Polarisation des preuves classiques et renversement

Myriam QUATRINI et Lorenzo TORTORA DE FALCO

M. Q. : Institut de Mathématiques Discrètes, 163 Avenue de Luminy 13288 Marseille
L. T. : Univ. Paris 7-CNRS, 2 Place Jussieu 75252 Paris cedex 5

Résumé. Nous introduisons une nouvelle contrainte syntaxique sur les preuves du calcul des séquents classiques η-contraint et polarisé. Nous obtenons ainsi un fragment complet et stable et pour lequel le plongement P en logique linéaire est une décoration.

Polarization of classical proofs and reversion

Abstract. We introduce a new constraint on the proofs of the classical sequent calculus LK^{η}_{pol} (η-constrained and polarized). We obtain a complete and stable fragment for which the P embedding into linear logic is a decoration.

Introduction

Après que le contenu calculatoire de la logique classique fut mis en évidence par Felleisen [2], de nombreuses tentatives de présentation constructive de la logique classique ont été réalisées. Dans les systèmes LC ([3]) et FD ([4]), des choix et des restrictions ont été opérés pour se débarrasser des situations conflictuelles, responsables du non-déterminisme de l'élimination des coupures de LK (le calcul des séquents classique de Gentzen).

L'approche de Danos, Joinet et Schellinx [1], consiste à rajouter à LK les informations manquantes: ils considèrent un calcul des séquents LK^{tq} où les règles sont celles de LK, et où l'on distingue les connecteurs multiplicatifs (notés $\wedge_m$ et $\vee_m$) et les connecteurs additifs (notés $\wedge_a$ et $\vee_a$). Aux formules classiques est ajoutée une *couleur* t ou q qui permettra, lors d'éventuels conflits structurels, de choisir laquelle des deux sous-preuves prémisses d'une règle de coupure duplique ou efface l'autre: c'est celle qui contient l'occurrence *attractive* de la formule de coupure (l'occurrence de couleur q à droite ou de couleur t à gauche du symbole $\vdash$). Aux connecteurs multiplicatifs est ajoutée une "orientation" qui permettra de dépasser d'éventuels conflits logiques. Il est ainsi possible de définir une procédure déterministe d'élimination des coupures : la tq-normalisation. Pour montrer que cette normalisation est munie des bonnes propriétés (normalisation forte, confluence, existence d'une sémantique dénotationnelle), Danos, Joinet et Schellinx utilisent un plongement de LK^{tq} en logique linéaire (LL) qui, étant une décoration, permet aux preuves classiques d'hériter des propriétés de la normalisation de LL.

La recherche de liens de plus en plus étroits entre LK^{tq} et la logique linéaire conduit à des fragments de LK^{tq} (des sous-systèmes complets pour la prouvabilité classique et clos

par tq-normalisation) pour lesquels il existe des plongements (ou, mieux, des décorations) de plus en plus économes en exponentielles.
Le système LK^η est le fragment qui vérifie la η-contrainte: "toute formule attractive et active dans une règle logique irréversible ou dans une négation est principale". Dans ce système, l'arbitraire de l'orientation des connecteurs multiplicatifs a disparu.
D'autre part, la dichotomie entre les formules t et q de LK^{tq} se reflète dans la dichotomie entre les exponentielles "?" et "!" de LL. La propriété "être de type ?" (resp. "être de type !") (une formule A a cette propriété lorsqu'elle vérifie $?A \vdash A$ (resp. $A \vdash !A$)) est préservée par les connecteurs & et $\wp$ (resp. $\oplus$ et $\otimes$). De plus, les formules de type ? et celles de type ! sont duales par rapport à la négation linéaire. Ces remarques suggèrent la restriction de LK^η à LK^η_{pol}: le fragment "polarisé" de LK^η dans lequel la négation échange les couleurs et toute formule réversible à droite (resp. à gauche) est de couleur t (resp. q). Dans ce fragment, l'arbitraire du choix des couleurs est circonscrit aux formules atomiques et on peut définir un plongement P de LK^η_{pol} dans LL, particulièrement économe en exponentielles, mais qui n'est pas une décoration.

Après avoir analysé les obstacles au fait que le plongement P soit une décoration, nous proposons une nouvelle contrainte, ρ, sur les preuves de LK^η_{pol}. Cette contrainte est complète et stable (au premier ordre) par tq-élimination des coupures, ce qui nous permet de considérer le fragment $LK^{\eta,\rho}_{pol}$ de LK^η_{pol}, pour lequel on prouve que P est une décoration (ce qui signifie, notamment, que P fournit à $LK^{\eta,\rho}_{pol}$ une sémantique dénotationnelle). De plus, nous en déduisons que P est également une sémantique pour LK^η_{pol}, ce qui nous permet d'affirmer que les connecteurs binaires sont commutatifs dans LK^η_{pol} puisque les preuves établissant la commutativité sont interprétées dans P par des isomorphismes.

Le système LK^η_{pol} et le plongement P

Dorénavant LK^η_{pol} désignera bien le système précédemment défini, mais sans les règles introduisant les quantificateurs du second ordre. Le plongement P est défini en utilisant la propriété de préservation du type ? (resp. !) par les connecteurs & et $\wp$ (resp. $\oplus$ et $\otimes$), et par $P(X^t) = ?X$ (resp. $P(X^q) = !X$) pour toute formule atomique X^t (resp. X^q).

On obtient ainsi une traduction de LK^η_{pol} dans LL, telle que toute formule A^q (resp. A^t) vérifie $P(A) \vdash !P(A)$ (resp. $?P(A) \vdash P(A)$), ce qui permet de traduire le séquent $\vdash \Gamma^t, \Delta^q$ de LK^η_{pol} par le séquent $\vdash P(\Gamma), ?P(\Delta)$ de LL.
Remarque. La négation pour LK^η_{pol} est involutive et on peut donc considérer, ce que nous ferons dans la suite du texte, un calcul des séquents monolatère.
Remarque. Le plongement P des preuves de LK^η_{pol} dans les preuves de LL qui découle de la traduction P ci-dessus (défini règle par règle) n'est pas une décoration, la traduction de certaines règles nécessitant l'introduction de coupures :

- lorsqu'on traduit une règle irréversible dont une des formules actives est non attractive, ou une coupure S_1 dans laquelle la formule attractive est non atomique, il est nécessaire d'appliquer une promotion avant la règle linéaire correspondante. Or, rien ne garantit que le contexte soit bien modalisé. Il est donc nécessaire, avant de faire la promotion, d'appliquer un certain nombre de dérélictions. Une fois que la règle linéaire a été appliquée, il s'agit de retrouver la conclusion, sans les modalités ajoutées. On procède alors à des coupures avec les preuves de $\vdash P(A), !P(A)^\perp$, pour chaque formule A réversible du contexte;

- puisqu'une formule A réversible (donc t) n'est pas préfixée par un "?" dans la traduction, on doit lui appliquer une déréliction avant de pouvoir lui appliquer une règle structurelle. Afin de retrouver la traduction convenue du séquent, on effectue une coupure avec la preuve de $\vdash P(A), !P(A)^{\perp}$.

Un système restreint : $LK_{pol}^{\eta,\rho}$

Nous introduisons une nouvelle contrainte ρ dans le système LK_{pol}^{η}, qui consiste à exiger que la preuve soit renversée [1] , chaque fois que cela est nécessaire.

• *Les contextes réversibles* : Soit Γ un multi-ensemble de formules classiques polarisées et soit $A \in \Gamma$. Lorsque le séquent $\vdash \Gamma$ est prémisse d'une règle R dans laquelle A est active, on dit que A est dans un contexte réversible (resp. non réversible) si dans $\Gamma \backslash A$ il y a au moins une (resp. il n'y a aucune) formule réversible.

• *Les règles interdites par ρ* : Les règles suivantes sont interdites par ρ : les règles structurelles sur les formules réversibles, les règles irréversibles ou les coupures S_1 (plus préciseément les coupures dans lesquelles la formule attractive n'est principale ni dans une règle logique ni dans un axiome) dont une occurrence active et non attractive est dans un contexte réversible.

• *Les preuves ρ-contraintes* : Une preuve π de LK_{pol}^{η} est dite ρ-contrainte lorsqu'elle ne contient pas de règles interdites par ρ.

Définition [complexité de réversibilité d'une formule] *Soit A une formule classique, polarisée. La complexité de réversiblité de A que l'on note c_A est définie de la façon suivante : si A est un atome ou de couleur q, $c_A = 0$; si $A = B \vee_m C$ ou $B \wedge_a C$ alors $c_A = c_B + c_C + 1$.*

Définition[complexité de réversibilité d'un séquent] *La complexité de réversibilité d'un séquent $\Gamma = \{A_O, \ldots, A_n\}$ est égale à 0 si Γ est vide et à la somme des complexités de réversibilité des occurrences de formules qui composent Γ sinon : $c_\Gamma = c_{A_0} + \ldots + c_{A_n}$.*

Théorème [complétude] *Soit π une preuve de LK_{pol}^{η}. Il existe, dans LK_{pol}^{η}, une preuve ρ-contrainte π^ρ de même conclusion que π.*

Par induction sur le nombre de règles interdites par ρ. On considére une règle R de π interdite par ρ et telle que la sous-preuve (resp. les sous-preuves) de π prémisse(s) de R ne contienne(nt) aucune autre règle interdite. Si R est une règle structurelle sur une formule réversible A, alors on procède par induction sur la complexité de réversibilité de A pour renverser par rapport à A la sous-preuve de π ayant R comme dernière règle. Si R est une coupure S_1 ou une règle irréversible, alors on raisonne par induction sur la complexité du contexte (resp. l'union des contextes) de la formule (resp. des formules) non attractive(s) active(s) dans R.

Remarque. Bien sûr, pour une preuve π de LK_{pol}^{η} donnée, la preuve ρ-contrainte obtenue par la méthode ci-dessus décrite, n'est pas unique. Mais les preuves obtenues par cette méthode ne diffèrent entre elles que par l'emplacement de certaines règles réversibles. Ainsi, une fois plongées dans LL par P, toutes les preuves obtenues ont la même sémantique.

---

[1]Soit π une preuve de LK^{tq} ayant la formule réversible A parmi ses conclusions, on dit que π^r est la renversée de π par rapport à A, lorsque π^r est obtenue à partir de π en remplaçant les axiomes $A \vdash A$ par des η-preuves de A, en effaçant les règles logiques introduisant A, en appliquant aux sous-formules principales de A les règles structurelles de π ayant A comme formule active, et en rajoutant une règle logique introduisant A comme dernière règle.

Remarque. Soit π une preuve de LK^{η}_{pol}, la preuve de LL obtenue en ayant ρ-contraint π et puis appliqué le P-plongement, est la même (à l'emplacement des réversibles près) que celle que l'on obtient en appliquant P à π et puis en éliminant les coupures introduites par le plongement.

Théorème[stabilité] *La contrainte ρ dans LK^{η}_{pol} est stable par élimination des coupures.*

Il s'agit de traiter tous les différents cas possibles de coupure c. Lorsque c est S_1, la vérification est immédiate. Dans le cas d'une coupure logique ou S_2, un raisonnement cas par cas sur les couleurs des sous-formules principales de la formule de coupure, permet de déduire le résultat.

Proposition *Le P-plongement est une décoration de $LK^{\rho,\eta}_{pol}$.*

Proposition *Le P-plongement induit une sémantique dénotationnelle pour LK^{η}_{pol}.*

On utilise ici la proposition 45 p.53 de [1] et le fait que P est une sémantique dénotationnelle pour $LK^{\rho,\eta}_{pol}$.

Remarque. Cette étude permet de retrouver la sémantique des espaces de corrélation qui sont l'ingrédient de base utilisé par J-Y Girard pour construire le système LC ([3]). En effet, puisque une preuve de LK^{η}_{pol} et les preuves ρ-contraintes qui lui sont associées ont la même P-sémantique et que ρ-contraindre signifie transférer les opérations structurelles des formules réversibles sur leurs sous-formules principales, la P-sémantique de LK^{η}_{pol} revient à considérer que les espaces cohérents associés aux formules réversibles sont munis d'opérations sémantiques de contraction, d'affaiblissement et de contexte de promotion, définies en effectuant ces mêmes opérations sur les sous-formules principales. C'est à dire que l'on interprète les formules réversibles par des *espaces de corrélation négatifs*

Remerciements: Nous tenons à remercier Jean-Baptiste Joinet pour son écoute attentive et pour ses suggestions.

References

[1] **V. Danos, J. B. Joinet, H. Schellinx, 1995.** *A new deconstructive logic: linear logic*, to appear in the Journal of Symbolic Logic.

[2] **M. Felleisen, 1987.** *A syntactic theory of sequentiel control*, Theor. Comp. Scien. 52.3.

[3] **J.-Y. Girard, 1991.** *A new Constructive Logic: Classical Logic*, Mathematical Structures in Computer Science, 1(3): 255-296.

[4] **M. Parigot, 1991.** *Free Deduction: an analysis of computation in classical logic.* In Voronkov, A., editor, Russian Conference on Logic Programming, Springer Verlag. LNAI 592: 361-380. .