vee Q(x))$ né $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall xP(x) \vee Q(x))$. Per dimostrarlo, si potrà sfruttare l'equivalenza tra la derivabilità di una formula e quella della sua chiusura universale, e quindi, nel caso specifico, il fatto che se fosse derivabile $(\forall xP(x) \vee Q(x)) \to \forall x(P(x) \vee Q(x))$ lo sarebbe anche $\forall v((\forall xP(x) \vee Q(v)) \to \forall x(P(x) \vee Q(x)))$, e se fosse derivabile $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall xP(x) \vee Q(x))$ lo sarebbe anche $\forall v(\forall x(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall xP(x) \vee Q(v)))$.

2. Generalizzando la prima parte del Punto 1, dimostrare che se A e B sono due formule e se x non appare libera in B, allora sono derivabili i sequenti $\vdash (\forall xA \vee B) \leftrightarrow \forall x(A \vee B)$ e $\vdash (\exists xA \vee B) \leftrightarrow \exists x(A \vee B)$. Osservare che se z occorre libera in $\forall x(A \vee B)$ (risp. in $\exists x(A \vee B)$), allora z occorre libera anche in $\forall xA \vee B$ (risp. $\exists xA \vee B$).

3. Generalizzare al caso di un numero di variabili qualsiasi e dimostrare che date A e B due formule tali che $x_1, \dots, x_n$ (risp. $y_1, \dots, y_m$) non appaiono libere in B (risp. in A), per ogni scelta di quantificatori $Q_1, \dots, Q_n$ e $P_1, \dots, P_m$ ($Q_i, P_j \in \{\exists, \forall\}$) è derivabile

   $$\vdash (Q_1x_1 \dots Q_nx_nA \vee P_1y_1 \dots P_my_mB) \leftrightarrow Q_1x_1 \dots Q_nx_nP_1y_1 \dots P_my_m(A \vee B)$$

   ed anche

   $$\vdash (Q_1x_1 \dots Q_nx_nA \wedge P_1y_1 \dots P_my_mB) \leftrightarrow Q_1x_1 \dots Q_nx_nP_1y_1 \dots P_my_m(A \wedge B).$$

   Osservare che se z occorre libera in $Q_1x_1 \dots Q_nx_nP_1y_1 \dots P_my_m(A \vee B)$ (risp. $Q_1x_1 \dots Q_nx_nP_1y_1 \dots P_my_m(A \wedge B)$), allora z occorre libera anche in $Q_1x_1 \dots Q_nx_nA \vee P_1y_1 \dots P_my_mB$ (risp. $Q_1x_1 \dots Q_nx_nA \wedge P_1y_1 \dots P_my_mB$).

4. Dimostrare il teorema di messa in forma normale prenessa per induzione sulla complessità della formula F, sfruttando il Punto 3.

5. Sfruttando il Punto 2, fornire una dimostrazione alternativa della derivabilità della formula $\exists x(U(x) \to \forall yU(y))$.

6. Applicazione del teorema di messa in forma normale prenessa. Siano D, E, F, G, H, I formule senza quantificatori. Trovare, per le formule seguenti, una forma normale prenessa:

   a) $(A \land B) \to C$, dove $A = \exists x(\forall y D(x, y) \to E(x))$, $B = \forall x(F(z, x) \to \exists y G(x, y))$, $C = \exists y(H(y, x) \to \neg I(y, z))$;

   b) $A \to B$, dove $A = \exists x(\forall y H(x, y) \to D(x))$ e $B = \exists x(E(y) \to (F(y, x) \to \neg G(y, z)))$.