LOGICA Lezioni di primo livello

V. MICHELE ABRUSCI

ANNO ACCADEMICO 2008-2009

Università Roma Tre, Facoltà di Lettere e Filosofia, via Ostiense 234 Roma

abrusci@uniroma3.it

Capitolo 1

I temi della logica

La logica si occupa di ciò che è *comune* a tutte le branche della nostra attività conoscitiva, e quindi a tutte le discipline scientifiche.

Ci sono concetti o temi che si ritrovano in tutte le branche della nostra attività conoscitiva, in tutte le discipline scientifiche; su alcuni di essi parleremo in questo primo capitolo poichè saranno l'oggetto di questo corso di logica:

- *proposizioni, dimostrazioni e refutazioni, dibattiti*
- *classi, operazioni, proprietà, relazioni*
- *strategie, programmi, macchine, reti*
- *l'organizzazione delle conoscenze*

1.1 Proposizioni, dimostrazioni, refutazioni, dibattiti

In ciascuna branca della nostra attività conoscitiva ci sono *proposizioni* con le quali vengono espresse conoscenze o ipotesi, *dimostrazioni* con le quali le proposizioni vengono stabilite, *refutazioni* con le quali le proposizioni vengono respinte, *dimostrazioni* con le quali le proposizioni vengono ricavate da proposizioni poste come ipotesi, *dibattiti* nei quali le proposizioni vengono discusse. Le dimostrazioni da ipotesi sono particolari *processi*, e le proposizioni servono anche a descrivere le *specifiche* dei processi.

Entro le proposizioni scopriamo talvolta anche *componenti* che sono comuni a tutte le nostre attività conoscitive e che sono quindi oggetto della logica, ed entro le dimostrazioni, le refutazioni e i dibattiti scopriamo talvolta *regole, inferenze, mosse* che sono anch'esse comuni a tutte le nostre attività conoscitive e dunque sono oggetto della logica.

La presenza della *dualità* caratterizza profondamente le proposizioni, le dimostrazioni e le refutazioni, i dibattiti ed è alla base della loro dinamica; un aspetto importante di tale dinamica è la *comunicazione* tra le dimostrazioni.

1.1.1 Preliminari ed esempi

1.1.1.1 Proposizioni

Le proposizioni sono anche dette *enunciati, asserzioni, affermazioni.*

D'ora in poi, con le lettere A, B, C, ... indicheremo *generiche* proposizioni.

La logica non si occupa delle singole proposizioni, ciascuna delle quali può appartenere (e talvolta esclusivamente) ad una specifica branca della conoscenza; quel che è comune a tutte le branche della conoscenza è il *concetto generale di proposizione* e questo concetto generale è dunque un *concetto logico*, un concetto del quale si occupa la logica.

La logica non è l'unica disciplina che si occupa delle proposizioni (ad esempio di proposizioni si occupa anche la linguistica), ma la logica e solo la logica si occupa delle proposizioni in quanto presenti ed usate nelle dimostrazioni, nelle refutazioni e nei dibattiti. Pertanto in logica (ma non in linguistica) due proposizioni che svolgono lo stesso ruolo nelle dimostrazioni, nelle refutazioni e nei dibattiti (ad esempio, una proposizione in lingua italiana e la sua traduzione in un'altra lingua) sono indistinguibili e sono ritenute *uguali.*

Con queste delimitazioni, la logica dovrà dare innanzitutto una risposta precisa alla questione: cos'è una proposizione?

Esempi

- "Carlo cammina",
- "oggi piove",
- "Socrate è un uomo",
- "$2 + 3$ è uguale a 5",
- "Giovanni è amico di Antonio",

- “Giovanni non è un bravo studente”,
- “il numero 0 non è successore di alcun numero naturale”,
- “Carlo cammina e Antonio legge il giornale”,
- “Maria mangia la pizza o il gelato”,
- “Antonio studia oppure guarda la tv”,
- “se due numeri naturali qualsiasi sono uguali, allora hanno uguale anche il loro successore”,
- “se due numeri naturali qualsiasi hanno uguale il loro successore, allora sono uguali”,
- “tutti gli uomini camminano”,
- “qualsiasi uomo è mortale”,
- “ogni cosa ha una causa”,
- “un uomo cammina”,
- “c’è uno studente bravo”,
- “qualche studente è assente”,
- per ogni triangolo rettangolo, la somma dei quadrati costruiti sui due cateti è uguale al quadrato costruito sull’ipotenusa,
- “dalle olive si ottiene l’olio”,
- “la lampadina è insieme al lampadario”,
- “si può scegliere tra carne e pesce”,
- “è disponibile carne o pesce”.

Esercizi
Si considerino altri esempi di proposizioni.

1.1.1.2 Dimostrazioni e refutazioni

Le *dimostrazioni* servono a *stabilire* proposizioni, mentre le *refutazioni* servono a *respingere* proposizioni. Una dimostrazione che stabilisce una proposizione A è detta *dimostrazione di* A. Una refutazione che respinge una proposizione A è detta *refutazione di* A.

In genere, ci possono essere più dimostrazioni della stessa proposizione (fra esse alcune più semplici, alcune più complesse), e potrebbe non esserci alcuna dimostrazione di una data proposizione; e analogamente ci possono essere più refutazioni della stessa proposizione (fra esse alcune più semplici, alcune più complesse), e potrebbe non esserci alcuna refutazione di una data proposizione.

Ciò che si deve intendere come dimostrazione o come refutazione di una proposizione dipende dalla branca della nostra conoscenza, dalla singola disciplina scientifica in cui essa si colloca.

Alcune dimostrazioni e alcune refutazioni consistono in calcoli o osservazioni o constatazioni o esperienze, ma ci sono dimostrazioni e refutazioni che non consistono in calcoli o osservazioni o constatazioni o esperienze e che spesso sono chiamate *ragionamenti*.

La logica non si occupa di ciascuna singola dimostrazione, o di ciascuna singola refutazione, ma del *concetto generale di dimostrazione* e del *concetto generale di refutazione* che sono entrambi *concetti logici*, e deve dare una loro esplicazione, una loro definizione.

Un tema della logica è anche quello del rapporto tra *dimostrazione* e *refutazione* di una stessa proposizione. Ad esempio, è compito della logica affrontare queste questioni: ci può essere sia una dimostrazione che una refutazione di una stessa proposizione? ci può essere sempre, per una stessa proposizione, o una dimostrazione o una refutazione?

Possiamo adottare alcune simboli (ormai comuni a livello internazionale) per parlare di dimostrazioni e di refutazioni:

- per dire che una cosa x è una dimostrazione di una proposizione A, possiamo scrivere:

$$x : \vdash A$$

- per dire che una cosa x è una refutazione di una proposizione A, possiamo scrivere:

$$x : A \vdash$$

- per dire che una proposizione A è dimostrabile (ossia che A ammette una dimostrazione, ha una dimostrazione), possiamo scrivere:

$$\vdash A$$

- per dire che una proposizione è refutaboile (ossia che A ammette una refutazione, ha una refutazione), possiamo scrivere:

$$A \vdash$$

Esempi

- *Dimostrazioni* che sono calcoli o osservazioni o constatazioni o esperienze:
  - il calcolo della somma di 2 e 3 è sostanzialmente una dimostrazione della proposizione "$2 + 3$ è uguale a 5";
  - l'osservazione che Carlo sta camminando è sostanzialmente una dimostrazione della proposizione "Carlo cammina".
- Le dimostrazioni delle seguenti proposizioni non sono calcoli, osservazioni, constatazioni, esperienze:
  - "ogni cosa ha una causa",
  - "il numero 0 non è successore di alcun numero naturale",
  - "se due numeri naturali hanno uguale il loro successore, allora sono uguali".

Esempi di refutazioni di proposizioni

- *Refutazioni* che sono calcoli o osservazioni o constatazioni o esperienze:
  - il calcolo della somma di 2 e di 3 è sostanzialmente una refutazione della proposizione "$2 + 3$ è diverso da 5";
  - l'osservazione che Carlo sta camminando è una refutazione della proposizione "Carlo sta fermo".
- Le refutazioni delle seguenti proposizioni non sono calcoli, osservazioni, constatazioni, esperienze:
  - "qualche cosa non ha una causa",
  - "il numero 0 è successore di qualche numero naturale",

– "c'è un numero naturale che ha due immediati successori diversi".

Esercizi

- Si pensi a cosa può essere ritenuto come dimostrazione delle proposizioni considerate in 1.1.1.1.

- Si pensi a cosa può essere ritenuto come refutazione delle proposizioni considerate in 1.1.1.1.

1.1.1.3 Dimostrazioni da ipotesi

In ciascuna branca della nostra attività conoscitiva ci sono *dimostrazioni* con le quali viene stabilito un certo tipo di *relazione* tra più proposizioni, senza fornire direttamente dimostrazioni o refutazioni di quelle proposizioni.

Fra queste dimostrazioni, che non consistono in calcoli o in osservazioni o in constatazioni o in esperienze, hanno un ruolo centrale quelle che vengono chiamate *dimostrazioni da ipotesi.*

Si chiama *dimostrazione di una conclusione (o tesi)* A *da un'ipotesi (o premessa)* B qualcosa che stabilisce questo tipo di relazione tra la proposizione A e la proposizione B:

- permette di trasformare ogni *dimostrazione* di B in una *dimostrazione* di A, *ricavando* la conclusione A dall'ipotesi B;

- permette di trasformare ogni *refutazione* di A in una *refutazione* di B, *riconducendo* la conclusione A all'ipotesi B.

Una dimostrazione di una proposizione A dalla proposizione B è anche detta *derivazione* di A da B, o *ragionamento* che porta alla proposizione A sulla base della proposizione B, o *argomentazione* a favore di A sulla base di B.

In una dimostrazione di una conclusione A da un'ipotesi B ogni singolo passo compiuto per ricavare la conclusione A dall'ipotesi B o per ricondurre la conclusione A all'ipotesi B viene chiamato *inferenza.*

Si chiama *dimostrazione di* A *dalle ipotesi* $A_1, ..., A_n$ una dimostrazione di A dall'ipotesi costituita dalla *congiunzione* delle proposizioni $A_1, ..., A_n$ ossia da "A_1 e ...e A_n".

Si noti che:

- quando una dimostrazione di A da B consiste nel ricavare la conclusione A dall'ipotesi B essa consiste anche nel ricondurre la conclusione A all'ipotesi

B: basta guardare all'indietro il processo compiuto nel ricavare A da B, ed esso diventa un processo che riconduce A a B;

- quando una dimostrazione di A da B consiste nel ricondurre la conclusione A all'ipotesi B essa consiste anche nel ricavare la conclusione A dalla premessa B: anche in questo caso basta guardare all'indietro il processo compiuto nel ricondurre A a B, ed esso diventa un processo che ricava A da B.

Dunque, una dimostrazione di una proposizione A da una proposizione B è qualcosa che è sempre sia il ricavare A da B sia il ricondurre A a B, e può essere *presentata* o come la ricavazione di A da B o come la riconduzione di A a B.

La presentazione di una dimostrazione di A da B come la ricavazione della conclusione A dall'ipotesi B è detta "*presentazione dall'alto verso il basso*" (ossia dall'ipotesi alla conclusione); la presentazione di una dimostrazione di A da B come la riconduzione della conclusione A all'ipotesi B è detta "*presentazione dal basso verso l'alto*" (ossia dalla conclusione all'ipotesi).

La presentazione dall'alto verso il basso di una dimostrazione di A da B è quella che viene preferita quando la dimostrazione *è stata trovata* e *viene comunicata*. Ma la presentazione dal basso verso l'alto di una dimostrazione di A da B è quella che corrisponde, in generale, al processo con cui quella dimostrazione è stata trovata: si è partiti dal problema A e lo si è ricondotto al problema B.

Possiamo adottare alcuni simboli per parlare delle dimostrazioni da ipotesi:

- per dire che una cosa x è una dimostrazione di una proposizione A dall'ipotesi B, possiamo scrivere:

$$x : B \vdash A$$

- per dire che una cosa x è una dimostrazione di una proposizione A dalle ipotesi $A_1, ..., A_n$, possiamo scrivere:

$$A_1, ..., A_n \vdash A$$

- per dire che una proposizione A è dimostrabile dall'ipotesi B (cioè, che può esistere o esiste una dimostrazione di A da B), possiamo scrivere:

$$B \vdash A$$

- per dire che una proposizione A è dimostrabile dalle ipotesi $A_1, ..., A_n$ (cioè, che può esistere o esiste una dimostrazione di A da $A_1, ..., A_n$), possiamo scrivere:

$$A_1, ..., A_n \vdash A$$

Esempi

- Mostriamo innanzitutto una dimostrazione immediata, ossia con una sola inferenza, della proposizione (conclusione, tesi) "Socrate è mortale" dalla proposizione (premessa, ipotesi) "Tutti gli uomini sono mortali e Socrate è un uomo". La dimostrazione consiste nell'atto mentale immediato che ci fa passare dall'ipotesi alla conclusione, o che ci fa ricondurre la conclusione all'ipotesi. Infatti:
  - se qualcuno possiede una dimostrazione di "Tutti gli uomini sono mortali e Socrate è un uomo" immediatamente è in grado di ottenere una dimostrazione di "Socrate è mortale"
  - se qualcuno possiede una refutazione di "Socrate è mortale" immediatamente è in grado di ottenere una refutazione di "Tutti gli uomini sono mortali e Socrate è un uomo".

  Come si vede, questa dimostrazione non consiste nello stabilire o nel rigettare la conclusione o l'ipotesi, ma solo nel porre una relazione tra ipotesi e conclusione. Tale dimostrazione
  - può essere presentata dall'alto verso il basso: sia "Tutti gli uomini sono mortali e Socrate è un uomo", dunque "Socrate è mortale";
  - può essere presentata dal basso verso l'alto: la questione "Socrate è mortale" si riconduce alla questione "Tutti gli uomini sono mortali e Socrate è un uomo".
- Mostriamo ora un esempio più complesso di dimostrazione, la dimostrazione della proposizione (conclusione, tesi) "Il diluvio non scopre" dalla congiunzione delle proposizioni (premesse, ipotesi):
  1. "Il diluvio asciuga e deterge".
  2. "Tutto ciò che non bagna vola e sorge".
  3. "Tutto ciò che pubblicizza stupisce e non scopre".

4. “Il sole non bagna e non asciuga”.

5. “Tutto ciò che deterge bagna e pubblicizza”.

La dimostrazione può essere così presentata *dall'alto verso il basso* (ossia dalla congiunzione delle ipotesi alla conclusione).

«Dalla congiunzione delle ipotesi seguono le ipotesi 1, 3 e 5. Dall'ipotesi 1 segue la proposizione “Il diluvio deterge”. Da questa proposizione e dall'ipotesi 5 segue la proposizione “Il diluvio bagna e pubblicizza”, dalla quale segue la proposizione “Il diluvio pubblicizza”. Da quest'ultima proposizione e dalla ipotesi 3 segue la proposizione “Il diluvio stupisce e non scopre”, dalla quale segue la proposizione “Il diluvio non scopre”».

Come si vede, questa dimostrazione non è la dimostrazione nè la refutazione di “Il diluvio non scopre”, e non è la dimostrazione nè la refutazione della congiunzione delle ipotesi 1-5, ma è solo la ricavazione della proposizione “Il diluvio non scopre” dalla congiunzione delle premesse 1-5.

Vediamo come si potrebbe presentare questa dimostrazione di “il diluvio non scopre” dalle ipotesi 1-5 *dal basso verso l'alto* (ossia dalla conclusione alla congiunzione delle ipotesi).

«La proposizione “Il diluvio non scopre” segue dalla proposizione “Il diluvio stupisce e non scopre” che a sua volta segue da “Il diluvio pubblicizza” e dall'ipotesi 3. Ma a sua volta la proposizione “Il diluvio pubblicizza” segue dalla proposizione “Il diluvio bagna e pubblicizza” che a sua volta segue dall'ipotesi 5 e dalla proposizione “Il diluvio deterge”. Ma a sua volta la proposizione “Il diluvio deterge” segue dall'ipotesi 1. le tre ipotesi 1, 3 e 5 seguono dalla congiunzione delle ipotesi 1-5».

Rendiamoci conto che questa dimostrazione ha le caratteristiche che deve avere una dimostrazione di una proposizione da una proposizione.

- Se qualcuno possedesse (non succederà, ma possiamo comunque immaginarlo) una dimostrazione della congiunzione delle ipotesi 1-5, ossia una dimostrazione di ciascuna delle ipotesi 1-5, allora la dimostrazione di “Il diluvio non scopre” dalle ipotesi 1-5 produrrebbe una dimostrazione della proposizione “Il diluvio non scopre”.

- Se qualcuno possedesse una refutazione della proposizione “Il diluvio non scopre”, allora la dimostrazione di “Il diluvio non scopre” dalle ipotesi 1-5 produrrebbe una refutazione della congiunzione delle ipotesi 1-5.

Nella dimostrazione sopra presentata sono *inferenze*:

1. il passaggio dalla congiunzione delle ipotesi all'ipotesi 1,
2. il passaggio dalla congiunzione delle ipotesi all'ipotesi 3,
3. il passaggio dalla congiunzione delle ipotesi all'ipotesi 5,
4. il passaggio dall'ipotesi 1 alla proposizione "Il diluvio deterge",
5. il passaggio dalla ipotesi 5 e da "Il diluvio deterge" alla proposizione "Il diluvio bagna e pubblicizza",
6. il passaggio dalla proposizione "Il diluvio bagna e pubblicizza" alla proposizione "Il diluvio pubblicizza",
7. il passaggio dall'ipotesi 3 e dalla proposizione "Il diluvio pubblicizza" alla proposizione "Il diluvio stupisce e non scopre",
8. il passaggio dalla proposizione "Il diluvio stupisce e non scopre" alla proposizione "Il diluvio non scopre".

- Altri esempi di dimostrazioni da ipotesi possono essere trovati nei testi di matematica, e anche in qualunque serio trattato di qualunque disciplina.

Esercizi

Si cerchino esempi di dimostrazioni da ipotesi, e per ciascuna di esse:

- si individuino la conclusione e l'ipotesi,
- si individuino le inferenze
- si cerchi di presentarla da entrambe le direzioni (dall'alto verso il basso, dal basso verso l'alto),
- ci si renda conto che trasforma ogni eventuale dimostrazione dell'ipotesi in una dimostrazione della conclusione e ogni eventuale refutazione della conclusione in una refutazione della congiunzione delle ipotesi.

1.1.1.4 Processi e dimostrazioni da ipotesi

Ciascuna dimostrazione da ipotesi può essere considerata come un *processo con input e output*.

Consideriamo un processo qualsiasi (ad esempio, un processo economico, un programma, una strategia, un calcolo): *input* in un tale processo è chiamato - secondo i casi - ciò che in quel processo viene usato o ciò che in quel processo viene atteso dall'esterno, e *output* in un tale processo è chiamato - secondo i casi - ciò che in quel processo viene ottenuto o ciò che con quel processo viene fornito all'esterno. *Input* può essere anche detto - secondo i casi - punto di partenza, ciò che si riceve dall'esterno, ciò che viene usato. *Output* può essere anche detto - secondo i casi - punto finale, ciò che si ottiene, ciò che si produce, ciò che si dà all'esterno.

Una dimostrazione da ipotesi può essere vista come un processo con input e output, in due maniere (la prima maniera corrisponde alla presentazione dall'alto verso il basso, e la seconda maniera corrisponde alla presentazione dal basso verso l'alto, e nessuna delle due si impone sull'altra):

- come un processo in cui *input* è l'ipotesi e *output* è la conclusione, un processo che usa l'ipotesi come input per ricavare la conclusione come output, un processo che una volta ricevuta una dimostrazione dell'ipotesi come input è in grado di produrre una dimostrazione della conclusione come output;

- come un processo in cui *input* è la conclusione e *output* è l'ipotesi, un processo che riconduce la conclusione come input all'ipotesi come output, un processo che una volta ricevuta una refutazione della conclusione come input è in grado di produrre come output una refutazione dell'ipotesi.

Quindi, le dimostrazioni sono processi del tutto particolari, processi con due possibilità di lettura. Così, la distinzione, entro una dimostrazione da ipotesi, di ciò che è *input* e di ciò che è *output* dipende dal modo con cui la dimostrazione è considerata, dal punto di vista con cui la dimostrazione è considerata.

Ci sono, oltre le dimostrazioni da ipotesi, anche altri processi in cui ciò che è input e ciò che è output dipende dal punto di vista con cui il processo è considerato.

Esempi

- *Input e output in processi*

  - In un programma per calcolare la somma di due numeri, *input* è una coppia di numeri naturali, *output* è un numero naturale; meglio, *input* è la costruzione di due numeri naturali, e *output* è la costruzione di un numero naturale, in quanto possiamo dire che quel programma *produce una costruzione di un numero naturale dalla costruzione di due numeri naturali.*

– Nel processo che avviene al bar quando si va a prendere un caffè che costa 1 euro, *input* è il pagamento di 1 euro, *output* è l'acquisto di una tazza di caffè, in quanto possiamo dire che quel processo *produce l'acquisto di una tazza di caffè dal pagamento di 1 euro.* Nell'individuare input e output in questo modo, abbiamo guardato il processo dal punto di vista del cliente. Se lo stesso processo viene visto dal punto di vista del padrone del bar, *input* è la tazza di caffè e *output* è 1 euro, o meglio *input* è la vendita di una tazza di caffè e *output* è l'incasso di 1 euro, in quanto possiamo dire che quel processo *produce l'incasso di 1 euro dalla vendita di una tazza di caffè.*

- *Input e output in una dimostrazione da ipotesi.* Nella dimostrazione di "Il diluvio non scopre" dalla congiunzione delle proposizioni 1-5, presentata in 1.1.1.3:

  – quando vediamo quella dimostrazione dall'alto verso il basso, come qualcosa che *produce una dimostrazione di "Il diluvio non scopre" da una dimostrazione della congiunzione di 1-5* , *input* è la congiunzione delle proposizioni 1-5, e *output* è la proposizione "Il diluvio non scopre", meglio, *input* è una dimostrazione della congiunzione delle proposizioni 1-5, e *output* è una dimostrazione di "Il diluvio non scopre";

  – quando vediamo quella dimostrazione dal basso verso l'alto, come qualcosa che *produce una refutazione della congiunzione di 1-5 da una refutazione di "Il diluvio non scopre"* , *input* è la proposizione "Il diluvio non scopre" e *output* è la congiunzione delle proposizioni 1-5, meglio, *input* è una refutazione di "Il diluvio non scopre" e *output* è una refutazione della congiunzione delle proposizioni 1-5,

Esercizi

Per esercizio, si considerino altri processi e in ciascuno di essi - ponendosi da un punto di vista - si fissi cosa è *input* e cosa è *output.*

1.1.1.5 Specifica di un processo e specifica di una dimostrazione da ipotesi

Quando si ha una dimostrazione di una proposizione A da una proposizione B si dice che "*da B si ottiene A mediante una dimostrazione*" o più semplicemente "*da B si dimostra A*" (si può anche dire "*A si ottiene da B mediante una dimostrazione*" o "*A si dimostra da B*").

Dicendo "*da B si ottiene A mediante una dimostrazione*" o più semplicemente "*da B si dimostra A*" (si può anche dire "*A si ottiene da B mediante una dimostrazione*" o "*A si dimostra da B*"), con una *proposizione* si sta descrivendo la *specifica* di un processo, la specifica di una dimostrazione da ipotesi.

La specifica di un processo (economico, commerciale, informatico, elettrico,...) e in particolare la specifica di una dimostrazione da ipotesi, consiste nell'indicarne i punti di partenza e i punti di arrivo.

Attraverso proposizioni, dunque, si descrivono le specifiche dei processi.

La specifica di un qualunque processo può essere descritta anche con una proposizione della forma

"da B si ottiene A"

dove B e A sono proposizioni che esprimono la prima i punti di partenza del processo e la seconda i suoi punti di arrivo.

Esempi

- Queste tre proposizioni stanno descrivendo la stessa specifica di un processo economico:
  - "pagando 10.000 euro si acquista un'auto",
  - "l'evento descritto nella proposizione «vengono pagati 10.000 euro» produce l'evento descritto nella proposizione «è stata acquistata un'auto»",
  - "dalla proposizione «vengono pagati 10.000 euro» si ottiene la proposizione « è stato acquistata un'auto»".
- Queste tre proposizioni stanno descrivendo la stessa specifica di un processo di ragionamento:
  - "45.000 x 33.000 è uguale a 33.000 x 45.000 per la proprietà della commutatività del prodotto"

– "dalla verità della proposizione che esprime la commutatività del prodotto dipende la verità della proposizione «45.000 x 33.000 è uguale a 33.000 x 45.000»"

– "dalla proposizione «dati due numeri, cambiando l'ordine dei fattori, il loro prodotto non cambia» si ottiene la proposizione «45.000 x 33.000 è uguale a 33.000 x 45.000»"

Esercizi

- Si cerchino altri esempi di proposizioni che descrivono specifiche dei processi.

- Si cerchi di esprimere specifiche dei processi nella forma "da B si ottiene A" dove B e A sono proposizioni.

1.1.1.6 Dibattiti

In ogni branca della nostra attività conoscitiva si svolgono *dibattiti*, detti anche *dispute*, dove si discutono proposizioni.

In generale un dibattito è un gioco di proposizioni.

In un dibattito ci devono essere (almeno) due soggetti, l'uno nel ruolo di *proponente* e l'altro nel ruolo di *opponente*.

Un dibattito è avviato dal *proponente* mediante la proposta di una proposizione A che egli vuol sostenere, alla quale l'*opponente* risponde con una proposizione B che intende contrapporre alla proposizione A e che è detta la *contraddittoria* della proposizione A.

Ad esempio, un dibattito può essere avviato in questa maniera: il *proponente* esprime la proposizione "Tutti gli uomini sono mortali", l'*opponente* risponde con la proposizione "Qualche uomo è mortale" che è la contraddittoria della proposizione espressa dal proponente.

L'avvio di un dibattito, dunque, avviene con due *mosse*: la prima compiuta dal proponente, la seconda dall'opponente.

Il seguito di un dibattito avviene alternando una *mossa* del proponente e una *mossa* dell'opponente.

Successivamente alle mosse iniziali, le *mosse* del proponente o dell'opponente consistono nel richiedere qualcosa (passare dall'implicito all'esplicito) relativamente alla proposizione espressa dall'altro o nell'esplicitare lui stesso qualcosa di implicito nella proposizione espressa dall'altro, o nell'abbandono.

Le singole mosse del proponente o dell'opponente possono essere guidate da una *strategia* che permette di rispondere a ciascuna mossa dell'avversario.

La logica non si occupa dei singoli dibattiti ma del *concetto generale di dibattito.*

Esempio

Un dibattito può cominciare con la proposizione "Ogni uomo che è intelligente riesce a comprendere le regole della logica e riesce a usarle correttamente" enunciata dal *proponente.*

L'*opponente* risponde con la proposizione "C'è qualche uomo che è intelligente ma non riesce a comprendere le regole della logica o non riesce a usarle correttamente".

Il proponente replica chiedendo chi è tale uomo, e quindi invitando l'opponente a farsi proponente di qualcosa.

L'opponente risponde con la proposizione "Carlo è intelligente ma non riesce a comprendere le regole della logica o non riesce a usarle correttamente".

Il proponente replica chiedendo di scegliere tra le due proposizioni "Carlo non riesce a comprendere le regole della logica" "Carlo non riesce a usare correttamente le regole della logica" , di nuovo invitando l'opponente a farsi proponente di qualcosa.

L'opponente sceglie "Carlo non riesce a usare correttamente le regole della logica".

Il proponente replica mostrando - in un continuo scambio con l'opponente - come ogni prova di "Carlo è intelligente" possa trasformarsi in una prova della proposizione "Carlo riesce a usare correttamente le regole della logica".

L'opponente abbandona.

La strategia del proponente sembra essere quella di chiedere all'avversario di specificare ciò che è implicito nella contraddittoria di "Ogni uomo che è intelligente riesce a comprendere le regole della logica e riesce a usarle correttamente", e di mostrare:

- che ogni prova di "a è intelligente" possa essere trasformata in una prova di "a riesce a comprendere le regole della logica " , quando l'opponente ha esplicitato la contraddittoria nella forma "a è intelligente ma non riesce a comprendere le regole della logica",

- che ogni prova di "a è intelligente" possa essere trasformata in una prova di "a riesce a usare correttamente le regole della logica" , quando l'opponente ha esplicitato la contraddittoria nella forma "a è intelligente ma non riesce a usare correttamente le regole della logica".

Esercizio
Si considerino particolari dibattiti, suddividendoli in mosse, e cercando di capire qual è la strategia seguita dal proponente o dall'opponente.

1.1.2 Altri concetti logici

1.1.2.1 Componenti logiche delle proposizioni, proposizioni logiche

Una proposizione può contenere alcune componenti, e fra le componenti di una proposizione può esserci ancora una proposizione.

Una proposizione è detta *composta* quando contiene qualche altra proposizione fra le sue componenti; le proposizioni che non sono composte sono dette *semplici.*

Entro le proposizioni ci possono essere componenti che sono comuni a tutte le branche della nostra attività conoscitiva: anche tali componenti sono oggetto della logica ed esprimono *concetti logici.*

In particolare, oggetto della logica sono queste componenti delle proposizioni che si trovano in ogni ambito della nostra conoscenza, che sono presenti nella lingua italiana e nelle diverse lingue (in tutte?) e che esprimono *concetti logici*:

- "non", che esprime il concetto di *negazione*;
- "e", che esprime il concetto logico di *congiunzione*;
- "oppure", "o", che esprimono il concetto di *disgiunzione*;
- "se ... allora ...", che esprime il concetto di *implicazione*;
- "ogni", "tutti", "qualsiasi", "per tutti", "per ogni", che esprimono il concetto di *quantificazione universale*;
- "qualche", "c'è", "per almeno uno", "per qualcuno", che esprimono il concetto di *quantificazione esistenziale*;
- "si ottiene", "causa", che esprimono il concetto di *causalità* o *dipendenza;*
- "è insieme a", che esprime il concetto di *coesistenza* o *compatibilità*;
- "si può scegliere tra", che esprime il concetto di *scelta da tra più risorse*;

- "è presente uno tra", che esprime il concetto di *disponibilità tra più risorse*;

Si usa chiamare *connettivi* la negazione, la congiunzione, la disgiunzione, l'implicazione e altri concetti logici simili, mentre si usa chiamare *quantificatori* la quantificazione universale, la quantificazione esistenziale e altri concetti logici simili.

Una proposizione che è costituita soltanto da concetti logici è detta *proposizione logica* poichè essa è comune a tutte le branche della nostra attività conoscitiva; le proposizioni logiche sono anche esse oggetto della logica.

Un esempio di proposizione logica è: "per ogni proposizione A, A oppure la negazione di A".

Esercizi

- Si individuino le proposizioni semplici fra le proposizioni sopra considerate.
- Si individuino i concetti logici presenti nelle proposizioni sopra considerate.

1.1.2.2 Regole logiche e inferenze logiche

Quando in una proposizione ci sono concetti logici, la sua dimostrazione o la sua refutazione possono talvolta fare uso di tali concetti in certe maniere che sono comuni a tutte le branche della nostra conoscenza: tali maniere sono chiamate *regole logiche*.

La logica si occupa delle regole logiche di dimostrazione, e delle regole logiche di refutazione, ossia delle regole di dimostrazione o di refutazione che sono comuni a tutte le branche della nostra conoscenza.

Una dimostrazione di una proposizione A ottenuta soltanto mediante regole logiche è detta *dimostrazione logica* di A.

Analogamente, una refutazione di una proposizione A ottenuta soltanto mediante regole logiche è detta *refutazione logica* di A.

Quando nelle proposizioni presenti in una dimostrazione da ipotesi ci sono concetti logici, alcune inferenze possono essere compiute sulla base unicamente di tali concetti logici, ossia secondo regole logiche, e sono dette allora *inferenze logiche*.

La logica si occupa delle *inferenze logiche*, ossia di quelle inferenze che si svolgono in ogni ambito della nostra attività conoscitiva.

Quando in una dimostrazione da ipotesi tutte le inferenze sono inferenze logiche, la dimostrazione è detta *dimostrazione logica* da ipotesi.

La logica si occupa delle *dimostrazioni logiche* da ipotesi.

Esempi

- *Una regola logica di dimostrazione.* Una dimostrazione di una proposizione quale "Carlo cammina e Antonio legge il giornale" dove c'è il concetto logico di congiunzione ("e") può consistere nel presentare due dimostrazioni, una per la proposizione "Carlo cammina" e un'altra per la proposizione "Antonio legge il giornale"; ma lo stesso vale per la dimostrazione di qualunque proposizione che sia della forma "A e B" dove A e B sono proposizioni appartenenti a qualunque ambito della nostra conoscenza. Ossia, sembra che al concetto di congiunzione sia associata la regola: una coppia di dimostrazioni, una per la proposizione A e un'altra per la proposizione B, costituisce una dimostrazione della proposizione "A e B".

- *Una regola logica di refutazione.* Una refutazione di una proposizione quale "Carlo cammina oppure Antonio legge il giornale" dove c'è il concetto logico di disgiunzione ("oppure") può consistere nel presentare due refutazioni, una per la proposizione "Carlo cammina" e un'altra per la proposizione "Antonio legge il giornale"; ma lo stesso vale per la refutazione di qualunque proposizione che sia della forma "A oppure B" dove A e B sono proposizioni appartenenti a qualunque ambito della nostra conoscenza, ossia sembra che al concetto di disgiunzione sia associata la regola: una coppia di refutazioni, una per la proposizione A e un'altra per la proposizione B, costituisce una refutazione della proposizione "A oppure B".

- *Dimostrazioni logiche da ipotesi.* Nelle dimostrazioni da ipotesi che abbiamo presentato sopra si ha l'impressione che tutte le inferenze compiute dipendono soltanto dai concetti logici presenti nelle proposizioni, e che quindi esse siano dimostrazioni logiche da ipotesi. Infatti,

  - l'inferenza dall'ipotesi 1 "Il diluvio asciuga e deterge" alla proposizione "Il diluvio deterge" sembra dipendere soltanto dal concetto logico "e": si rifletta sul fatto che sarebbe una inferenza anche il passaggio dalla proposizione "il professore insegna e riceve" alla proposizione "il professore riceve", e anche il passaggio da una qualunque proposizione della forma *"a V_1 e V_2"* dove a è un soggetto qualsiasi e V_1 e V_2 sono due verbi intransitivi qualsiasi alla proposizione "a V_2".
  - Anche l' inferenza dalla proposizione "Il diluvio deterge" e dalla ipotesi "Tutto ciò che deterge bagna e pubblicizza" alla proposizione "Il

diluvio bagna e pubblicizza" sembra dipendere soltanto dal concetto logico "tutto ciò che": si rifletta sul fatto che sarebbe un'inferenza anche il passaggio da "Il professore riceve" e "Tutto ciò che riceve piace e rifulge" alla proposizione "Il professore piace e rifulge", e anche il passaggio da una qualunque proposizione della forma "a V_1" e da qualunque proposizione della forma "Tutto ciò che V_1 V_2 e V_3" alla proposizione "a V_2 e V_3" dove a è un soggetto qualsiasi e V_1 V_2 e V_3 sono verbi qualsiasi.

Esercizi

- Si individuino le regole logiche nelle dimostrazioni e nelle refutazioni che sono state considerate negli esercizi precedenti.

- Si individuino le inferenze logiche nelle dimostrazioni da ipotesi che sono state considerate negli esercizi precedenti.

1.1.2.3 Mosse logiche

Entro un dibattito alcune mosse possono dipendere unicamente da *concetti logici* e sono dette *mosse logiche*: le mosse logiche sono oggetto della logica.

Un dibattito costituito soltanto da mosse logiche è un *dibattito logico*.

Anche una strategia può essere una *strategia logica*, quando tutte le mosse che essa prevede dipendono unicamente dai concetti logici.

Esempi

Ci possiamo rendere conto che è mossa logica rispondere alla proposizione "Ogni uomo che è intelligente riesce a comprendere le regole della logica e riesce a usarle correttamente" con la proposizione "C'è qualche uomo che è intelligente ma non riesce a comprendere le regole della logica o non riesce a usarle correttamente" come sua contraddittoria. Infatti, essa dipende soltanto dai concetti logici di "ogni", "qualche", "e", "o", "non": qualunque proposizione della forma "ogni a che è V_1, è V_2 ed è V_3" ha come sua contraddittoria la proposizione "qualche a è V_1, ma non è V_2 oppure non è V_3", dove a è un soggetto qualsiasi e V_1 V_2 e V_3 sono verbi qualsiasi.

Esercizi

Si individuino le mosse logiche nei dibattiti considerati negli esercizi precedenti.

1.1.3 Dualità

1.1.3.1 Proposizioni duali, proposizioni logicamente duali

Ci sono, talvolta, due punti di vista alternativi fra loro, sotto i quali uno stesso contenuto informativo, uno stesso oggetto della nostra conoscenza, può essere considerato ed espresso.

Ecco un primo elenco di tali coppie di punti di vista alternativi sotto cui si può considerare ed esprimere uno stesso contentuto informativo:

- "cliente", "commerciante" (uno stesso evento commerciale può essere descritto dal punto di vista del cliente, o dal punto di vista del commerciante);
- "output", "input" (uno stesso dato può essere considerato come risultato di un processo che lo genera, o come un punto di partenza di un altro processo che lo usa).

La coppia "giusto" / "sbagliato" può essere ritenuta una coppia di punti di vista alternativi. Di sicuro la coppia "vero"/ "falso" è una coppia di punti di vista alternativi: se ho davanti a me un contentuto informativo lo posso esprimere con una proposizione "vera" (se assumo il punto di vista di "dire la verità", ma lo posso esprimere con una proposizione "falsa" (se assumo il punto di vista di "dire la falsità").

La coppia "dimostrazione" / "refutazione" è una coppia di punti di vista alternativi. Una stessa cosa che può essere considerata *dimostrazione* di una proposizione può anche essere considerata *refutazione* di un'altra proposizione, e una stessa cosa che può essere considerata *refutazione* di una proposizione può essere considerata dimostrazione di un'altra proposizione. Pertanto una dimostrazione o una refutazione è qualcosa che può essere considerato come dimostrazione (di una proposizione) se si assume il punto di vista della dimostrazione (ossia, stabilire una proposizione), e può invece essere considerata una refutazione (di un'altra proposizione) se si assume il punto di vista della refutazione (ossia, refutare una proposizione).

Dimostrazione e refutazione sono due punti di vista alternativi, e appartengono alla logica, e dunque costituiscono una coppia *logica* di punti di vista alternativi.

Due proposizioni A e B sono dette *duali* rispetto ad una coppia di punti di vista alternativi quando esprimono lo stesso contenuto una sotto un punto di vista e l'altra sotto l'altro punto di vista.

Di fatto, nei linguaggi, in corrispondenza di una coppia di punti di vista alternativi, accanto a una proposizione che esprime un contenuto informativo sotto uno dei due punti di vista c'è sempre anche una proposizione che lo esprime sotto l'altro punto di vista, e quindi per ogni contenuto informativo c'è una coppia di proposizioni duali che esprimono quel contenuto sotto i due punti di vista.

D'altra parte è naturale che ogni volta che esprimiamo qualcosa lo facciamo sotto un particolare punto di vista. Ed è altrettanto naturale, quando con una proposizione si è espresso un contenuto informativo sotto un particolare punto di vista, voler esprimere lo stesso contenuto informativo sotto il punto di vista *alternativo*. Pertanto, dati due punti di vista alternativi, ad ogni proposizione che esprime qualcosa secondo uno dei due punti di vista è naturalmente associata un'altra proposizione che esprime lo stesso contenuto sotto l'altro punto di vista. Cambiare due volte il punto di vista fra due punti di vista alternativi vuol dire riornare al punto di vista iniziale: pertanto, se abbiamo espresso qualcosa sotto un punto di vista mediante una proposizione A e poi cambiando il punto di vista abbiamo espresso lo stesso contenuto informativo mediante una proposizione B, qualora ancora cambiamo il punto di vista lo stesso contenuto informativo sarà espresso ancora dalla proposizione A.

Due proposizioni A e B sono dette *logicamente duali* quando sono *duali rispetto alla coppia di punti di vista "dimostrazione"/"refutazione"*, ossia quando

- ogni dimostrazione di una delle due proposizioni è una refutazione dell'altra

- ogni refutazione di una delle due è una dimostrazione dell'altra.

Due proposizioni logicamente duali esprimono in sostanza la stessa cosa *sotto due punti di vista alternativi*, quello della *dimostrazione* e quello della *refutazione*.

Si osservi che, se A e B sono *logicamente duali* e se A e C sono *logicamente duali*, le due proposizioni B e C -anche se linguisticamente differenti - sono indistinguibili, sono *uguali* per la logica poichè si comportano nello stesso modo nelle dimostrazioni e nelle refutazioni: hanno le stesse dimostrazioni (che sono le refutazioni di A) ed hanno le stesse refutazioni (che sono le dimostrazioni di A). Dunque, ciascuna proposizione A forma una coppia di proposizioni logicamente duali con una sola proposizione, una sola proposizione che però può essere formulata linguisticamente in varie maniere.

Quando A e B sono una coppia di proposizioni logicamente duali, A viene chiamata *duale logico di* B e B viene chiamata *duale logico di* A.

Conveniamo, per nostra utilità, di indicare il duale logico di una proposizione A con la notazione

$$\sim A$$

.

Possiamo riformulare in questa maniera quanto abbiamo detto sopra sul rapporto tra due proposizioni che sono logicamente duale:

- se $x: \ \vdash A$ allora $x: \ \sim A \vdash$ (se una cosa è dimostrazione di A allora è anche refutazione di $\sim A$)
- se $x: A \vdash$ allora $x: \ \vdash \sim A$ (se una cosa è refutazione di A allora è anche dimostrazione di $\sim A$)
- se $x: \ \vdash \sim A$ allora $x: A \vdash$ (se una cosa è dimostrzione di $\sim A$ allora è anche refutazione di $\sim A$)
- se $x: \ \sim A \vdash$ allora $x: \ \vdash A$ (se una cosa è refutazione di $\sim A$ allora è anche una dimostrazione di A)

Si noti che il duale logico del duale logico di una proposizione A è proprio la stessa proposizione A : ossia, $\sim\sim A$ è esattamente A.

Quando il proponente in un dibattito sostiene una proposizione, nello stesso dibattito l'opponente sostiene una proposizione che abbiamo chiamata la sua contraddittoria e che è proprio il duale logico della proposizione sostenuta dal proponente. Pertanto, il duale logico di una proposizione A è la proposizione sostenuta dall'opponente di un dibattito nel quale il proponente sostiene A.

Usualmente, nel linguaggio, una proposizione e la *sua negazione* sono una coppia di proposizioni *logicamente duali.*

Dunque, se si considera una proposizione, si ha che ogni sua dimostrazione è refutazione della sua negazione, ogni sua refutazione è dimostrazione della sua negazione, ogni dimostrazione della sua negazione è una sua refutazione, ogni refutazione della sua negazione è una sua dimostrazione.

Esempi

- *Coppie di proposizioni duali* rispetto alla coppia di punti di vista alternativi "vero"/"falso":

- "$2+3$ è uguale a 5", "$2+3$ è diverso da 5";
- "Socrate è mortale", "Socrate è immortale";
- "ogni cosa ha una causa", "qualche cosa non ha una causa";

- *Coppie di proposizioni duali* rispetto alla coppia di punti di vista alternativi "cliente"/"commerciante":
  - "è stato pagato 1 euro", "è stato incassato 1 euro"
  - "è stata acquistata un'auto", "è stata venduta un'auto"
  - "si può scegliere tra una bevanda calda ed una bevanda fredda", "si offre una bevanda calda o una bevanda fredda"

- *Coppie di proposizioni logicamente duali*
  - la coppia di proposizioni "$2+3$ è uguale a 5" e "$2+3$ è diverso da 5",
  - la coppia di proposizioni "Ogni cosa ha una causa" e "Qualche cosa non ha una causa",
  - la coppia di proposizioni "Socrate è mortale" e "Socrate è immortale",
  - la coppia di proposizioni "Tutti gli uomini sono mortali e Socrate è un uomo" e "Qualche uomo è immortale oppure Socrate non è uomo"

Esercizi

- Si indaghi sul perchè le coppie di proposizioni duali mostrate negli esempi sono duali rispetto a una coppia di punti di vista alternativi ("vero"/"falso", oppure "cliente"/ "commerciante"), e si trovino altre coppie di proposizioni duali rispetto a questi punti di vista alternativi.

- Si indaghi perchè, in ciasucna delle coppie di proposizioni logicamente duali mostrate negli esempi, ogni dimostrazione di una delle due proposizioni è una refutazione dell'altra e ogni refutazione di una delle due proposizioni è una dimostrazione dell'altra.

- Si cerchino altri esempi di coppie di proposizioni logicamente duali, ossia duali rispetto alla coppia di punti di vista alternativi "dimostrazione" e "refutazione".

1.1.3.2 Dualità logica e dimostrazioni da ipotesi

Ci si può rendere conto che ogni dimostrazione di una conclusione da un'ipotesi è anche una dimostrazione del duale logico dell'ipotesi dal duale logico della conclusione, ossia *ogni dimostrazione di A da B è anche una dimostrazione del duale logico di B dal duale logico di A.* Usando le convenzioni che abbiamo adottato, si può dire:

$$\text{se } x : B \vdash A \text{ allora } x :\ \sim A \vdash \sim B$$

Infatti, una dimostrazione di A da B trasforma ogni refutazione di A in una refutazione di B e ogni dimostrazione di B in una dimostrazione di B, ossia trasforma ogni dimostrazione del duale logico di A in una dimostrazione del duale logico di B e ogni refutazione del duale logico di B in una dimostrazione del duale logico di A, e dunque è una dimostrazione del duale logico di B dal duale logico di A.

Pertanto, se le proposizioni A e D sono logicamente duali, e le proposizioni B e C sono anch'esse logicamente duali, allora *ogni dimostrazione di A da B è una dimostrazione di C da D* e *ogni dimostrazione di C da D è una dimostrazione di A da B.*

Ossia, quando le proposizioni A e D sono logicamente duali, e le proposizioni B e C sono anch'esse logicamente duali;

- la lettura dall'alto al basso di una dimostrazione di A da B (come trasformare una dimostrazione di B in una dimostrazione di A) è la lettura dal basso verso l'alto di una dimostrazione di C da D (come trasformare una refutazione di C in una refutazione di D),

- la lettura dal basso verso l'alto di una dimostrazione di A da B (come trasformare una refutazione di A in una refutazione di B) è la lettura dall'alto al basso di una dimostrazione di C da D (come trasformare una dimostrazione di D in una dimostrazione di C).

Così, la distinzione, entro una dimostrazione da ipotesi, di ciò che è *input* e di ciò che è *output* dipende dal modo con cui la dimostrazione è considerata, dal punto di vista con cui la dimostrazione è considerata. Ci sono due punti di vista, nessuno dei quali si può imporre all'altro.

La presenza della dualità permette di rappresentare una dimostrazione da ipotesi in una maniera che è indipendente dai due punti di vista (dall'alto verso il basso ossia qualcosa che trasforma dimostrazioni, dal basso verso l'alto ossia qualcosa che trasforma refutazioni).

Un'idea di interazione tra due cose è quella secondo la quale l'uso (l'assenza) di una delle due comporta l'ottenimento (la presenza) dell'altra. Con questa idea di interazione, dimostrare l'interazione tra due cose sisgnifica far vedere come la mancannza o l'uso di una delle due produce la presenza o l'ottenimento dell'altra.

Con questo senso di interazione, e rimpiazzando *uso* o *assenza* con *refutazione*, e *ottenimento* o *presenza* con *dimostrazione*, chiamiamo *dimostrazione dell'interazione tra due proposizioni* qualcosa che permette di trasformare ogni refutazione di una delle due proposizioni nella dimostrazione dell'altra proposizione.

Possiamo adottare simboli convenzionali per parlare di dimostrazione di interazione tra due proposizioni:

- per dire che una cosa x è una dimostrazione dell'interazione tra la proposizione A e una proposizione B, possiamo scrivere:

$$x \vdash A, B$$

- per dire che è dimostrabile l'interazione tra la proposizione A e una proposizione B possiamo scrivere:

$$\vdash A, B$$

Possiamo allora osservare che ogni dimostrazione di una proposizione A da un'ipotesi B, ossia ogni dimostrazione del duale logico di B dal duale logico di A, è nient'altro che una *dimostrazione dell'interazione tra la proposizione A e il duale logico di B*. Infatti, una dimostrazione di A da B

- vista dall'alto verso il basso, permette di trasformare una dimostrazione di B in una dimostrazione di A, ossia permette di trasformare una refutazione del duale logico di B in una dimostrazione di A;

- vista dal basso verso l'alto, permette di trasformare ogni refutazione di A in una refutazione di B, ossia permette di trasformare ogni refutazione di A in una dimostrazione del duale logico di B.

La dualità è qualcosa che attiene al cuore della logica, essendo presente naturalmente nelle dimostrazioni. La logica deve dunque trattare le proposizione e le dimostrazioni, in una maniera tale da non privilegiare arbitrariamente uno dei punti di vista ma di consentire di assumere volta per volta quello che si preferisce.

Una questione che la logica deve indagare è quella se una dimostrazione da ipotesi può essere sempre condotta *assumendo soltanto uno dei punti di vista*, ossia il solo punto di vista di *trasformazione di dimostrazioni* o quello di *trasformazione di refutazioni,* o se invece ci sono dimostrazioni nelle quali questi due punti di vista sono entrambi necessari. Detto altrimenti: se intendo le dimostrazioni da ipotesi come cose che trasformano *prove in prove*, sono costretto talvolta nel corso di una dimostrazione di una proposizione C da una proposizione A a considerare le dimostrazioni come cose che trasformano refutazioni in refutazioni?

Esempi

- Consideriamo il primo esempio in 1.1.3.1 ossia la dimostrazione immediata di “Socrate è mortale”da “Tutti gli uomini sono mortali e Socrate è un uomo”. Essa è anche una dimostrazione immediata di “Qualche uomo non è mortale oppure Socrate non è un uomo” da “Socrate è immortale”, poichè sono logicamente duali le coppie di proposizioni

  - “Socrate è mortale” e “Socrate è immortale”;
  - “Tutti gli uomini sono mortali e Socrate è un uomo” e “Qualche uomo non è mortale oppure Socrate non è un uomo”

  Essa è dunque una dimostrazione dell’interazione tra la proposizione “Socrate è mortale” e la proposizione “Qualche uomo non è mortale oppure Socrate non è un uomo”.

- Consideriamo il secondo esempio in 1.1.3.1 ossia la dimostrazione di “Il diluvio non scopre” dalla congiunzione delle proposizioni “Il diluvio asciuga e deterge”, “Tutto ciò che non bagna vola e sorge”, “Tutto ciò che pubblicizza stupisce e non scopre”, “Il sole non bagna e non asciuga”, “Tutto ciò che deterge bagna e pubblicizza”. Essa è anche una dimostrazione della disgiunzione delle proposizioni “Il diluvio non asciuga o non deterge”, “Qualcosa che non bagna non vola o non sorge”, “Qualcosa che pubblicizza non stupisce on scopre”, “Il sole bagna o asciuga”, “Qualcosa che deterge non bagna o pubblicizza” dall’ipotesi “Il diluvio scopre” poichè sono coppie di proposizioni logicamente duali.

- la proposizione "Il diluvio non scopre" e la proposizione "Il diluvio scopre"
- la congiunzione delle proposizioni "Il diluvio asciuga e deterge", "Tutto ciò che non bagna vola e sorge", "Tutto ciò che pubblicizza stupisce e non scopre", "Il sole non bagna e non asciuga", "Tutto ciò che deterge bagna e pubblicizza", e la disgiunzione delle proposizioni "Il diluvio non asciuga o non deterge", "Qualcosa che non bagna non vola o non sorge", "Qualcosa che pubblicizza non stupisce on scopre", "Il sole bagna o asciuga", "Qualcosa che deterge non bagna o pubblicizza"

Essa è dunque una dimostrazione dell'interazione tra la proposizione "Il diluvio non scopre" e la disgiunzione delle proposizioni "Il diluvio non asciuga o non deterge", "Qualcosa che non bagna non vola o non sorge", "Qualcosa che pubblicizza non stupisce on scopre", "Il sole bagna o asciuga", "Qualcosa che deterge non bagna o pubblicizza".

Esercizi

Per ciascuna delle dimostrazioni da ipotesi considerate negli esercizi precedenti, ci si renda conto che essa è anche

- la dimostrazione del duale logico dell'ipotesi dal duale della conclusione
- la dimostrazione dell'interazione tra la conclusione e il duale logico dell'ipotesi.

1.1.3.3 Dualità e specifiche dei processi

Quel che la dualità logica permette di scoprire sulle dimostrazioni da ipotesi è un caso particolare di ciò che la dualità permette di scoprire sulle specifiche dei processi che possono essere considerati secondo una coppia di punti di vista alternativi.

La distinzione input/output è un tema di natura logica, in quanto presente in ogni ambito della nostra conoscenza.

La distinzione in un processo tra ciò che è input e ciò che è output dipende sempre da un particolare punto di vista, e in taluni casi è naturale ammettere punti di visti alternativi.

Nelle dimostrazioni, come abbiamo visto, i possibili punti di vista sono la lettura della dimostrazione dall'alto verso il basso e quella dal basso verso l'alto, ossia la lettura della dimostrazione come trasformazione di *dimostrazioni* in *dimostrazioni* e la lettura della dimostrazione come trasformazione di *refutazioni* in *refutazioi.*

Nei processi compiuti da un sola macchina, o nei programmi rivolti per l'esecuzione a una sola macchina, la distinzione tra input e output non ammette scelta tra punti di vista: il punto di vista da assumere non può che essere quello dalla macchina che esegue il processo o che deve eseguire il programma. In particolare, se consideriamo una macchina (ad esempio una macchina calcolatrice), la distinzione tra *input* e *output* (rispetto a tale macchina) nei processi che tale macchina esegue o può eseguire è fissa.

Quando i processi sono svolti entro una rete (ad esempio, una rete di macchine), o coinvolgono più soggetti (ad esempio, più macchine), la scelta del punto di vista sotto il quale descrivere i processi è assolutamente arbitraria.Ma una volta fissato un punto di vista, in ciascun processo si può sempre distinguere tra ciò che è input e ciò che è output. Ad esempio, in una rete di macchine, il processo di calcolo della somma di due numeri eseguito da una macchina, ma visto da una macchina che riceve il risultato della somma dei due numeri, è considerato come un processo che *decompone* un numero in due numeri, ossia come un processo in cui l'input è un numero e output è una coppia di numeri.

Abbiamo visto come la descrizione di una dimostrazione *indipendentemente* dal punto di vista considerato richiede l'uso della *dualità sulle proposizioni.* La dualità è un concetto cruciale per la logica, ma anche per tutte le discipline in generale.

Anche la descrizione di un processo qualsiasi indipendentemente dal punto di vista, e ciò specialmente nei processi svolti entro una rete o nei processi che coinvolgono più soggetti, richiede l'uso della dualità.

In generale, quando si descrive la specifica di un processo nella forma

"da A si ottiene B"

dove A e B sono proposizioni, la specifica di quello stesso processo sotto il punto di vista alternativo viene descritta da una proposizione che ha la forma

"dal duale di B si ottiene il duale di A"

la specifica di quello stesso processo indipendentemente dalla scelta di uno dei due punti di vista viene descritta da una proposizione che ha la forma

"c'è interazione tra B e il duale di A".

Quindi sembra naturale dire che le proposizioni "da A si ottiene B"

"dal duale di B si ottiene il duale di A"

e

"c'è interazione tra B e il duale di A".

descrivono la specifica di uno stesso processo, le prime due sotto punti di vista alternativi e la terza indipendentemente da tali punti di vista. Pertanto, se due proposizioni A e D sono duali e sono duali anche le due proposizioni B e C, allora le proposizioni

- "da A si ottiene B ",
- "da C si ottiene D"
- "c'è interazione tra B e D "

descrivono la specifica di uno stesso processo da due punti di vista alternativi.

Esempi

- Nel primo esempio in 1.1.1.3 la descrizione è chiaramente sotto il punto di vista "cliente"; sotto il punto di vista alternativo "commerciante", la descrizione diventa

  "vendendo un'auto si incassano 10.000 euro",

  ossia

  "dalla proposizione «è stato venduta un'auto» si ottiene la proposizione «sono stati incassati 10.000 euro»",

  ossia

  "dal duale della proposizione «è stato acquistata un'auto» si ottiene il duale della proposizione «vengono pagati 10.000 euro»".

- Nel secondo esempio in 1.1.1.3 la descrizione è chiaramente sotto il punto di vista "verità"; sotto il punto di vista alternativo "falsità", la descrizione diventa "dalla falsità della proposizione «45.000 x 33.000 è uguale a 33.000 x 45.000»"discende la falsità della proposizione che esprime «la commutatività del prodotto»",

ossia

"dalla negazione di «45.000 x 33.000 è uguale a 33.000 x 45.000»" discende la negazione della «commutatività del prodotto»",

ossia

"dal duale della proposizione che esprime la «commutatività del prodotto» si ottiene il duale della proposizione «45.000 x 33.000 è uguale a 33.000 x 45.000»".

Esercizi

- Esprimi sotto il punto di vista alternativo, e indipendentemente dai punti di vista (come interazione) le specifiche dei processi considerate negli esercizi precedenti.
- Si cerchino altri esempi di coppie di proposizioni duali rispetto ai processi, e si osservi come con tali coppie di proposizioni ogni processo da A a B è un processo dal duale di B al duale di A ed è un processo di interazione tra B e il duale di A.

1.1.3.4 La comunicazione input/output tra dimostrazioni

Si ha una comunicazione input/output tra due dimostrazioni quando in una di esse una proposizione è *conclusione (output)* e nell'altra la stessa proposizione è *ipotesi (input)* . Quando si ha una prima dimostrazione che ha come conclusione una proposizione A e una seconda dimostrazione che ha come ipotesi la stessa proposizione A, le due dimostrazioni possono *comunicare* tra loro, costituendo una nuova dimostrazione nella quale l'ipotesi A della seconda dimostrazione viene rimpiazzata dall'intera prima dimostrazione.

Si tratta di qualcosa che è molto naturale: una dimostrazione con ipotesi A mostra come, da una dimostrazione di quell'ipotesi, si possa ottenere la dimostrazione della conclusione (eventualmente sotto le altre ipotesi), e in questo senso è *in attesa* di una dimostrazione dell'ipotesi A. E dunque, quando arriva una dimostrazione che ha come conclusione A, c'è comunicazione: e questa comunicazione - che produrrà alla fine una dimostrazione della conclusione senza più partire dall'ipoesi A - comincia come primo atto con il rimpiazzare l'ipotesi A con la sua dimostrazione. Si usa dire che la comunicazione input/output consiste nel *comporre* le due dimostrazioni attraverso la proposizione A.

Vediamo alcuni casi tipici di questa comunicazione input/output tra due dimostrazioni, una dimostrazione x con conclusione A e una dimostrazione y con ipotesi A.

- Se la dimostrazione x con conclusione A non ha ipotesi, ossia è una dimostrazione di A, e la dimostrazione y con ipotesi A non ha altre ipotesi ed ha come conclusione la proposizione B, allora la comunicazione input/output tra le due dimostrazioni attraverso A produce una dimostrazione di B; in tal caso si dice che la dimostrazione di B è stata ottenuta usando come *lemma* la proposizione A. Possiamo scrivere tutto questo nella maniera seguente: se $x : \vdash A$ e $y : A \vdash B$, allora la comunicazione input/output tra x e y produce una dimostrazione $z : \vdash B$.

- Se la dimostrazione x con conclusione A ha ipotesi C, e la dimostrazione y con ipotesi A non ha altre ipotesi ed ha come conclusione la proposizione B, allora la comunicazione input/output tra le due dimostrazioni attraverso A produce una dimostrazione di B dall'ipotesi C; in tal caso, si dice che la dimostrazione di B dall'ipotesi C è stata ottenuta usando come *lemma* la proposizione A dimostrata dall'ipotesi C. Possiamo scrivere tutto questo nella maniera seguente: se $x : C \vdash A$ e $y : A \vdash B$, allora la comunicazione input/output tra x e y produce una dimostrazione $z : C \vdash B$.

- Se la dimostrazione con conclusione A non ha ipotesi, ossia è una dimostrazione di A, e la dimostrazione con ipotesi A ha anche l'ipotesi D ed ha come conclusione la proposizione B, allora la comunicazione input/output tra le due dimostrazioni attraverso A produce una dimostrazione di B dall'altra ipotesi D; in tal caso si dice che la dimostrazione di B dall'ipotesi D è stata ottenuta usando come *lemma* la proposizione A. Possiamo scrivere tutto questo nella maniera seguente: se $x : \vdash A$ e $y : A, D \vdash B$, allora la comunicazione input/output tra x e y produce una dimostrazione $z : D \vdash B$.

- Se la dimostrazione con conclusione A ha ipotesi C , e la dimostrazione con ipotesi A ha anche l'ipotesi D ed ha come conclusione la proposizione B, allora la comunicazione input/output tra le due dimostrazioni attraverso A produce una dimostrazione di B dalle ipotesi C e D; in tal caso si dice che la dimostrazione di B dalle ipotesi C e D è stata ottenuta usando come *lemma* la proposizione A dimostrata dall'ipotesi C. Possiamo scrivere tutto questo nella maniera seguente: se $x : C \vdash A$ e $y : A, D \vdash B$, allora la comunicazione input/output tra x e y produce una dimostrazione $z : C, D \vdash B$

La comunicazione input/output tra due dimostrazioni avviene dunque quando una ha come conclusione una proposizione che l'altra ha come ipotesi, e produce una dimostrazione che è ottenuta rimpiazzando l'ipotesi con la sua dimostrazione.

In questa comunicazione nessuna delle due dimostrazioni ha un ruolo privilegiato. Infatti, se a prima vista potrebbe sembrare che sia la dimostrazione della conclusione A ad essere *dominante* rispetto alla dimostrazione che ha A come ipotesi poichè quest'ultima attende la prima, la dualità ci insegna che cambiando il punto di vista:

- la prima dimostrazione, quella che ha A come conclusione è una dimostrazione che ha come ipotesi il duale logico di A;
- la seconda dimostrazione, quella che ha A come ipotesi, è una dimostrazione che ha come conclusione il duale logico di A
- e dunque la comunicazione tra le due si fa attraverso il duale logico di A, ed è la seconda dimostrazione che fornisce alla prima ciò che essa attende, ossia il duale logico di A.

La comunicazione input/output tra due dimostrazioni dà luogo a una *trasformazione* di entrambe le dimostrazioni: la trasformazione consiste nel prendere dalla dimostrazione in cui A è output *soltanto quanto serve effettivamente* alla dimostrazione in cui A è output.

La comunicazione input/output tra due dimostrazioni attraverso una proposizione A appare come un caso particolare di quanto avviene in generale con processi qualsiasi.

Infatti, si ha una comunicazione input/output tra due *processi* qualsiasi, in ogni branca della nostra conoscenza, quando - osservando le loro specifiche - qualcosa in uno di essi è un *output* e nell'altro è un *input*. Due processi infatti possono comunicare tra loro quando - osservando le loro specifiche - uno di essi ha come output ciò che l'altro ha come input: un processo che *attende* energia elettrica, ad esempio, può comunicare con un processo che *fornisce* energia elettrica.

La comunicazione input/output tra due processi avviene *collegandoli* in ciò che l'uno ha come output e l'altro come input: sappiamo tutti, ad esempio, come collegare un processo che *attende* energia elettrica con un processo che *fornisce* energia elettrica.

La comunicazione input/output tra due processi dà luogo a una *trasformazione* dei due processi, a quella che spesso viene chiamata *esecuzione dei programmi*. In sostanza, l'esecuzione di un programma è l'evoluzione di una comunicazione input/output. Una volta avvenuta la comunicazione input/output tra due processi, essa si evolve nel senso che si mira a prendere dal processo che produce l'output soltanto quanto serve effettivamente nel processo che attendeva l'input: il processo che attendeva energia elettrica mira a prendere dal processo che fornisce energia elettrica soltanto quanto effettivamente serve.

Ma quando si ha la necessità di comunicare? La risposta implicita in quel che abbiamo detto è: quando qualcuno è in grado di dare ciò di cui l'altro ha effettivamente bisogno. La comunicazione è un mettersi in contatto tra colui che riceve e colui che dà, apportando una modifica ad entrambi. Si comunica, quindi, quando si ha bisogno di qualcosa e quando si è consapevoli che ciò può essere dato da altri. In altri termini si ha comunicazione, quando ciò che l'uno attende, l'altro sia in grado di fornirlo.

La logica si deve occupare della comunicazione, in generale, e ciò comporta:

- la formulazione precisa della regola che fa passare da due dimostrazioni (da due processi) che possono comunicare alla dimostrazione (al processo) che coniste nel collegamento nel punto in cui una dimostrazione (un processo) attende ciò che l'altra dimostrazione (l'altro processo) fornisce;
- lo studio di ciò che avviene successivamente, ossia di ciò che è provocato dalla comunicazione, quando questo sviluppo è determinato da concetti logici.

La logica ha come suo oggetto specifico lo studio della comunicazione input/output tra le dimostrazioni, e in generale tra i processi. Inoltre, quando la comunicazione input/output avviene attaverso una proposizione, in forza dei concetti logici ivi presenti, è compito della logica studiare l'evoluzione di tale comunicazione.

Questo studio è la parte più importante delle indagini logiche, ed è ciò che ha reso la logica una disciplina importante per l'informatica del secolo ventesimo e per l'informatica di oggi sempre più dedicata alla comunicazione all'interno delle reti dei calcolatori.

Molti risultati, in larga parte inaspettati, sono stati trovati dalla logica in questo studio della comunicazione input/output, e questi risultati hanno anche fatto emergere nuove e profonde questioni.

Esempi

- Considera la dimostrazione che ha come conclusione la proposizione "Tutti gli uomini sono mortali e Socrate è un uomo", e la dimostrazione che ha come ipotesi la stessa proposizione e come conclusione (immediata) la proposizione "Socrate è mortale". La comunicazione tra le due dimostrazione ha, come primo atto, quello di collegarle attraverso quella proposizione, ossia nel proseguire la dimostrazione che ha come conclusione "Tutti gli uomini sono mortali e Socrate è un uomo" aggiungendo l'inferenza immediata che fa arrivare a "Socrate è mortale". Lo sviluppo dela comunicazione consiste nel produrre una maniera particolare di dimostrare la proposizione "Socrate è mortale "

- Considera certe dimostrazioni che sono condotte usando *un lemma*, o passi intermedi, e cerca di vederla come ottenuta da una comunicazione input/output tra due dimostrazioni.

- Considera un processo che conduce a ottenere 10 euro, e un processo che esige per essere avviato il pagamento di 10 euro. Qiesti processi possono comunicare, e il primo atto di questa comunicazione è quello di collegarli, atto che consiste nel pagare 10 euro e così avviare il processo che attendeva il pagamento di 10 euro.

- In qualunque momento si dà a una macchina qualcosa che essa attende, si ha un esempio di comunicazione *input/output*; e ciò che la macchina (seguendo il programma che essa possiede) fa in seguito a questa comunicazione è un esempio di evoluzione di una comunicazione input/output.

Esercizi

- In ciascuna delle dimostrazioni da ipotesi considerate negli esercizi e negli esempi, rendersi conto di come si avvia la comunicazione con una dimostrazione dell'ipotesi.

- In ciascuno dei processi con specifica "da A si ottiene B", rendersi conto di come si avvia la comunicazione quando si è in presenza di A.
- si consideri l'esecuzione di qualche programma e si cerchi di vederla come evoluzione di una comunicazione input/output.

1.2 Classi, operazioni, proprietà, relazioni

In ogni branca della conoscenza si *classifica* ossia si considerano *classi*, e si considerano anche *operazioni* che fanno passare da enti di certe classi ad enti di certe altre classi (non necessariamente diverse), *proprietà* e *relazioni* che si attribuiscono ad enti di certe classi e producono proposizioni.

1.2.1 Classi

1.2.1.1 Appartenenza, elementi, definizione, uguaglianza

Le *classi* sono anche chiamate *insiemi, aggregati, collezioni.*

D'ora in avanti, le lettere $X, Y, Z, ...$ indicheranno classi.

La logica non si occupa delle singole classi, bensì:

- del concetto generale di classe e dei concetti generali che ad esso si collegano;
- delle classi che si trovano in ogni branca della nostra conoscenza, e che sono dette *classi logiche.*

Per cominciare a comprendere cosa siano le classi, osserviamo come vengono usate.

Considerata una classe, si può passare a proposizioni che asseriscono l'*appartenenza* di un ente, di una cosa, a quella classe:

"la cosa a appartiene alla classe X"

dove si ha a che fare con due concetti generali, quello di *individuo (cosa, ente)* e quello di *appartenenza*, concetti che sono oggetto della logica; una siffatta proposizione viene anche espressa in altri modi quali "la cosa a è elemento della classe X" o "la cosa a è un membro della classe X" o "la classe X contiene come suo membro (come suo elemento) la cosa a".

Enti logici sono gli enti considerati come possibili elementi di classi in ogni branca della nostra conoscenza.

Ovviamente, per essere indicata, una classe viene espressa - come vedremo negli esempi - mediante una sua denominazione ("la classe delle cose che ....") che spesso è detta *definizione* della classe. Una definizione può anche essere semplice o anche molto complessa, come nel caso dell'ultimo tra gli esmempi ("la più piccola classe che ... "). Anche il concetto generale di *definizione di una classe* è un oggetto della logica.

Spesso *due classi*, ciascuna indicata con una diversa definizione, sono dette essere *uguali*; ossia si ha la netta impressione che la diversità delle classi non è originata dall'avere definizioni diverse. La logica dovrà indagare il concetto di uguaglianza tra classi. In particolare, se due classi - definite in maniera diversa - sono uguali, si ha ovviamente che una stessa classe può avere anche *più definizioni*, cosìcome una stessa proposizione può avere anche più dimostrazioni o più refutazioni.

Esempi

- Esempi di classi:
  - la *classe* dei numeri naturali,
  - la *classe* dei numeri naturali pari,
  - la *classe* degli italiani,
  - la *classe* degli italiani che hanno la residenza a Roma,
  - la *classe* degli studenti iscritti al corso di informatica,
  - la *classe* costituita dal cognome e dal nome di uno studente, e dal voto riportato da lui nell'esame di logica,
  - la *classe* costituita dalle righe di una tabella,
  - la *classe* costituita dalle colonne di una tabella,
  - la *classe* costituita dalle righe e dalle colonne di una tabella, ossia la tabella stessa
  - la *classe* dei numeri successori dei numeri naturali,
  - la più piccola classe che contiene il numero 0 e che con ogni suo elemento contiene anche il suo successore..
- Esempi di classi logiche
  - la classe delle dimostrazioni
  - la classe delle refutazioni

  - la classe delle proposizioni

- Esempi di asserzioni di appartenenza:

  - "2 *appartiene* alla classe dei numeri naturali",
  - "4 *appartiene* alla classe dei numeri naturali pari",
  - "Napolitano *appartiene* alla classe degli italiani",
  - "Napolitano *appartiene* alla classe degli italiani che hanno la residenza a Roma".

Esercizi

- Si considerino altri esempi di classi
- Si formulino asserzioni di appartenenza relativamente alle classi consderate
- Si cerchi di definire una stessa classe con più definizioni diverse.

1.2.1.2 Proposizioni sulle classi: inclusione, separazione, finito, infinito

Sulle classi si formano abitualmente alcuni tipi di proposizioni, quali:

- "la classe Y è parte della classe X" o , e la sua negazione "la classe Y non è parte della classe X", dove si ha a che fare con il concetto generale di *parte* , concetto che è oggetto della logica;
- "la classe X e la classe Y sono disgiunte (separate)" e la sua negazione "la classe X e la classe Y non sono disgiunte (separate)", dove si ha a che fare con il concetto generale di *separazione (essere classi disgiunte)*, concetto che è oggetto della logica;
- "la classe X è finita" e la sua negazione "la classe X è infinita", dove si ha a che fare con il concetto generale di *finito* o *infinito*, che sono concetti logici.

Talvolta, la proposizione "la classe Y è parte della classe X" e la sua negazione "la classe Y non è parte della classe X" vengono espresse rispettivamente da: 'la classe X contiene la classe Y", 'la classe X non contiene la classe Y".

Si ha spesso l'idea che la proposizione "la classe X e la classe Y sono disgiunte (separate)" possa essere espressa anche con la proposizione "la classe X e la classe

Y non hanno elementi in comune", e che la sua negazione "la classe X e la classe Y non sono disgiunte (separate)" possa essere espressa anche con la proposizione "la classe X e la classe Y hanno elementi in comune". La logica dovrà chiarire se e come questa impressione sia confermata.

Si ha spesso l'impressione che la proposizione "la classe X è finita" possa essere espressa anche con la proposizione "la classe X ha un numero finito di elementi". La logica dovrà chiarire se e come questa impressione sia confermata.

Le classi finite con nessun elemento sono dette *vuote*. Le classi finite con un solo elemento sono dette *singoletti*. Le classi finite con al più due elementi o con esattamente due elementi sono dette *coppie*. Le classi finite con al più tre elementi o con esattamente tre elementi sono dette *triple*. E, in generale, quando una classe finita ha al più n elementi o esattamente n elementi, essa è detta n*-pla*.

Esempi

- Esempi di proposizioni ritenute vere sulle classi, e per le quali esiste una dimostrazione all'interno delle rispettive discipline:
  - "la classe degli italiani che hanno la residenza a Roma *è parte* della classe degli italiani"
  - "la classe dei professori non è parte della classe degli europei"
  - "la classe dei numeri pari è disgiunta (separata) dalla classe dei numeri dispari"
  - "la classe dei professori non è disgiunta (separata) dalla classe dei politici"
  - "la classe dei cittadini italiani è finita"
  - "la classe dei numeri naturali è infinita"
  - "la classe dei numeri naturali pari è infinita"
- Esempio di una tripla: la *classe* fatta dal cognome e dal nome di uno studente, e dal voto riportato da lui nell'esame di logica.
- Esempio di una n-*pla*: la riga di una tabella con n colonne.

Esercizi

Si considerino alcune delle classi usate in qualche branca della nostra conoscenza, si facciano proposizioni su queste classi nello stile di quelle sopra indicate, e in particiolare si distinguano le classi finite e quelle infinite, e si mostrino alcuni esempi di coppie, di triple e di quadruple.

1.2.1.3 Classi ordinate

Talvolta, in una classe, gli elementi sono disposti in un *ordine* che si ritiene importante e strettamente collegato alla classe stessa: in questo caso, tale classe si dice *classe ordinata*.

Una classe ordinata con due elementi è detta *coppia ordinata*, una classe ordinata con tre elementi è detta *tripla ordinata*, e in generale una classe ordinata con n elementi è detta n*-pla ordinata*.

La logica si occupa del concetto generale di *classe ordinata* e del concetto generale di *ordine* che è in esso implicito.

Esempi

- Quando si deve dividere il numero 24 per il numero 3, o quando si deve dividere due numeri naturali qualsiasi, si ha a che fare con una *coppia ordinata* di numeri naturali quale la coppia fatta dal numero 24 e dal numero 3, poichè questa coppia deve essere distinta dalla coppia formata dal numero 3 e dal numero 24, ossia in questa coppia il numero 24 è il *primo* elemento e il numero 3 è il secondo elemento.

- Quando si considera una tabella a n colonne, sicuramente ciascuna riga va pensata come una n-pla ordinata: infatti in ciascuna riga l'ordine degli elementi è importante e cambiando tale ordine la riga diventa veramente diversa.

Esercizi

- Nelle classi considerate precedentemente, individua quelle che sono ritenute classi ordinate (ossia quelle per le quali l'ordine degli elementi è rilevante).

- Mostra alcuni altri esempi di n-ple ordinate.

1.2.2 Operazioni

1.2.2.1 Dominio, codominio, applicazione, definizione, algoritmi, uguaglianza

Le operazioni sono anche chiamate *funzioni* specialmente nelle discipline scientifiche.

D'ora in avanti con le lettere $f, g, h, ...$ indicheremo *operazioni*.

Un'operazione che fa passare da una cosa di una classe X a una cosa di una classe Y si dice *operazione da* X a Y.

Quando si ha un'operazione da X a Y :

- l'operazione si può *applicare* ad ogni elemento della classe X che è detta *dominio* o *classe di partenza* dell'operazione, e gli elementi della classe X vengono chiamati *argomenti* o *input* dell'operazione,

- la classe Y viene detta *codominio* o *classe di arrivo* dell'operazione, e gli elementi della classe Y vengono detti *valori possibili* o *output possibili* dell'operazione.

In generale, non si richiede che ogni elemento del codominio di un'operazione sia il valore dell'operazione applicata a qualche argomento, e non si richiede che l'operazione assegni un valore ad ogni elemento del dominio.

L'applicazione di una operazione ad una cosa consiste nell'*avvio* dell'esecuzione dell'operazione su quella cosa presa come argomento o input. Quando l'applicazione di un'operazione a un argomento e il completamento dell'esecuzione dell'operazione su quell'argomento dà come valore una cosa, appartenente al codominio dell'operazione, si dice che l'applicazione dell'operazione ha avuto successo su quell'argomento, o anche che l'operazione è definita per quell'argomento.

Se f indica un'operazione e a indica una cosa appartenente al suo dominio, con $f(a)$ indicheremo l'applicazione dell'operazione f alla cosa a; se f indica un'operazione, e a indica una cosa appartenente al suo dominio e dopo l' applicazione dell'operazione f alla cosa a l'esecuzione della operazione dà come valore la cosa b appartenente al codominio di f, scriveremo $f(a) = b$.

La logica non si occupa delle singole operazioni, ma del *concetto generale di operazione*, e dei concetti ad esso collegati, quale in particolare il concetto di *applicazione di una operazione a una cosa* del suo dominio.

Ma la logica si occupa anche di quelle operazioni che si trovano in tutte le branche della nostra conoscenza e che quindi possono essere chiamate *operazioni logiche*.

Al concetto di operazione è collegato il concetto di *definizione* di una operazione. Ovviamente, per essere indicata, una operazione viene espressa (come abbiamo fatto negli esempi) mediante una sua denominazione con la quale si fissa quale è il valore dell'operazione quando viene applicata ai suoi argomenti, e questa è spesso chiamata *definizione* dell'operazione.

Anche il concetto di *definizione di una operazione* è un tipico oggetto della logica.

Talvolta, nella stessa definizione di una operazione, o in aggiunta ad essa, si indica *come* si possa ottenere concretamente, dato un argomento, il valore che l'operazione assegna a tale argomento: si dice in tal caso che si ha una *strategia* o un *algoritmo* o un *programma* per quella operazione.

Il concetto generale di strategia o di algoritmo o di programma, non solo limitato alle operazioni, è un altro oggetto tipico della logica che dovrà anche indagare se l'avere un algoritmo è una condizione necessaria per essere una funzione, o se ci sono invce funzioni per le quali mai si potrà avere un algoritmo.

Spesso si dice che *due operazioni*, indicate con due definizioni diverse o con algoritmi diversi, sono *uguali.* Infatti, si ha la consapevolezza che a definizioni diverse o ad algoritmi diversi non corrispondano necessariamente diverse funzioni, e che una stessa funzione possa avere più definizioni e più algoritmi.

La logica dovrà indagare il concetto di uguaglianza tra operazioni.

Esempi

- Esempi di operazioni:
  - l'operazione di *somma* che fa passare da una coppia ordinata di numeri naturali a un numero naturale che è la somma dei due numeri,
  - l'operazione di *prodotto* che fa passare da una coppia ordinata di numeri naturali a un numero naturale che è il prodotto dei due numeri,
  - l'operazione di *sottrazione* che fa passare da una coppia ordinata di due numeri naturali a un numero naturale che è la sottrazione dei due numeri,
  - l'operazione di *altezza in centimetri* che fa passare da un uomo al numero naturale che è la sua altezza in centimetri,
  - l'operazione *quadrato di un numero naturale*, che fa passare da un numero naturale ad un altro numero naturale che è il suo quadrato,
  - l'operazione *successore di un numero naturale*, che fa passare da un numero naturale al primo numero naturale dopo di lui.
- Esempi di operazioni logiche, perchè comuni a ogni branca della nostra conoscenza:

  - l'operazione di intersezione, che fa passare da due classi X e Y alla più grande classe che contiene gli elementi comuni alle due classi, classe che è detta *intersezione* di X e Y
  - l'operazione di unione, che fa passare da due classi X e Y alla più piccola classe che contiene sia gli elementi della prima classe che gli elementi della seconda classe, classe che è detta *unione* delle due classi X e Y
  - ecc.

- Esempi di applicazione:
  - Data la coppia ordinata formata dai numeri naturali 5 e 7, l'operazione di somma si applica a questa coppia e dall'applicazione della somma a questa coppia di numeri si ottiene come valore della somma il numero 12.
  - Dato un uomo, l'operazione di altezza in centimetri si applica a tale uomo e dall'applicazione dell'operazione di altezza in centimetri a tale uomo si ottiene come valore un numero che è la sua altezza in centimetri.
  - Applicata alla coppia ordinata formata dai numeri naturali 5 e 7, l'operazione di sottrazione (come operazione che fa passare da una coppia di numeri naturali al numero naturale che è la sottrazione dei due numeri naturali) non dà alcun valore.

Esercizi

- Si specifichi il dominio, il codominio er la definizione delle operazioni consderate negli esempi.

- Si considerino particolari operazioni, precisando per ciascuna il suo dominio, il suo codominio e la sua definizione, mostrando cosa avviene nella loro esecuzione quando vengono applicate.

- Si considerino altre operazioni logiche, precisandone il dominio, il codominio e la definizione, e osservando cosa avviene nella loro applicazione e nella successiva esecuzione.

1.2.2.2 Operazioni n-arie

Quando una operazione ha come dominio una classe di coppie ordinate, ossia si applica a coppie ordinate, si dice che è un'operazione *binaria*.

In generale, quando una operazione ha come dominio una classe di n-ple ordinate, ossia si applica a n-ple ordinate, si dice che è un'operazione *n-aria*.

Se f indica una operazione binaria, e a e b indicano cose, e la coppia ordinata costituita da a e b (in questo ordine) appartiene al dominio di f, con $f(a, b)$ indicheremo l'applicazione dell'operazione f a questa coppia ordinata.

Talvolta, per indicare una operazione binaria si usano particolari simboli, e l'applicazione dell'operazione a una coppia ordinata appartenente al suo dominio viene indicata mettendo questo simbolo in mezzo a ciò che indica gli elementi della coppia ordinata.

Se f indica una operazione n-aria, e $a_1, ..., a_n$ indicano cose, e la n-pla ordinata costituita da $a_1, ..., a_n$ (in questo ordine) appartiene al dominio di f, con $f(a_1, ..., a_n)$ indicheremo l'applicazione dell'operazione f a questa n-pla ordinata.

Esempi

- La somma, il prodotto, la sottrazione sono dette operazioni binarie perchè si applicano a coppie ordinate di numeri naturali; per la somma si usa abitualmente il simbolo $+$ e $4 + 5$ indica l'applicazione della somma alla coppia ordinata costituita da 4 e da 5; per il prodotto si usa abitualmente il simbolo $\times$ e 4×5 indica l'applicazione della somma alla coppia ordinata costituita da 4 e 5

- sono operazioni binarie anche le operazioni logiche di intersezione e di unione.

Esercizi

Si considerino particolari operazioni binarie e ternarie, precisando per ciascuna il suo dominio, il suo codominio e la sua definizione, e mostrando cosa avviene nella loro esecuzione quando vengono applicate.

1.2.3 Proprietà e relazioni

1.2.3.1 Proprietà

In ogni branca della nostra conoscenza ci sono *proprietà*, espresse spesso da locuzioni quali "essere ..." o "avere ..." .

D'ora in avanti con le lettere $P, Q, R, ...$ intenderemo proprietà.

La maniera che oggi, nelle scienze e di conseguenza anche nell'informatica, si ritiene più appropriata per intendere una proprietà è quella di pensarla come una particolare operazione: una proprietà è un'operazione che associa ad ogni cosa di una certa classe X una *proposizione*. Una proprietà che associa ad ogni cosa di una classe X una proposizione è detta *proprietà su* X oppure *proprietà con dominio* X.

Se P indica una proprietà, e a indica una cosa appartenente al suo dominio, con $P(a)$ indicheremo la *proposizione* ottenuta applicando la proprietà P alla cosa a, ossia la proposizione che si usa scrivere di solito come "la cosa a ha la proprietà P" oppure "la cosa a soddisfa la proprietà P", proposizione che - come si è detto sopra - può avere dimostrazioni o refutazioni e può comunque intervenire nelle dimostrazioni.

Si noti che questa maniera di intendere le proprietà sposta l'attenzione dalla copula "è" o dal verbo "ha" alla *applicazione* della proprietà a una cosa del suo dominio.

Una proprietà, se si applica a qualcosa, ad un oggetto, produce una proposizione. La proposizione cosìottenuta può essere vista come risultato di un'applicazione di un qualcosa ad un qualcos'altro.

Una proprietà può essere accertata attraverso dei test, ossia da programmi che dato un oggetto del suo dominio sono in grado di verificare se quel determinato oggetto possiede o meno quella proprietà.

Esempi

- la proprietà di *essere buono*, con dominio la classe degli uomini, che dato un uomo a produce la proposizione "a è buono"; i test di bontà sono le maniere di accertare tale proprietà;

- la proprietà di *essere studente* , con dominio la classe degli uomini, che dato un uomo a produce la proposizione "a è uno studente";

- la proprietà "essere un bravo studente di questo corso di logica", con dominio la classe degli studenti di questo corso di logica, che dato uno studente a di questo corso di logica produce la proposizione " a è uno studnete bravo di questo corso di logica "; l'esame è un test per accertare questa proprietà;

- la proprietà di *essere numero pari,* con dominio la classe dei numeri naturali, che dato un numero naturale n produce la proposizione "n è un numero pari";

- la proprietà di *essere il migliore amico di Giovanni*, con dominio la classe degli uomini, che dato un uomo a produce la proposizione "a è il migliore amico di Giovanni"
- la proprietà di *essere una classe finita,* con dominio la classe delle classi, che data una classe X, produce la proposizione "X è finita"
- la proprietà di *essere successore,* con dominio la classe dei numeri naturali, che dato un numero naturale a, produce la proposizione "a è un numero successore"
- ecc.

Esercizi

Si considerino altre proprietà, indicando per ciascuna di esse il dominio, si considerino proposizioni ottenute applicando queste proprietà a cose del loro dominio, e si considerino eventuali test per queste proprietà.

1.2.3.2 Relazioni

In ogni branca della nostra conoscenza si fa uso di *relazioni*, con le quali due o più cose vengono poste in un certo collegamento, e dunque le relazioni possono intercorrere tra due o più cose poste in un ordine fissato: una relazione è detta

- *binaria* se può intercorrere tra due cose,
- *ternaria* se può intercorrere tra tre cose,
- n*-aria* se può intercorrere tra n cose.

La maniera che oggi, nelle scienze e in particolare nell'informatica, si ritiene più appropriata per intendere una relazione è quella di pensarla come una particolare proprietà.

- Una *relazione binaria* viene pensata come una proprietà che ha come dominio una classe di coppie ordinate: essa associa a una coppia ordinata di cose, appartenente al suo dominio, una proposizione.

- Una *relazione n-aria* viene pensata come una proprietà che ha come dominio una classe di n-ple ordinate: essa associa a una n-pla ordinata di cose, appartente al suo dominio, una proposizione.

Se R è una relazione binaria, e la coppia ordinata fatta da a e b (in questo ordine) appartiene al suo dominio, con $R(a, b)$ indicheremo la proposizione ottenuta applicando la relazione R a questa coppia ordinata, ossia la proposizione che usualmente si esprime come "a sta nella relazione R con b " o "a è ... b " dove al posto dei puntini c'è una locuzione che esprime la proprietà P.

Talvolta, per indicare una relazione binaria viene usato un particolare simbolo, e la proposizione ottenuta applicando una relazione binaria a una coppia ordinata appartenente al suo dominio viene rappresentata ponendo questo simbolo in mezzo ai due elementi della coppia ordinata.

Se R è una relazione n-aria, e la n-pla ordinata fatta da $a_1, ..., a_n$ (in questo ordine) appartiene al suo dominio, con $R(a_1, ..., a_n)$ indicheremo la proposizione ottenuta applicando la relazione R a questa n-pla ordinata, ossia la proposizione che usualmente si esprime come "le cose $a_1, ..., a_n$ stanno tra loro, in questo ordine, nella relazione R".

Si noti che anche con questa maniera di intendere le relazioni si sposta l'attenzione dalla copula "è" - presente usualmente nelle espressioni linguistiche in cui vengono espresse le relazioni - alla *applicazione* della relazione n-aria a una n-pla ordinata di cose appartenente al suo dominio.

Una relazione n-aria, se si applica a una n-pla ordinata di oggetti appartenente al suo dominio, produce una proposizione. Le relazioni, come le proprietà, possono essere accertate attraverso dei test o strategie.

Esempi

- la relazione di *minore*, che ad ogni coppia ordinata di numeri naturali m ed n associa la proposizione "m è minore di n'; viene usato un particolare simbolo $<$ per questa relazione e la proposizione ottenuta applicando una relazione binaria a una coppia ordinata appartenente al suo dominio viene rappresentata ponendo questo simbolo in mezzo ai due elementi della coppia ordinata; ad esempio, $4 < 5$ indica la proposizione ottenuta applicando la relazione "essere minore di" alla coppia ordinata costituita da 4 e 5 in questo ordine.

- la relazione di *uguaglianza*, che ad ogni coppia ordinata di numeri naturali m ed n associa la proposizione "m è uguale a n"; viene usato un particolare simbolo = per questa relazione e la proposizione ottenuta applicando una relazione binaria a una coppia ordinata appartenente al suo dominio viene rappresentata ponendo questo simbolo in mezzo ai due elementi della coppia ordinata; ad esempio, $4 = 5$ indica la proposizione ottenuta applicando la relazione "essere ugule a" alla coppia ordinata costituita da 4 e 5 in questo ordine.

- la relazione di *amicizia*, che ad ogni coppia ordinata di uomini a e b associa la proposizione "a è amico di b",
- la relazione di *paternità*, che ad ogni coppia ordinata di uomini a e b associa la proposizione "a è padre di b",
- la relazione di *stare tra,* che ad ogni tripla ordinata a_1, a_2, a_3 di punti associa la proposizione "a_1 sta tra a_2 e a_3",
- la relazione di *stare tra*, che ad ogni tripla ordinata a_1, a_2, a_3 di città associa la proposizione "a_1 sta tra a_2 e a_3" (ad esempio, "Roma sta tra Napoli e Firenze"),
- ecc.

Esercizi
Si considerino altre relazioni binarie o ternarie, indicando per ciascuna di esse il dominio, si considerino proposizioni ottenute applicando queste relazioni a coppie o a triple del loro dominio, e si considerino eventualmente test o strategie per tali proprietà.

1.2.3.3 La logica e le proprietà e le relazioni

La logica si occupa non delle singole proprietà o delle singole relazioni, ma del *concetto generale di proprietà* e del *concetto generale di relòazione* nonchè dei concetti collegati.

I concetti collegati al concetto di proprietà o di relazione sono - dato il modo con cui intendiamo le proprietà e le relazioni - quelli collegati al concetto di operazione, essendo le proprietà e le relazioni particolari operazioni: il concetto di *applicazione,* quello di *definizione*, quello di *strategia (algoritmo, programma)*.

C'è inoltre un tema importante, relativo alle proprietà, comune a tutte le branche della conoscenza, e del quale si occupa la logica: il rapporto tra *proprietà* e *classi.* Spesso, data una proprietà, si passa ad una classe, la classe delle cose che *hanno o soddisfano* quella proprietà. Il rapporto tra *proprietà* e *classi* è un tipico oggetto della logica. Inversamente, spesso, data una classe X, si passa alla proprietà di "appartenere alla classe X" alla quale proprietà viene a corrispondere la classe X.

La logica si occupa inoltre di proprietà o relazioni comuni a tutte le branche della nostra conoscenza, che sono dette rispettivamente *proprietà logiche* e relazioni logiche.

Esempi

- Esempi di passaggio da una proprietà a una classe:
  - alla proprietà "essere uomo" si fa corrispondere "la classe degli uomini" ossia la classe delle cose che hanno la proprietà di essere uomo,
  - alla proprietà "essere un numero pari" (con dominio la classe dei numeri naturali) si fa corrispondere "la classe dei numeri pari" ossia la classe dei numeri naturali che hanno la proprietà "essere numero pari", ecc.
- Esempio di passaggio da una classe a una proprietà: data la classe degli uomini, si passa alla proprietà "appartenere alla classe degli uomini" alla quale corrisponde la classe degli uomini.
- Esempi di proprietà logiche
  - la proprietà di "essere una dimostrazione",
  - la proprietà di "essere una refutazione",
  - la proprietà di "essere una classe",
  - la proprietà di "essere una classe finita",
  - ecc.
- Esempi di relazioni logiche
  - la relazione di appartenenza (con dominio le coppie ordinate formate da una cosa e una classe),
  - la relazione "essere parte di..." (relazione di inclusione tra classi), con dominio le coppie ordinate di classi;
  - la relazione "essere disgiunta (separata) da", con dominio le coppie ordinate di classi.

Esercizi

- Per ciascuna delle proprietà considerate negli esercizi precedenti, si trovi la classe corrispondente.

- Per ciascuna delle classi considerate negli esercizi prercedenti, si trovi una proprietà alla quale corrisponde quella classe.

- Si trovino altre proprietà logiche e altre relazioni logiche.

1.3 Strategie, macchine, reti

In ogni branca della nostra conoscenza ci sono *strategie* , chiamate anche *programmi* o *algoritmi*, e le strategie sono strettamente connesse alle *macchine* e alle loro *reti*.

1.3.1 Strategie

Cascuna *strategia* è una strategia per un *obiettivo*.

Una *strategia per un obiettivo* è costituita da prescrizioni (dette anche istruzioni), nelle quali si impone l'esecuzione di atti concreti e elementari, per raggiungere quell'obiettivo. Le prescrizioni (o istruzioni) contenute in una strategia fanno riferimento a uno o più soggetti capaci di eseguire gli atti concreti ed elementari che esse impongono di eseguire.

In particolare, ci possono essere

- *strategie per calcolare una operarazione* f, dette di solito *algoritmi per la operazione* f o *programmi per la operazione* f;

- *strategie per stabilire una proprietà* P, dette di solito *test per la proprietà* P .

Una strategia per calcolare una operazione f (un *algortimo* per f) è una strategia che ha l'obiettivo di trovare *in un numero finito di passi*, data una qualunque cosa a appartenente al dominio dell'operazione, il valore $f(a)$ qualora questo valore esista.

In particolare, una strategia per calcolare una operazione n-aria f (un *algoritmo* per f) è una strategia che ha l'obiettivo di trovare *in un numero finito di passi*, data una qualunque n-pla ordinata di cose $a_1, ..., a_n$ appartenente al dominio dell'operazione, il valore $f(a_1, ..., a_n)$ qualora questo valore esista.

Una strategia per stabilire una proprietà P (un *test* per P) è una strategia che ha l'obiettivo di trovare *in un numero finito di passi*, data una qualunque cosa a appartenente al dominio della proprietà, una dimostrazione o una refutazione della proposizione $P(a)$ ("a ha la proprietà P").

In particolare, una strategia per una relazione R (un *test* per R) è una strategia che ha l'obiettivo di trovare *in un numero finito di passi,* data una qualunque n-pla ordinata di cose $a_1, ..., a_n$ appartenente al dominio della relazione, una dimostrazione o una refutazione della proposizione $R(a_1, ..., a_n)$ ("$a_1, ..., a_n$ stanno in questo ordine nella relazione R").

In generale, le strategie sono concrete e finite in quanto consistono in atti concreti eseguiti in un numero finiti di passi. Le strategie possono essere meccanizzate, infatti chi esegue una strategia, che sia una macchina o una persona, comunque agisce in modo meccanico.

La logica non si occupa delle singole strategie, ma del *concetto generale di strategia.*

In particolare, la logica si occupa di classificare le strategie. Ad esempio, le strategie possono essere classificate in *strategie sequenziali* (strategie che possono essere eseguite da un solo soggetto, che non richiedono la cooperazione tra più soggetti), e *strategie non sequenziali* (strategie che richiedono la cooperazione o l'intervento di più soggetti), e all'interno delle strategie non sequenziali si possono classificare le strategie secondo il diverso livello o grado di cooperazione che esse richiedono tra più soggetti.

Ci sono comunque nelle strategie delle *istruzioni* che si ritrovano in ogni branca della nostra conoscenza, e che devono in qualche modo essere eseguibili *da chiunque.* Ad esempio, un'istruzione che dice "prendi la prima componente di una coppia ordinata di cose" è un'istruzione che si può ritrovare in ogni branca della nostra conoscenza. Siffatte *istruzioni* sono dette *istruzioni logiche* e sono oggetto della logica.

Una strategia costituita interamente da istruzioni logiche è detta *strategia logica* e le strategie logiche sono oggetto della logica.

Esempi

- le *strategie (gli algoritmi) per la somma di due numeri naturali*, quale la strategia che ciascuno di noi ha imparato per ottenere, dati due numeri naturali, la loro somma, e la strategia (l'algoritmo) usato da una macchina calcolatrice per sommare due numeri;
- le *strategie (gli algoritmi) per il prodotto di due numeri naturali*, quale la

strategia che ciascuno di noi ha imparato per ottenere, dati due numeri naturali, il loro prodotto, e la strategia (l'algoritmo) usato da una macchina calcolatrice per moltiplicare due numeri;

- le *strategie (i test) per la proprietà di "essere un numero primo"*, quale la strategia imparata da ciascuno di noi per dimostrare o refutare che un numero naturale è un numero primo;
- il *test di selezione* a un concorso per una certa qualifica, che può essere visto come una strategia che permette, dato un qualunque candidato, di trovare una dimostrazione che quel candidato è abile per quella qualifica, o una refutazione che quel candidato è abile per quella qualifica;
- una *strategia* per il gioco a scacchi, che consiste in istruzioni su come rispondere alle mosse dell'avversario
- una *strategia* per una ricetta di cucina, che consiste in un insieme di istruzioni da seguire su come preparare una ricetta culinaria.
- una *strategia* per un percorso stradale che consiste in un insieme di istruzioni per raggiungere un determinato posto geografico.
- una *strategia* per un dibattito, che consiste in istruzioni su come rispondere a ciò che l'altro partecipante propone.
- ecc.

Esercizi
Si cerchino altre strategie (test, algoritmi), e per ciascuna di esse, e per quelle sopra ricordate, si cerchi di vedere quali sono le prescrizioni che la costituiscono.

1.3.2 Macchine

Una *macchina* è qualunque soggetto che sa *eseguire* una strategia o che *interviene* nella esecuzione di una strategia.

Si noti che, per ciascuna strategia sopra considerata, si può pensare di costruire una macchina che la esegue: è sufficiente che la macchina sappia compiere tutti gli atti concreti ed elementari che sono previsti nelle istruzioni che costituiscono la strategia considerata.

Il concetto generale di macchina è strettamente collegato a quello di strategia, anzi può essere sostituito a quello di strategia.

Ciascuna strategia non è tale se non è eseguibile da una macchina o da più macchine in collaborazione tra loro. Ad esempio, una strategia per il gioco degli scacchi è sicuramente frutto di grande intelligenza, ma una volta trovata la si può affidare anche a uno del tutto inesperto di scacchi il quale è tenuto soltanto a osservarla *cosìcome è*, a eseguirla *senza metterci nulla di creazione personale* (anzi, se volesse modificarla, lui inesperto, la strategia non funzionerebbe più cosìbene...), a eseguirla *come se fosse una macchina*: tanto vale allora che la strategia venga affidata ad una macchina. Una macchina creata per un certo scopo non fa altro che eseguire una strategia (pensata dal costruttore della macchina).

La logica ovviamente non si occupa delle singole macchine, ma del concetto generale di macchina e di tutti i concetti ad esso collegati. Come vedremo, è stato proprio occupandosi del concetto di macchina che la logica è divenuta la base teorica dell'informatica.

Esempi

- le *macchine calcolatrici*, che sanno eseguire in realtà *molte* strategie
- le *macchine* che sanno eseguire soltanto una strategia (ad esempio, la macchina che è in grado di trasformare certe cose ricevute dall'esterno in un'altra cosa)
- ecc.

Esercizi

- Si pensi a come deve essere fatta una macchina perchè esegui ciascuna delle strategie sopra considerate.
- Si cerchino altri esempi di macchine.

1.3.3 Reti

Le *reti di macchine* servono, innanzitutto, per eseguire strategie che richiedono la cooperazione o l'intervento di più soggetti, dunque strategie non sequenziali. Le reti di macchine possono essere classificate in modo analogo a come vengono classificate le strategie non sequenziali ossia secondo il diverso livello o grado di cooperazione che c'è tra le diverse macchine che le costituiscono.

Nel mondo odierno, dopo i grandi sviluppi dell'informatica della fine del secolo scorso e dell'inizio di questo secolo, non ci sono soltanto macchine sempre più potenti ma anche reti di macchine di complessità anche ingente. *Internet* è, in realtà, una immensa rete di macchine calcolatrici.

Il concetto chiave in ogni rete di macchine è quello di *comunicazione* tra le macchine, concetto che sta alla base anche di quello di *collaborazione*; entrambi questi concetti, e quelli ad essi collegati, sono di natura logica.

La logica dovrà occuparsi del concetto di *collaborazione* di *comunicazione* tra macchine che sono tra loro collegate in rete, così come del concetto generale di *rete di machcine.* E sarà proprio occupandosi di questo concetto generale che la logica può divenire la base teorica dell'attuale sviluppo dell'informatica nella direzione delle reti di calcolatori, e contribuire anche allo sviluppo dello studio del concetto generale di *rete* (ossia del concetto che comprende anche le reti costituite non da macchine ma da altri soggetti, ad esempio le reti sociali).

1.4 Organizzazione delle conoscenze

Sin dal mondo greco, si è provveduto ad organizzare le conoscenze sulla base di due strumenti tipici della logica, la dimostrazione e la definizione. Tale organizzazione, per prima adoperata nella geometria e poi diffusasi anche ad altre branche della conoscenza, va sotto il nome di *metodo assiomatico.*

Noi, abitualmente tendiamo a mettere ordine tra le nostre conoscenze attraverso un'organizzazione evitando quindi, di accumulare conoscenze in modo caotico.

Si noti che organizzare le conoscenze non significa *ottenere conoscenze.* Il metodo assiomatico è dunque una maniera di organizzare conoscenze già acquisite, non un metodo disegnato per accrescere le conoscenze. Anche se talvolta, anzi spesso, la buona organizzazione delle conoscenze può servire a trovare qualche lume per accrescerle.

1.4.1 L'organizzazione assiomatica delle proposizioni

Ciascuna branca della nostra conoscenza mira *a stabilire* una sufficientemente ampia quantità di proposizioni, dette spesso *teoremi* di quella branca di conoscenza, e a compiere una sufficientemente ampia quantità di *dimostrazioni da ipotesi* con le quali si scoprono *dipendenze tra i teoremi*; ad esempio, una dimostrazione di A da B, dove B e A sono teoremi di una branca della nostra conoscenza, mette in evidenza che il teorema A dipende da B, ossia che basta avere una dimostrazione di B per poter poi ottenere una dimostrazione di A.

La scoperta di teoremi e la scoperta delle loro dipendenze reciproche è dunque il motore dello sviluppo di ciascuna branca della conoscenza, di ciascuna disciplina scientifica. E la raccolta di informazioni stabilite e lo studio delle dipendenze tra queste informazioni è d'altra parte ciò che noi facciamo anche nella vita quotidiana.

Quando in una branca della conoscenza, in una disciplina scientifica, si è arrivati a un grado abbastanza elevato di sviluppo, ossia quando si è arrivati a stabilire un numero sufficientemente ampio di teoremi e si è arrivati a scoprire un numero sufficientemente ampio di dipendenze tra i teoremi, sorge spesso il desiderio di presentare la classe dei teoremi nella maniera seguente:

- selezionare un numero finito, il più piccolo possibile, di teoremi dai quali - mediante dimostrazioni logiche nei quali quei teoremi sono ipotesi - si possano ottenere tutti gli altri teoremi;

- i teoremi selezionati sono chiamati *assiomi* della disciplina, e la loro dimostrazione è qualcosa che è propria della disciplina stessa (spesso si dice che essa è “lasciata all'intuizione”);

- la dimostrazione di ciascuno degli altri teoremi è costituita da una *dimostrazione logica* di quel teorema dagli assiomi della disciplina, e dunque è condotta unicamente con strumenti logici.

Quando una disciplina è cosìorganizzata, si dice che la classe dei suoi teoremi è presentata secondo il metodo *assiomatico*.

Quando la classe dei teoremi di una disciplina è presentata secondo il metodo assiomatico, di solito si scrivono gli *assiomi*, ossia un numero finito e piccolo di proposizioni, e si afferma - correttamente - che tutti gli altri teoremi noti della disciplina sono “racchiusi” in quegli assiomi, nel senso che da quelli assiomi possono essere dimostrati logicamente, e si arriva a pensare che qualunque altro nuovo teorema della disciplina possa venir dimostrata usando quegli assiomi come ipotesi.

Si osservi che anche quando si è in presenza di una sufficientemente ampia classe di informazioni stabilite, e si sono studiate abbastanza le dipendenze tra queste informazioni, è opportuno ed elegante presentare quella classe di informazioni secondo il metodo assiomatico, ossia fissare un numero piccolo di informazioni dalle quali tutte le altre possano essere ottenute mediante dimostrazioni logiche.

La logica svolge un ruolo importante nell'organizzazione assiomatica delle proposizioni di una disciplina scientifica. Infatti, eccetto che per gli assiomi la cui dimostrazione è extra-logica, ogni altro teorema di una disciplina scientifica presentata secondo il metodo assiomatico è dimostrato mediante una dimostrazione *logica* nella quale le ipotesi sono gli assiomi.

La presentazione assiomatica dei teoremi di una disciplina, così come la presentazione assiomatica di una qualunque classe di proposizioni, è dunque un'organizzazione *logica* di una classe di proposizioni.

Nella presentazione assiomatica dei teoremi di una disciplina, le dimostrazioni logiche sono ovviamente presentate *dall'alto verso il basso*, ossia a partire dagli assiomi.

Esempi

- la *geometria euclidea* è una presentazione assiomatica dei teoremi della geometria, ed è il primo esempio storico di una presentazione assiomatica di una disciplina;

- la *fisica newtoniana* è una presentazione assiomatica dei teoremi della fisica.

Esercizi

Si consideri una piccola classe di proposizioni ritenute vere su un determinato campo di conoscenza, e si cerchi di presentarle secondo il metodo assiomatico.

1.4.2 L'organizzazione assiomatica dei concetti

In ciascuna branca della nostra conoscenza si considerano e si usano *concetti* (ad esempio, in geometria i concetti di *trinagolo,* di *piano*, di *poligono* , ecc) che entrano nelle proposizioni che si stabiliscono o si refutano.

Quando una branca della nostra conoscenza si è abbastanza sviluppata, e si procede ad una organizzazione assiomatica dei suoi teoremi, viene spontanea anche un'altra esigenza di organizzazione, questa volta dei *concetti.*

Questa esigenza di organizzazione dei concetti parte dal fatto che certi concetti di una disciplina possano essere *definiti, espressi* mediante altri concetti della disciplina e mediante concetti logici, ad esempio si può definire "triangolo" come "figura geometrica che ha tre angoli".

Si cerca allora di organizzare la classe dei concetti di una disciplina scientifica in questa maniera che è chiamata *organizzazione assiomatica dei concetti*:

- trovare un numero finito, il più piccolo possibile, di concetti dai quali - mediante definizioni nelle quali vengono usati oltre a quei concetti soltanto concetti logici - possano essere definiti tutti gli altri concetti usati nelle proposizioni della disciplina;
- i concetti così selezionati sono chiamati *concetti primitivi*, e la loro definizione è qualcosa che è proprio di quella disciplina (si usa dire che "è lasciata all'intuizione");
- la definizione di ogni altro concetto della disciplina è una definizione nella quale si usano soltanto i concetti primitivi e i concetti logici, ossia è una *definizione logica dai concetti primitivi.*

Quando i concetti di una disciplina sono organizzati assiomaticamente, e anche i teoremi di quella disciplina sono organizzati assiomaticamente, si compie un ulteriore passo che fa arrivare alla *presentazione della disciplina secondo il metodo assiomatico*: negli assiomi i concetti non primitivi vengono rimpiazzati dalla loro definizione logica dai concetti primitivi, e così negli assiomi compaiono soltanto concetti primitivi e concetti logici.

Si chiama *teoria assiomatica* una organizzazione assiomatica delle proposizioni e dei concetti di una disciplina scientifica, con queste caratteristiche:

- si fissa un numero finito, piccolo, di proposizioni chiamate *assiomi*; la dimostrazione degli assiomi è propria della disciplina ("è lasciata all'intuizione");
- si fissa un numero finito, piccolo, di concetti chiamati *concetti primitivi*; il contenuto dei concetti primitivi è proprio della disciplina ("è lasciato all'intuizione");
- negli assiomi compaiono soltanto concetti primitivi e concetti logici;
- tutti i teoremi noti della disciplina si ottengono come conclusioni di dimostrazioni logiche dagli assiomi, e si aggiunge che va ritenuto teorema della disciplina qualunque proposizione che sia conclusione di una dimostrazione logica dagli assiomi;
- tutti i concetti noti della disciplina si ottengono mediante definizioni dai concetti primitivi e dai concetti logici, e si aggiunge che va ritenuto concetto della disciplina qualunque concetto che sia ottenuto mediante definizione dai concetti primitivi e dai concetti logici.

Si osservi che, quando si è in presenza di una sufficientemente ampia classe di informazioni stabilite, e di una sufficientemente ampia classe di concetti, e si sono studiate abbastanza le dipendenze tra queste informazioni e tra questi concetti, è opportuno ed elegante presentare quella classe di informazioni e di concetti come *una teoria assiomatica*, ossia fissare un numero piccolo di informazioni dalle quali tutte le altre possano essere ottenute mediante dimostrazioni logiche e un piccolo numero di concetti dai quali tutti gli altri concetti possono essere ottenuti mediante definizioni logiche.

La logica svolge un ruolo importante anche nell'organizzazione assiomatica dei concetti di una disciplina scientifica. Infatti, eccetto che per i concetti primitivi il cui contenuto è extra-logico, ogni altro concetto di una disciplina scientifica presentata secondo il metodo assiomatico è definito usando soltanto *concetti logici* e concetti primitivi.

La presentazione assiomatica dei concetti di una disciplina, cosìcome la presentazione assiomatica di una qualunque classe di concetti, è dunque un'organizzazione *logica* di una classe di concetti.

Quando poi una disciplina scientifica viene presentata come una teoria assiomatica, si vede chiaramente che tutto è *logico* con l'eccezione della *dimostrazione* degli assiomi e con l'eccezione del *contenuto* dei concetti primitivi.

Il *metodo assiomatico formale*, del quale parleremo più avanti e che è stato introdotto nella matematica dell'ottocento, è un metodo di presentazione dei teoremi e dei concetti di una disciplina scientifica, nel quale *tutto è logico*: ossia in esso non si fa riferimento a dimostrazioni extra-logiche degli assiomi o a contenuti extra-logici dei concetti primitivi, ma a una dimostrazione *logica* di una proposizione logica che coinvolge assiomi e concetti primitivi.

Esempi

- la *geometria euclidea* è una presentazione assiomatica dei teoremi e dei concetti della geometria, ed è il primo esempio storico di una *teoria assiomatica*;
- la *fisica newtoniana* è una presentazione assiomatica dei teoremi e dei concetti della fisica, ed è una *teoria assiomatica*.

Esercizi

Si consideri una piccola classe di concetti e di proposizioni ritenute vere, su un determinato campo della conoscenza, e si cerchi di presentarla secondo il metodo assiomatico.

Capitolo 2

Logica classica: proposizioni, dimostrazioni

La logica classica è la logica usata nella parte teorica della conoscenza scientifica, e in buona parte del nostro ragionamento quotidiano. Essa è la logica usata quando i concetti logici sono considerati astraendo dal tempo e dallo spazio - come avviene nella parte teorica della conoscenza scientifica - , o quando i concetti logici sono considerati realtivamente ad un solo istante e ad un solo luogo - come avviene tante volte per ragioni di semplicità nel nostro ragionamento quotidiano.

In questo capitolo vedremo la risposta che la logica classica dà a domande tipiche dell'indagine logica:

- cosa sono le proposizioni?
- cosa sono le dimostrazioni? cosa sono le refutazioni?
- cosa sono le dimostrazioni da ipotesi?
- cosa è il duale logico di una proposizione?

La risposta che la logica classica dà a queste domande è quella che è di fatto implicita nella parte teorica della conoscenza scientifica e in buona parte del nostro ragionamento quotidiano.

In base alla risposta date a queste domande, scopriremo alcune importanti *regole logiche* del nostro ragionamento.

Vedremo che

- la risposta che la logica classica dà alla domanda "cosa sono le proposizioni?" è semplicemente "le proposizioni sono i due valori di verità, 0 e 1";

- la risposta alla domanda "cosa sono le dimostrazioni?" è semplicemente "le dimostrazioni stabiliscono, fanno conoscere, che una proposizione è il valore 1" e la risposta alla domanda "cosa sono le refutazioni?" è semplicemente "le refutazioni stabiliscono, fanno conoscere, che una proposizione è il valore 0";

- la risposta alla domanda "cosa sono le dimostrazioni da ipotesi?" è semplicemente "una dimostrazione da ipotesi preserva il valore 1 dall'ipotesi alla conclusione e preserva il valore 0 dalla conclusione all'ipotesi";

- la risposta alla domanda "cosa è il duale logico di una proposizione?" è semplicemente "il duale logico di una proposizione è la sua negazione classica, il cambio del suo valore".

La logica classica costituisce anche una delle basi dell'informatica: sia per il fatto che i calcolatori sono progettati per lavorare sui *bit* che sono nient'altro che le proposizioni della logica classica, sia per il fatto che molte parti della logica classica sono usate (con successo non sempre totale) nella scrittura dei programmi e nella gestione delle informazioni.

Ci sono ovviamente altre risposte possibili, che non sono *alternative* alla logica classica ma suoi *raffinamenti*, e che permettono di considerare anche ambiti della conoscenza nei quali la logica classica non si può usare. Ad esempio, si può considerare prioritario il concetto di *dimostrazione* o *refutazione*, intese come *costruzioni* o come *processi*, e ritenere che una proposizione è una *classe di costruzioni* o una *classe di processi*.

2.1 La concezione classica delle proposizioni

Ciascuna *proposizione* in logica classica è qualcosa che può avere *immutabilmente uno e uno solo tra due valori distinti*, e tali valori sono convenzionalmente chiamati 0 (o "falso") e 1 (o "vero"). Il valore di ciascuna proposizione è determinato dai concetti che in essa sono presenti.

Quando il valore di una proposizione A è 1, si dice che A *è vera*. Quando il valore di una proposizione A è 0, si dice che A *è falsa*.

Una cosa che in ciascun istante *può avere uno e uno solo tra due valori (o stati) distinti* è detta *bit.* Ad esempio, una lampadina è un bit, in quanto in ciascun istante essa può avere *uno e uno solo* tra due stati distinti, lo stato "acceso" (denotato anche da 1) e lo stato "spento" (denotato anche da 0). Dunque, ciascuna proposizione in logica classica è un *bit*, ma un *bit* speciale poichè è un *bit* il cui stato è lo stesso in ciascun istante; è come una lampadina, ma una lampadina in uno stato fisso o in un solo istante.

La classe dei possibili valori delle proposizioni in logica classica, e la classe dei possibili valori di un bit, è chiamata *insieme dei valori classici di verità* o *insieme dei valori di un bit* o *insieme dei bit,* ed è denotata da

$$\{0, 1\}$$

La concezione delle proposizioni in logica classica è una concezione *estensionale, bivalente, aspaziale e atemporale* delle proposizioni.

La concezione delle proposizioni è *estensionale* in quanto prescinde, astrae dai processi con cui esse si formano (le verifiche, le dimostrazioni, ecc.), e si limita a considerare soltanto il loro risultato, il loro valore, la loro *estensione.* In questo senso, possiamo dire che una proposizione in logica classica si identifica con il suo valore, è il suo valore (e non soltanto che essa ha quel valore).

La concezione delle proposizioni è *bivalente* poichè consiste nel ritenere che i valori delle proposizioni sono soltanto due: uno è chiamato *vero* e l'altro è chiamato *falso.*

La concezione aspaziale e atemporale delle proposizioni consiste nel ritenere che i valori delle proposizioni non sono collocati in un ordine spaziale o temporale, ossia che non c'è alcun ordine spaziale o temporale tra i valori delle proposizioni (o anche che i valori delle proposizioni sono tutti collocati in un unico punto spaziale o in un unico istante temporale), e il valore delle proposizioni è indipendente dal tempo.

Dunque la logica classica, in coerenza con ciò che si dà in matematica e nelle parti teoriche delle scienze (e in una larga parte del nostro ragionare quotidiano), sostiene

- che gli esiti possibili di un eventuale processo con cui si forma una proposizione sono soltanto: l'ottenere il valore "vero", l'ottenere il valore "falso";

- che ciascuna proposizione è un nome di uno dei due valori classici di verità, ossia è sempre uno e uno solo dei due valori classici di verità;
- che il valore di una proposizione non si colloca nello spazio o nel tempo, ovvero tutti i valori delle proposizioni si collocano nello stesso punto dello spazio e nello stesso istante temporale.

Chiameremo *classica* una proposizione che viene intesa secondo la logica classica, ossia una proposizione il cui valore è uno dei due valori di verità.

Ovviamente, tutte le proposizioni che non si ritiene di poter trattare con questa concezione estensionale, bivalente, aspaziale ed atemporale sono proposizioni non trattabili con la logica classica.

In un capitolo successivo vedremo l'importanza che hanno i *bit* per l'informatica, in dipendenza del fatto che le macchine calcolatrici operano su bit e in dipendenza di questi due teoremi:

- ciascun numero naturale può essere scritto mediante una successione finita di bit (ossia, come di dice, *in notazione binaria*),
- ciascun *testo* in un dato linguaggio può essere *codificato* mediante un numero naturale e dunque mediante una successione finita di bit.

Esercizi

- Si considerino tutte le proposizioni viste precedentemente (nel capitolo 1), e - in base alla logica classica - si attribuisca loro uno dei due valori di verità.
- Si cerchi di vedere quali proposizioni possono essere tranquillamente considerate come valori di verità, e quali no (e quindi non sono proposizioni classiche).
- Si accerti che le proposizioni matematiche, e le proposizioni di carattere teorico, sono sempre proposizioni classiche.

2.2 La concezione classica delle dimostrazioni

La logica classica - e anche in questo caso in accordo con ciò che avviene nella parte teorica delle discipline scientifiche e in generale quando le proposizioni sono ritenute secondo la concezione della logica classica - precisa cosa si deve intendere per *dimostrazione* di una proposizione e cosa si deve intendere per *refutazione* di una proposizione.

Come abbiamo visto nel capitolo 1, una dimostrazione di una proposizione A è qualcosa che "stablisce A" e una refutazione di una proposizione A è qualcosa che "respinge A". Teniamo presente che una dimostrazione o una refutazione è un processo che ci fa concludere qualcosa, che ci fa conoscere qualcosa.

Quel che va precisato dalla logica è non tanto *cosa permette* di "stabilire A" o *cosa permette* di "respingere A", perchè ciò che permette di stabilire una proposizione e ciò che permette di respingere una proposizione dipende essenzialmente dalla singola disciplina scientifica. Bisogna precisare invece cosa vuol dire *stabilire una proposizione* e cosa vuol dire *respingere una proposizione*, una volta che abbiamo fissato che una proposizione è qualcosa che può avere uno e uno solo dei due valori 1 e 0.

La precisazione della logica classica è la seguente:

- *stabilire una proposizione A - ossia dimostrare A - è concludere che il valore di A è 1, è conoscere che il valore di A è 1*

- *refutare una proposizione A - ossia refutare A - è concludere che il valore di A è 0, è conoscere che il valore di A è 0.*

Dunque, nella logica classica:

- una dimostrazione di una proposizione A è qualcosa che ci permette di concludere, di conoscere, che il valore di A è 1, ossia che A è una proposizione vera;

- una refutazione di una proposizione A è qualcosa che ci permette di concludere, di conoscere, che il valore di A è 0, ossia che A è una proposizione falsa.

Una volta precisato cosa è una dimostrazione di una proposizione A e cosa è una refutazione di A, viene da sè la precisazione di cosa è una dimostrazione di una proposizione A da una ipotesi B.

Infatti, come abbiamo detto nel capitolo 1, una dimostrazione di una proposizione A (conclusione, tesi) da una proposizione B (premessa, ipotesi) è un qualcosa, un processo, che permette di:

- trasformare ogni dimostrazione di B in una dimostrazione di A

- trasformare ogni refutazione di A in una refutazione di B.

La logica non ha il compito di dire cosa deve essere un processo siffatto, perchè questo compito spetta alle singole discipline, a meno che non si tratti di *dimostrazioni logiche.*

Dal fatto che nella logica classica *dimostrazione di una proposizione è stabilire che quella proposizione è vera* e dal fatto che in logica classica *refutazione di una proposizione è stabilire che quella proposizione è falsa* , si ha che in logica classica una *dimostrazione di una proposizione* A (conclusione, tesi) *da una proposizione* B (premessa, ipotesi) è qualcosa che permette di:

- *passare dalla verità della ipotesi B alla verità della conclusione A, trasformare la conoscenza della verità della ipotesi B nella conoscenza della verità della conclusione A*

- *passare dalla falsità della conclusione A alla falsità della ipotesi B, trasformare la conoscenza della falsità della conclusione A nella conoscenza della falsità dell'ipotesi B.*

E' in questo senso che si usa dire che in logica classica una dimostrazione di una proposizione A (conclusione, tesi) da una proposizione B (premessa, ipotesi)

- dall'alto verso il basso (dalla ipotesi alla conclusione) *preserva, mantiene, la verità*

- dal basso verso l'alto (dalla conclusione alla ipotesi) *preserva, mantiene, la falsità.*

Va da sè, ma è bene ricordarlo, che quando si ha una dimostrazione di A da B :

- se abbiamo una *refutazione di B,* ossia se conosciamo che la premessa B è falsa, la dimostrazione di A da B non ci permette di avere alcuna informazione sul valore della conclusione$A$

- se abbiamo una *dimostrazione di A,* ossia se conosciamo che la conclusione A è vera, la dimostrazione di A da B non ci permette di avere alcuna informazione sul valore della ipotesi B.

Si noti che una qualunque branca della nostra conoscenza una dimostrazione di una proposizione A da una proposizione B deve soddisfare comunque la condizione seguente: qualora si intendessero A e B secondo la concezione classica,

- dall'alto verso il basso (dalla ipotesi alla conclusione) *preserva, mantiene, la verità,* e dunque se B è vera anche A deve essere vera;

- dal basso verso l'alto (dalla conclusione alla ipotesi) *preserva, mantiene, la falsità,* e dunque se A è falsa anche B deve essere falsa.

Dunque quel che abbiamo imparato sulle dimostrazioni da ipotesi è qualcosa che ci permette di vagliare quando qualcosa non può essere affatto una dimostrazione da ipotesi: quando qualcuno dice di avere una dimostrazione di A da B, assumiamo di prendere A e B secondo la concezione classica, e possiamo dire che non si tratta di una dimostrazione di A da B qualora essa non preservi la verità (dalla ipotesi alla conclusione) o non preservi la falsità (dalla conclusione all'ipotesi).

Esercizi

- Si considerino le dimostrazioni e le refutazioni viste nel capitolo 1, e si osservi che - assumendo la concezione classica delle proposizioni - le dimostrazioni fanno conoscere che una proposizione è vera, mentre le refutazioni fanno concoscere che una proposizione è falsa.

- Si considerino le dimostrazioni da ipotesi, viste nel capitolo 1, e si osservi che - assumendo la concezione classica delle proposizioni e assumendo che l'ipotesi sia una proposizione vera - i passaggi della dimostrazione (letta dall'ipotesi alla conclusione) ci impongono di ritenere che anche la conclusione è una proposizione vera.

- Si considerino le dimostrazioni da ipotesi, viste nel capitolo 1, e si osservi che - assumendo la concezione classica delle proposizioni e assumendo che la conclusione sia una proposizione falsa - i passaggi della dimostrazione (letta dalla conclusione all'ipotesi) ci impongono di ritenere che anche l'ipotesi è una proposizione falsa.

2.3 La dualità: la negazione classica

La logica classica considera i due valori di verità 0 e 1 come l'uno opposto all'altro, come l'uno duale all'altro. Dunque 0 è il *duale* di 1 , 1 è il *duale* di 0.

2.3.1 Dualità tra le proposizioni in logica classica

Il duale logico di una proposizione in logica classica è chiamato *negazione classica* di quella proposizione.

La negazione classica di una proposizione, essendo una proposizione, ha uno e uno solo dei due valori di verità: la logica classica, in coerenza con ciò che avviene in tutte le discipline scientifiche nella loro parte teorica, fissa che *il valore della negazione classica di una proposizione A è il duale del valore della proposizione A.* Ossia: se il valore di A è 1 allora il valore della negazione classica di A è 0; se il valore di A è 0 allora il valore della negazione classica di A è 1. E dunque, giustamente, il valore della negazione classica della negazione classica di A, torna ad essere il valore di A.

Come debba essere espressa la negazione classica di una proposizione viene deciso dalla singola disciplina, dal contesto scientifico in cui ci collochiamo; ma se in una proposizione ci sono componenti *logiche* , allora sarà la logica a doverci dire come deve essere espressa la sua negazione classica. Di fatto, in ogni ambito della nostra conoscenza, ogni qualvolta si ha una proposizione intesa secondo la concezione classica, si ha anche la sua negazione classica.

Così, per la negazione classica vale ciò che deve valere per il duale logico di una proposizione, così come abbiamo detto nel capitolo 1: ossia per ogni proposizione A,

- esista una proposizione chiamata *negazione classica di A*
- la negazione classica della negazione classica di A sia A stessa.

La negazione classica di una proposizione A viene rappresentata da $\neg A$. Ossia, quando scriviamo $\neg A$ stiamo dicendo che A è una proposizione nel senso della logica classica e stiamo indicando una proposizione che è anch'essa secondo la concezione della logica classica e che ha il valore duale rispetto a quello della proposizione A.

Si ha dunque che:

- per ogni proposizione A c'è una proposizione $\neg A$
- $\neg\neg A$ è esattamente A , ossia scriviamo $\neg\neg A = A$
- il valore di $\neg A$ dipende dal valore di A secondo la seguente tabella, nella quale nella prima colonna sono posti i possibili valori di A e in ogni riga ad ogni possibile valore di A viene indicato il corrispondente valore di $\neg A$:

A	$\neg A$
0	1
1	0

Quando A viene intesa come un bit (dunque A è in uno e uno solo tra due stati possibili), allora $\neg A$ viene inteso come *un altro bit che deve essere nello stato duale* rispetto a quello di A (ad esempio, con A posso indicare una lampadina, e con $\neg A$ allora indico una lampadina che deve sempre avere lo stato duale rispetto a quello di A, la lampadina *duale* ad A, quella che è accesa quando A è spenta ed è spenta quando A è accesa). E' ovvio che allora con $\neg\neg A$ sto indicando di nuovo A, e che lo stato di A è correlato allo stato di $\neg A$ secondo la tabella precedente: se A è nello stato 0 allora $\neg A$ è nello stato 1, se A è nello stato 1 allora $\neg A$ è nello stato 0. Ad esempio, se A indicava una lampadina *accesa* allora $\neg A$ è una lampadina *spenta*; se A indicava una lampadina *spenta* allora $\neg A$ è una lampadina *accesa*.

Talvolta la negazione classica, specialmente quando essa opera su bit qualsiasi che possono variare il loro stato nel tempo e viene intesa come un passaggio di un bit da uno stato all'altro (in istanti diversi del tempo), viene denotata da NOT.

In particolare, un circuito che permette di tasformare un bit A in un bit che è 1 se A era 0 ed è 0 se A era 1, secondo questa lettura della tabella della negazione classica, viene chiamato *circuito* NOT.

Ciascun interruttore, che fa passare da acceso a spento e da spento ad acceso, è un circuito NOT.

Esempi

- la negazione di "Giovanni dorme" sembra essere "Giovanni è sveglio", e ovviamente allora la negazione di "Giovanni è sveglio" è la proposizione "Giovanni dorme";
- la negazione di "$3 + 2 = 5$" in aritmetica è "$3 + 2 \neq 5$", e la negazione di "$3 + 2 \neq 5$" è proprio la proposizione "$3 + 2 = 5$";
- la negazione di "$3 + 2 < 5$" in aritmetica è "$3 + 2 \geq 5$", e la negazione di "$3 + 2 \geq 5$" è "$3 + 2 < 5$";
- la negazione di "ogni uomo è simpatico" sembra essere (e la logica lo confermerà) "qualche uomo è antipatico", e ovviamente allora la negzione di "qualche uomo è antipatico" è "ogni uomo è simpatico".

Esercizi

Si cerchi qual è la negazione di proposizioni prive di concetti logici, e anche la negazione di proposizioni contenenti concetti logici.

2.3.2 La dualità tra dimostrazione e refutazione

La negazione classica permette di stabilire una dualità tra dimostrazione e refutazione di una proposizione, e questa dualità ci permette di fare a meno delle refutazioni o delle dimostrazioni.

Infatti, scopriamo che per qualunque proposizione A si prenda:

- se $x : \ \vdash A$ allora $x : \neg A \vdash$ (se una cosa è dimostrazione di A allora è anche refutazione di $\neg A$)
- se $x : A \vdash$ allora $x : \ \vdash \neg A$ (se una cosa è refutazione di A allora è anche dimostrazione di $\neg A$
- se $x : \ \vdash \neg A$ allora $x : A \vdash$ (se una cosa è dimostrazione di $\neg A$ allora è anche refutazione di A)
- se $x : \neg A \vdash$ allora $x : \ \vdash A$ (se una cosa è refutazione di $\neg A$ allora è anche una dimostrazione di A)

Ciò segue da quanto abbiamo detto sopra, e lo facciamo vedere per il secondo e il terzo dei quattro casi sopra considerati:

- una dimostrazione di A è qualcosa che ci fa conoscere che il valore di A è 1, cioè è qualcosa che ci fa conoscere che il valore di $\neg A$ è 0, cioè è una refutazione di $\neg A$;
- una refutazione di A è qualcosa che ci fa conoscere che il valore di A è 0, cioè è qualcosa che ci fa conoscere che il valore di $\neg A$ è 1, cioè è una dimostrazione di $\neg A$;
- una dimostrazione di $\neg A$ è qualcosa che ci fa conoscere che il valore di $\neg A$ è 1, cioè è qualcosa che ci fa conoscere che il valore di A è 0, cioè è una refutazione di A;
- una refutazione di $\neg A$ è qualcosa che ci fa conoscere che il valore di $\neg A$ è 0, cioè è qualcosa che ci fa conoscere che il valore di A è 1, cioè è una dimostrazione di A.

Dunque, possiamo usare soltanto il concetto di "dimostrazione" e fare a meno del concetto di refutazione, poichè possiamo chiamare le refutazioni di una proposizione A "dimostrazioni di $\neg A$". Si osservi che in questa maniera una refutazione di una proposizione A è intesa come dimostrazione della proposizione A *guardata dall'altro punto di vista*, ossia della proposizione $\neg A$.

Ma possiamo anche decidere di usare soltanto il concetto di "refutazione" e fare a meno del concetto di dimostrazione, poichè possiamo chiamare le dimostrazioni di una proposizione A "refutazioni di $\neg A$". In questa maniera una dimostrazione di A è una refutazione della proposizione A *guardata dall'altro punto di vista*, ossia della proposizione $\neg A$.

Di solito si preferisce considerare soltanto le dimostrazioni, e quindi chiamare "dimostrazioni di $\neg A$" le refutazioni di A.

Esercizi

Si osservi come - assumendo la concezione classica delle proposizioni, delle dimostrazioni e delle refutazioni - ciascuna refutazione di una proposizione, considerata nel capitolo 1, possa essere vista come dimostrazione della negazione di quella proposizione.

2.3.3 La dualità nelle dimostrazioni da ipotesi

Possiamo renderci conto, ora, che vale per le dimostrazioni da ipotesi quel che abbiamo visto nel capitolo 1:

- *ogni dimostrazione di una proposizione A da una proposizione B è una dimostrazione della proposizione $\neg B$ dalla proposizione $\neg A$*, ossia

$$\text{se } x : B \vdash A \text{ allora } x : \neg A \vdash \neg B$$

- *ogni dimostrazione di una proposizione $\neg B$ da una proposizione $\neg A$ è una dimostrazione di A da B*, ossia

$$\text{se } x : \neg A \vdash \neg B \text{ allora } x : B \vdash A$$

Infatti una dimostrazione di A da B :

- letta dal basso verso l'alto fa passare dalla falsità di A alla falsità di B, e dunque *è qualcosa che fa passare dalla verità di $\neg A$ alla verità di $\neg B$*,
- letta dall'alto verso il basso fa passare dalla verità di B alla verità di A, e dunque è qualcosa che fa passare dalla falsità di $\neg B$ alla falsità di $\neg A$.

Perciò, una dimostrazione di A da B è anche una dimostrazione di $\neg B$ da $\neg A$.

Analogamente, una dimostrazione di $\neg B$ da $\neg A$:

- letta dal basso verso l'alto fa passare dalla falsità di $\neg B$ alla falsità di $\neg A$, e dunque *è qualcosa che fa passare dalla verità di B alla verità di A,*
- letta dall'alto verso il basso fa passare dalla verità di $\neg A$ alla verità di $\neg B$, e dunque è *qualcosa che fa passare dalla falsità di A alla falsità di B.*

Perciò una dimostrazione di $\neg B$ da $\neg A$ è una dimostrazione di A da B.

Quanto abbiamo detto è davvero importante. Spesso, quando si vuol dimostrare A dall'ipotesi B, si preferisce mostrare una dimostrazione di $\neg B$ da $\neg A$: in realtà, quella è essa stessa una dimostrazione di A da B, basta leggerla dal basso verso l'alto, dalla conclusione alla premessa.

Inoltre, una dimostrazione di A da B, in logica classica, è qualcosa che ci fa conoscere che *almeno una fra le due proposizioni $\neg B$ e A è "vera"*, senza che questo comporti di sapere quale è "vera". Infatti, le due proposizioni $\neg B$ e A non possono essere entrambe false: se lo fossero, si avrebbe che B è vera mentre A è falsa, ma la dimostrazione di A da B assicura che quando B è vera deve essere vera anche A. Usando la terminologia introdotta nel capitolo 1, possiamo dire allora che una dimostrazione di A da B è una dimostrazione dell'interazione tra $\neg B$ e A, ossia è una dimostrazione di $\vdash \neg B, A$.

Esercizi

Si cerchi di vedere le dimostrazioni da ipotesi, considerate nel capitolo 1, come dimostrazioni dalla negazione della conclusione alla negazione dell'ipotesi, e come dimostrazioni che almeno una fra la conclusione e la negazione dell'ipotesi deve essere vera.

2.4 Principi e regole

2.4.1 Il principio fondamentale

Si consideri una qualunque proposizione A, intesa secondo la concezione classica, e la sua negazione $\neg A$.

Cosa possiamo dire su queste due proposizioni?

Innanzitutto, non è detto che noi conosciamo il valore di A e quindi il valore di $\neg A$, o viceversa, ossia che noi possediamo una dimostrazione di A o una dimostrazione di $\neg A$ (una refutazione di A). Ci sono tante proposizioni delle quali non conosciamo nè una dimostrazione nè una refutazione. Nella scienza ci si comporta come se, data una proposizione A, o si troverà una sua dimostrazione o si troverà una sua refutazione (una dimostrazione della sua negazione $\neg A$), e di fatto per tante proposizioni A prima o poi si è trovata una dimostrazione di A o una dimostrazione di $\neg A$. Ma ciò non ci autorizza affatto a concludere che *per ogni proposizione A prima o poi si troverà o una dimostrazione di A oppure una dimostrazione di $\neg A$.*

Ma possiamo dire, davanti alle due proposizioni A e $\neg A$, semplicemente guardando la tabella della negazione classica:

- che *almeno una delle due deve essere vera* , il che è la stessa cosa che *almeno una delle due deve essere falsa*, anche senza sapere *quale delle due è vera* o *quale delle due è falsa;*

- che *non possono essere entrambe vere*, il che è la stessa cosa che *non possono essere entrambe false*;

- *dall'ipotesi che una delle due è falsa, posso concludere che l'altra deve essere vera*, e ossia dalla falsità di $\neg A$ posso concludere la verità di A e dalla falsità di A posso concludere la verità di $\neg A$, ossia dalla verità di A posso concludere la verità di A e dalla falsità di A posso concludere la falsità di A, ossia *esiste una dimostrazione logica di A da A.*

Si noti che le tre affermazioni sono equivalenti. Dire "almeno una delle due deve essere vera" è la stessa cosa che dire "non possono essere entrambe false", ed è la stessa cosa che dire "se una delle due fosse falsa allora l'altra deve essere vera".

Si noti ancora che le stesse affermazioni possiamo fare davanti a due scatole, ciascuna delle quali possa essere *piena* o *vuota* (ossia ciascuna di esse può essere nello stato *pieno* o nello stato *vuoto,* ma non in entrambi gli stati), quando la loro etichetta dice che l'una ha lo stato opposto a quello dell'altro, ossia quando l'una è etichettata da A e l'altra è etichettata da $\neg A$:

- almeno una delle due deve essere *piena*, ossia *almeno una delle due deve essere vuota*,

- non possono essere entrambe piene, ossia non possono essere entrambe vuote,

- dall'ipotesi che una delle due è vuota, posso concludere che l'altra deve essere piena.

Le tre affermazioni relativamente ad una qualsiasi proposizione A e alla sua negazione $\neg A$ sono i tre principi fondamentali della logica classica:

- *principio del terzo escluso*, “Almeno una tra A e $\neg A$ deve essere vera”, “o è vera A o è vera $\neg A$, e non c'è una terza possibilità”, “Almeno una tra tra A e $\neg A$ deve essere falsa”, “o è falsa A o è falsa $\neg A$, e non c'è una terza possibilità”
- *principio di non-contraddizione*, “A e $\neg A$ non possono essere entrambe vere”, “A e $\neg A$ non possono essere entrambe false”
- *principio di identità* , “dall'ipotesi che una di esse è falsa, segue che l'altra è vera”, “esiste una dimostrazione logica di A da A”.

Poichè le tre affermazioni sono equivalenti, possiamo dire che i tre principi sono ciascuno una particolare maniera di leggere un unico principio, il princpio fondamentale della logica classica, il rapporto tra una proposizione e la sua negazione classica. Questo unico principio è ben espresso dicendo: c'è una interazione tra $\neg A$ e A, ossia $\vdash \neg A, A$.

2.4.2 La regola fondamentale

Consideriamo una dimostrazione di una proposizione B dalla ipotesi A. Come abbiamo visto, questa dimostrazione ci permette

- di conoscere che B è vera quando sappiamo che A è vera, ossia di produrre una dimostrazione di B in presenza di una dimostrazione di A; infatti, la dimostrazione di B da A preserva la verità dall'ipotesi alla conclusione, ed essendo vera l'ipotesi deve essere vera anche la conclusione B;
- di conoscere che A è falsa quando sappiamo che B è falsa, ossia di produrre una refutazione di A (cioè una dimostrazione di $\neg A$) in presenza di una refutazione di B (cioè di una dimostrazione di $\neg B$); infatti, la dimostrazione di B da A preserva la falsità dalla conclusione all'ipotesi, ed essendo falsa la conclusione deve essere falsa anche l'ipotesi A.

Possiamo riformulare tutto ciò dicendo che ci sono due *regole* che permettono di ottenere una dimostrazione da due dimostrazioni:

- la regola

$$\text{se} \vdash A \text{ e } A \vdash B \text{ allora} \vdash B$$

"se c'è una dimostrazione di A , e c'è una dimostrazione di B da A, allora c'è una dimostrazione di B" che è detta *regola del modus ponens* e che può anche essere espressa dicendo "se A è vera e c'è una dimostrazione di B da A, allora anche B è vera" ;

- la regola

$$\text{se} \vdash \neg B \text{ e } A \vdash B \text{ allora} \vdash \neg A$$

"se c'è una dimostrazione di $\neg B$, e c'è una dimostrazione di B da A, allora c'è una dimostrazione di $\neg A$" che è detta *regola del modus tollens* e che può anche essere espressa dicendo "se B è falsa, e c'è una dimostrazione di B da A, allora A è falsa".

La regola del modus ponens è una regola fondamentale della logica: essa è usata quando, avendo trovato una dimostrazione di B da A, e venendo a conoscere la verità di A, si conclude che B è vera.L'uso dei *lemmi* è in realtà l'uso della regola del modus ponens: si dimostra B da A, dove A è un *lemma* (cioè qualcosa che si era già dimostrato o che si dovrà dimostrare), e si conclude che Bè vera quando il lemma è stato dimostrato.

La regola del modus tollens è anch'essa una regola fondamentale della logica: essa è usata quando, avendo trovato una dimostrazione di B da A, e venendo a conoscere la falsità di B, si conclude che A è falsa, cioè si refuta A. Le refutazioni delle ipotesi avvengono per lo più in questa maniera: un'ipotesi viene refutata attraverso una dimostrazione che da quella ipotesi arriva ad una conclusione falsa.

Vedremo più avanti come queste due regole possono essere considerate come casi particolari di un'unica regola fondamentale, la *regola generale di comunicazione tra input e output* chiamata *regola del taglio.*

Esercizio

Si verifichi, applicando le regole del modus ponens e del modus tollens, che:

- da una dimostrazione di A e da una dimostrazione di $\neg B$ da A si ottiene una dimostrazione di $\neg B$
- da una dimostrazione di B e da una dimostrazione di $\neg B$ da A si ottiene una dimostrazione di $\neg A$
- da una dimostrazione di $\neg A$ e da una dimostrazione di B da $\neg A$ si ottiene una dimostrazione di B

- da una dimostrazione di $\neg B$ e da una dimostrazione di B da $\neg A$ si ottiene una dimostrazione di A
- dimostrazione di $\neg A$ e da una dimostrazione di $\neg B$ da $\neg A$ si ottiene una dimostrazione di $\neg B$
- da una dimostrazione di B e da una dimostrazione di $\neg B$ da $\neg A$ si ottiene una dimostrazione di A .

Capitolo 3

Logica classica: connettivi principali

Quando si hanno due proposizioni A e B, possiamo sempre formare una nuova proposizione mediante l'uso dei *connettivi proposizionali* quali

- la *congiunzione* "... e ... " , e così formare la proposizione "A e B"
- la *disgiunzione* "... oppure ...", e così formare la proposizione "A oppure B"
- l'*implicazione* "se... allora...", e così formare la proposizione "se A allora B"
- l'*equivalenza* "... se e soltanto se...", e così formare la proposizione "A se e soltanto se B".

Potremmo considerare altri connettivi proposizionali che fanno passare da due proposizioni a una nuova proposizione, e anche immaginare altri connettivi proposizionali che potrebbero far passare da più di due proposizioni a una nuova proposizione. Ma quelli sopra ricordati sono davvero i connettivi proposizionali più diffusi, e li vogliamo chiamare *connettivi principali.* Essi sono *connettivi binari* in quanto permettono di formare una proposizione a partire da *due* proposizioni. Un connettivo che permettesse di formare una proposizione a partire da tre proposizioni si chiamerebbe *ternario*, e in generale un connettivo che permettesse di formare una proposizione a partire da n proposizioni si chiamerebbe n-ario; dei connettivi n-ari parleremo in un capitolo successivo.

Quando due proposizioni A, B vengono connesse da un connettivo binario per formare una nuova proposizione (ad esempio "A e B"), si intende trasmettere un'informazione su come è stata ottenuta una prova della intera proposizione a partire da una o più dimostrazioni che coinvolgono A e B, o un'informazione su come va cercata una prova di quella proposizione, o un'informazione su come va usata nelle dimostrazioni quella proposizione, o un'informazione su come va trattata quella proposizione nel corso di un dibattito.

La logica deve fissare il significato di questi connettivi, e in particolare:

- fissare come ciascun connettivo trasforma due proposizioni o più proposizioni in una nuova proposizione;

- fissare qual è la *negazione* di una proposizione quando essa contiene questi connettivi;

- fissare quali sono le *regole* per dimostrare una proposizione quando essa contiene questi connettivi e quali sono le *regole* per usare nelle dimostrazioni una proposizione quando essa contiene questi connettivi.

Si tenga conto che la risposta alla domanda "cosa è un connettivo?" dipende dalla risposta che la logica ha dato alla domanda "cosa è una proposizione?". Ad esempio, se una proposizione fosse intesa come una classe di costruzioni, allora un connettivo dovrà essere qualcosa che trasforma due classi di costruzioni in una nuova classe di costruzioni.

Si tenga conto anche che, nel linguaggio, mediante i connettivi si possono formare *proposizioni linguisticamente sempre più lunghe*: infatti, linguisticamente la proposizione "A e B" è più lunga della proposizione A e più lunga della proposizione B. E dunque non si può concepire una proposizione la cui lunghezza sia la massima possible: se ci fosse, chiamiamola A e allora la congiunzione di A con qualunque altra proposizione B ossia la proposizione "A e B" sarebbe più lunga di A.

In questo capitolo fisseremo il significato dei principali connettivi in logica classica. In un capitolo successivo vedremo che in logica classica *tutti i connettivi* si possano definire a partire dalla negazione classica e da due soli connettivi principali: la congiunzione classica e la disgiunzione classica.

3.1 Definizione dei connettivi principali

In logica classica, ciascuna proposizione è un valore di verità e nient'altro che un valore di verità.

Dunque, in logica classica, un connettivo che fa passare da una proposizione A e da una proposizione B a una nuova proposizione (ad esempio la proposizione "A e B") sarà definito quando si risponderà alla domanda "quando è vera la proposizione ottenuta da A e da B mediante quel connettivo?" o alla domanda "quando è falsa la proposizione ottenuta da A e da B mediante quel connettivo?". Si noti che, rispondere a una domanda, è anche rispondere all'altra: infatti, una proposizione è vera in tutti i casi in cui *non* è falsa, ed è falsa in tutti i casi in cui *non* è vera. Per alcuni connettivi è più semplice dare la risposta alla domanda "quando è vera la proposizione ottenuta da A e da B mediante quel connettivo?", per altri è più semplice dare la risposta alla domanda "quando è falsa la proposizione ottenuta da A e B mediante quel connettivo?"

Inoltre, il valore di verità di una proposizione dipende esclusivamente dai concetti presenti nella proposizione stessa. Dunque, in logica classica, il valore della proposizione ottenuta da A e B mediante un connettivo non potrà dipendere che dal valore di verità di A e dal valore di verità di B: ogni altra informazione su A e su B deve essere bandita, ad esempio lo spazio, il tempo, la causalità, ecc.

Questa concezione dei connettivi, propria della logica classica, viene detta

- *estensionale,* in quanto si occupa soltanto del valore delle proposizioni,
- *vero-funzionale*, in quanto il valore di una proposizione ottenuta da due proposizioni mediante un connettivo viene fatto dipendere unicamente dai valori delle due proposizioni.

Poichè per definire un connettivo binario in logica classica bisogna considerare tutte le possibili combinazioni in cui possono stare due proposizioni con il loro valore di verità, ci dobbiamo chiedere quali e quante sono, data una proposizione A e una proposizione B, i possibili valori in cui possono stare A e B? La risposta è analoga a quella che ovviamente diamo alla domanda: come possono essere due lampadine qualsiasi?

Ciascuna proposizione (ciascuna lampadina) può essere o 0 o 1, e in ciascuno di questi casi l'altra proposizione (l'altra lampadina) può essere 0 o 1.

I casi possibili sono dunque quattro:

- le due proposizioni sono entrambe 0, cioè i valori di A e B formano la coppia $0, 0$
- A è 0 e B è 1, cioè i valori di A e B formano la coppia ordinata $0, 1$
- A è 1 e B è 0, cioè i valori di A e B formano la coppia ordinata $1, 0$
- le due proposizioni sono entrambe 1, cioè i valori di A e B formano la coppia $1, 1$.

Dunque, per definire un connettivo binario ci basta conoscere in quali di questi casi esso produce una proposizione vera, o in quali di questi casi esso produce una proposizione falsa.

Così per definire un connettivo binario basta riempire l'ultima colonna di questa tabella con valori di verità, dove ciascuna riga indica uno dei quattro casi possibili dei valori di due proposizioni A, B e il valore di verità che compare su una riga nell'ultima colonna indica il valore della proposizione ottenuta da A e B mediante quel connettivo quando i valori di A e B sono come nelle prime due colonne della riga.

A	B	$A \ldots B$
0	0	...
0	1	...
1	0	...
1	1	...

Due connettivi binari saranno particolarmente importanti: la *congiunzione classica* (ossia il significato che la logica classica dà alla "e" tra due proposizioni) e la *disgiunzione classica* (ossia uno dei due significati che la logica classica dà a "oppure" tra due proposizioni): attraverso essi e la negazione sono definibili tutti gli altri connettivi principali e - come vedremo in un capitolo successivo - anche *tutti i possibili connettivi.*

3.1.1 La congiunzione classica

Per definire come va intesa in logica classica la congiunzione "e", formuliamo la domanda: in matematica, nella parte teorica delle scienze, e dovunque le proposizioni sono considerate relativamente ad un istante o a un punto spaziale, *quando una proposizione "A e B" è considerata "vera" (ossia con valore* 1*) ?*

La risposta viene immediata: *quando sia A che B sono "vere" (ossia, quando entrambe hanno il valore* 1*)*.

Negli altri casi una proposizione "A e B" è ritenuta "falsa" (ossia con valore 0); non essendoci gradazione di falsità, non possiamo distinguere il caso in cui sia A che B sono false dal caso in cui una delle due è vera e l'altra è falsa.

La congiunzione tra due proposizioni intesa in questa maniera è chiamata *congiunzione classica* ed è denotata dal simbolo

$$\wedge$$

Così, quando A e B sono proposizioni intese secondo la logica classica, con "$A \wedge B$" indichiamo la proposizione "A e B" intesa secondo la logica classica con la "e" nel senso della congiunzione classica. (E' dunque utile, anche se non necessario, usare il simbolo $\wedge$ ogniqualvolta il significato di una congiunzione tra proposizioni è la congiunzione classica).

Perciò, il comportamento della congiunzione classica è fissato da questa tabella, nella quale ciascuna riga indica uno dei quattro casi possibili dei valori di due proposizioni A, B e il valore di verità che compare su una riga nell'ultima colonna indica il valore della proposizione "$A\wedge$ B" quando i valori di A e B sono come nelle prime due colonne della riga:

A	B	$A\wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Si noti, osservando la tabella, che:

- il valore di $A \wedge B$ è nient'altro che il prodotto aritmetico del valore di A e del valore di B, ossia il prodotto aritmetico limitato all'insieme $\{0, 1\}$. In questo senso, si dice che $\wedge$ è un *prodotto logico*.
- intendendo 0 minore di 1, $A \wedge B$ è il minore tra i due valori A e B.

Un circuito che, dati due bit in ingresso, produce in uscita un bit e che si comporta secondo la tabella della congiunzione classica $\wedge$ (ossia produce un 1 solo quando i bit in ingresso sono entrambi 1) è detto *circuito AND* oppure *rete AND*.

Dunque, in logica classica, in coerenza con la concezione aspaziale e atemporale delle proposizioni, il valore della proposizione $A \wedge B$ non dipende da condizioni spaziali o temporali. Così, nella logica classica non può essere considerato il significato che spesso diamo alla congiunzione "e" tra proposizioni *empiriche,* quando ad esempio con "A e B" intendiamo che ciò che è espresso da A "viene prima" di ciò che è espresso da B ed entrambi i fatti si verificano, o quando con "A e B" intendiamo che ciò che è espresso da A viene compiuto in cooperazione o insieme con ciò che è espresso da B.

In un capitolo successivo saranno studiate alcune proprietà importanti del connettivo $\wedge$.

Esercizi

Considera proposizioni della forma "A e B" che possono essere intese secondo la logica classica.

3.1.2 La disgiunzione classica e l'alternativa classica.

Ci sono due maniere di intendere la disgiunzione "oppure", in matematica, nella parte teorica delle scienze e dovunque le proposizioni sono considerate relativamente ad un istante o a un punto dello spazio.

Per definire queste maniere, formuliamo la stessa domanda che ci siamo posti per la congiunzione ma sostituendo "vero" con "falso". In matematica, nella parte teorica delle scienze, e dovunque le proposizioni sono considerate relativamente ad un istante o a un punto spaziale, *quando una proposizione "A oppure B" è considerata "falsa" (ossia con valore 0)?*

Due sono le risposte possibili:

- *quando sia A che B sono "false " (ossia hanno il valore 0)*
- *quando A e B hanno lo stesso valore.*

Quando si dà la prima risposta, si sta intendendo la disgiunzione nel senso della parola latina "*vel*". In questo senso, ad esempio, è intesa la disgiunzione "ti dò un libro oppure ti dò un pacchetto di cioccolatini" quando essa è ritenuta falsa se sono false entrambe le proposizioni "ti dò un libro" e " ti dò un pacchetto di cioccolatini".

Quando si dà la seconda risposta, si sta intendendo la disgiunzione nel senso della parola latina "*aut*". In questo senso, ad esempio, è intesa la disgiunzione "ti dò un libro oppure ti dò un pacchetto di cioccolatini" quando essa è ritenuta falsa non solo se tutte e due le proposizioni "ti dò un libro" e " ti dò un pacchetto di cioccolatini" sono false ma anche se esse sono entrambe vere.

In coerenza con la concezione aspaziale e atemporale delle proposizioni, propria della logica classica, il valore di "A oppure B" in logica classica non può dipendere da condizioni spaziali o temporali. Così, nella logica classica non è considerato il significato che spesso diamo alla disgiunzione "oppure" tra proposizioni *empiriche,* quando ad esempio diciamo "A oppure B" intendendo che ciò che è espresso da A "viene prima" di ciò che è espresso da B, e che uno dei due si verifica, o quando diciamo "A oppure B" intendendo che uno dei due si verifica e che esso dipende dall'altro.

3.1.2.1 Disgiunzione classica

Diamo la prima risposta ("entrambe sono false") alla domanda "quando una disgiunzione tra due proposizioni è falsa?", ossia consideriamo "oppure" nel senso latino di "vel".

Questa risposta comporta che una proposizione "A oppure B" è ritenuta "vera" in tutti gli altri casi, ossia quando A e B non sono entrambe false. Non essendoci una gradazione di verità in logica classica, non possiamo distinguere il caso in cui sia A che B sono vere dal caso in cui una delle due è vera e l'altra è falsa.

Così inteso, il connettivo "oppure" è chiamato *disgiunzione classica* ed è denotato dal simbolo

$$\vee$$

che è l'opposto, il duale, del simbolo $\wedge$ usato per la congiunzione classica (così-come la maniera con cui l'abbiamo considerato è nient'altro che il duale di quella con cui abbiamo considerato la congiunzione classica). E' utile, anche se non necessario, usare tale simbolo ogniqualvolta il significato di una disgiunzione tra enunciati è la disgiunzione classica.

La *disgiunzione classica* è dunque definita dalla seguente tabella, nella quale ciascuna riga indica uno dei quattro casi possibili dei valori di due proposizioni A, B e il valore di verità che compare su una riga nell'ultima colonna indica il valore della proposizione "$A \vee B$" quando i valori di A e B sono come nelle prime due colonne della riga:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Si noti che:

- eccetto quando A e B sono 1, $A \vee B$ è nient'altro che la somma aritmetica di A e di B. In questo senso si dice che $\vee$ è una *somma logica*
- intendendo 0 minore di 1, $A \vee B$ è il maggiore dei due valori A e B.

Un circuito che, dati due bit in ingresso, produce in uscita un bit e che si comporta secondo la tabella della disgiunzione classica $\vee$ (ossia produce uno 0 solo quando i bit in ingresso sono entrambi 0) è detto *circuito OR* oppure *rete OR*.

In un capitolo successivo saranno studiate le puiù importanti proprietà del connettivo $\vee$.

Esercizi

Considera proposizioni della forma "A oppure B" che possono essere intese secondo la logica classica, e accerta se in tali proposizioni l"'oppure" debba essere inteso come la disgiunzione classica.

3.1.2.2 Alternativa classica

Diamo ora la seconda risposta (" quando hanno lo stesso valore") alla domanda "quando una disgiunzione di due proposizioni è falsa?", ossia intendiamo l' "oppure" nel senso della parola latina "aut". Ciò comporta che negli altri casi (cioè quando A e B hanno valore diverso) una proposizione "A oppure B" è ritenuta "vera" (ossia con valore 1). Cosìinteso, il connettivo "oppure" è chiamato *alternativa classica* o *disgiunzione esclusiva,* e sarà da noi indicato con *aut.*

L'*alternativa classica* è dunque definita dalla seguente tabella, nella quale ciascuna riga indica uno dei quattro casi possibili dei valori di due proposizioni A, B e il valore di verità che compare su una riga nell'ultima colonna indica il valore della proposizione "A aut B" quando i valori di A e B sono come nelle prime due colonne della riga:

A	B	A aut B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Si noti che, eccetto quando A e B sono 1, A aut B è nient'altro che la somma aritmetica di A e di B, e perciò si usa talvolta indicare il connettivo *aut* con il simbolo $\oplus$.

Un circuito che, dati due bit in ingresso, produce in uscita un bit e che si comporta secondo la tabella della alternativa classica "aut" (ossia produce 0 solo quando i bit in ingresso sono nello stesso stato) è detto *circuito EXOR* oppure *rete EXOR.*

Infine si noti che per ogni possibile valore di A e di B:

$$A \text{ aut } B = (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)$$

A	B	$A\text{aut}B$	$A \wedge \neg B$	$B \wedge \neg A$	$(A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)$
0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0

Ossia la *alternativa classica è definibile a partire dalla negazione classica, dalla disgiunzione classica e dalla congiunzione classica.*

D'ora in poi, ci converrà leggere sempre una alternativa classica A aut B come $(A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)$.

Esercizi

Considera proposizioni della forma "A oppure B" che possono essere intese secondo la logica classica, e accerta se in tali proposizioni l'' 'oppure" debba essere inteso l'alternativa classica.

3.1.3 L'implicazione classica

Il significato assegnato dalla logica classica al connettivo "se ... allora ..." non può in alcun modo comprendere un significato che spesso vogliamo attribuirgli, ossia una sorta di *dipendenza* di una proposizione da un'altra, di *causalità* fra due proposizioni. Infatti, quando diciamo "se A allora B" e le due proposizioni A, B esprimono fatti empirici o eventi, vogliamo esprimere con tale proposizione che "B dipende da A" o che "A è causa di B". Ma un rapporto di dipendenza, di causalità, non può darsi tra i valori di verità, che sono il significato possibile delle proposizioni in logica classica, ossia nella parte teorica di ogni disciplina scientifica.

Il significato che la logica classica attribuisce al connettivo "se... allora ..." consiste nella risposta alla domanda: quando *è falsa* la proposizione "se A allora B", dove A e B sono proposizioni nel senso della logica classica?

La risposta è quella che viene immediata, quando si osserva ciò che si fa nella parte teorica di ogni disciplina scientifica, o ciò che si fa nella nostra vita quotidiana, davanti ad una proposizione "se A allora B" (ad esempio: "se sei bravo, allora ti dò un premio"): una tale proposizione è ritenuta falsa in un unico caso, quando A è vera e B è falsa (nell'esempio, quando "sei bravo" è vera, e "ti dò un premio" è falsa). Negli altri casi, un tale enunciato non è ritenuto falso, e dunque in logica classica deve essere per forza ritenuto vero, anche se non c'è nessun rapporto di dipendenza o di causalità tra A e B.

Il connettivo "se... allora ..." cosìinteso in logica classica viene denominato *implicazione classica* e viene denotato da $\rightarrow$; esso è definito dalla seguente tabella nella quale ciascuna riga indica uno dei quattro casi possibili dei valori di due proposizioni A, B e il valore di verità che compare su una riga nell'ultima colonna indica il valore della proposizione "$A \rightarrow B$" quando i valori di A e B sono come nelle prime due colonne della riga:

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Alcune importanti osservazioni sulla *implicazione classica:*

- intendendo 0 minore di 1, $A \rightarrow B$ è 1 quando il valore di B non è minore di quello di A, ed è 0 quando il valore di B è minore di quello di A;

- per ogni valore di A e di B

$$A \to B = \neg A \vee B$$

ossia il connettivo $\to$ è *definibile* a partire dal connettivo $\neg$ e dal connettivo $\vee$. Infatti, quando A è 1 e B è 0, $A \to B$ è 0 e anche $\neg A \vee B$ è 0 (poichè sia la negazione di A che B sono 0); negli altri tre casi, $A \to B$ è 1 e anche $\neg A \vee B$ è 1 (poichè uno almeno fra $\neg A$ e B è 1);

Dunque, in logica classica, date due proposizioni A e B, la proposizione "se A allora B" (scritta anche $A \to B$) è nient'altro che la proposizione $\neg A \vee B$.

Così, *ci conviene d'ora in poi leggere sempre una proposizione* $A \to B$ *come*

$$\neg A \vee B$$

Si noti che, se ho una proposizione $A \vee B$, la posso vedere come un'implicazione $\neg A \to B$ (basta riflettere che $A = \neg\neg A$, e dunque $A \vee B$ è $\neg\neg A \vee B$, cosicchè $A \vee B$ è $\neg A \to B$).

Si noti infine che

- in una implicazione $A \to B$ la proposizione A è detta *antecedente* e la proposizione B è detta *conseguente*;
- quando la proposizione $A \to B$ ("se A allora B") è vera, si usa dire che la proposizione A è *condizione sufficiente per* la proposizione B mentre la proposizione B è *condizione necessaria per* la proposizione A .

Esercizi

Considera proposizioni della forma "se A allora B" che possono essere intese secondo la logica classica, e trasformale in proposizioni della forma $\neg A \vee B$.

3.1.4 L'equivalenza classica

Il connettivo "... se e soltanto se ... " viene molto usato nelle scienze, e spesso lo troviamo abbreviato per comodità in "... sse ... " (in inglese: "... iff ...", in francese: "... ssi ...").

In qualunque ambito conoscitivo, se le proposizioni sono considerate come espressioni di valori di verità, una proposizione "A sse B" è ritenuta *vera* quando il valore di A è lo stesso che il valore di B (ossia quando le due proposizioni sono entrambe vere oppure sono sono entrambe false), donde il nome di *equivalenza* *classica* che designa tale locuzione connettivante; ed è ritenuto falsa negli altri casi.

Il connettivo "... sse ..." con questo significato è chiamato *equivalenza classica* ed è denotato dal simbolo $\leftrightarrow$; esso è definito dalla seguente tabella:

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Alcune osservazioni su questa tabella, ossia sul connettivo *equivalenza classica*:

- $A \leftrightarrow B$ è 1 quando il valore di A è uguale al valore di B, ed è 0 quando il valore di A è diverso dal valore di B;

- Per ogni valore di A e di B,

$$A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

  ossia

$$A \leftrightarrow B = (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$$

  Ciò vuol dire che *il connettivo $\leftrightarrow$ è definibile a partire dai connettivi* $\neg, \wedge, \vee$.

Ci conviene d'ora in poi leggere sempre una proposizione $A \leftrightarrow B$ come

$$(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$$

Esercizi

- Considera proposizioni della forma "A se e soltanto se B" che possono essere intese secondo la logica clasica, e trasformale in proposizioni della forma $(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$.

- Verifica che per ogni possibile valore di A e di B, $A \leftrightarrow B$ ha lo stesso valore di $(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$.

- Considera proposizioni della forma "A se e soltanto se B" che possono essere intese secondo la logica clasica, e trasformale in proposizioni della forma $(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$.

- Scrivi qualche proposizione ottenuta da tre proposizioni A, B, C usando almeno due dei connettivi principali della logica classica, e calcola il valore della proposizione per ogni possibile valore di A, B, C.

- Scrivi qualche proposizione ottenuta da quattro proposizioni A, B, C, D usando almeno tre dei connettivi principali della logica classica, e calcola il valore della proposizione per ogni possibile valore di A, B, C, D.

- Per quali valori di A, B, C, D la proposizione $((A \to B) \wedge C) \vee ((B \to A) \wedge D)$ ha il valore 0?

3.2 La negazione e i principali connettivi

Per ciascuno dei connettivi principali sopra considerati, la logica classica risponde alla domanda: qual è la sua negazione?

Focalizziamo questa questione.

Date due proposizioni A e B, noi possiamo formare una nuova proposizione mediante uno dei connettivi: $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \to B$, $A \leftrightarrow B$, A aut B. Queste proposizioni sono ottenute eseguendo un'operazione, un connettivo, a partire da A e da B; e vedremo che una dimostrazione di ciascuna di queste proposizioni consiste nell'operare su una o due dimostrazioni che coinvolgono le proposizioni A, $\neg A$, B, $\neg B$.

Ora consideriamo la negazione classica di ciascuna di queste proposizioni: $\neg(A \wedge B)$, $\neg(A \vee B)$, $\neg(A \to B)$, $\neg(A \leftrightarrow B)$, $\neg(A \text{ aut } B)$. Vogliamo che anche queste proposizioni siano ottenute eseguendo un'operazioe, un connettivo, a partire da A o da $\neg A$ e da B o da $\neg B$, in modo che una dimostrazione di ciascuna di esse consista nell'operare su una o due dimostrazioni che coinvolgono le proposizioni A, $\neg A$, B, $\neg B$. Vogliamo che ciascuna di queste proposizioni possa essere espressa equivalentemente con una proposizione

- che *non abbia la negazione all'inizio*,

- che sia formata a partire da A o da $\neg A$, e da B o da $\neg B$, mediante uno dei connettivi.

In questa maniera abbiamo *esplicitato* cosa è la negazione di ciascuna proposizione ottenuta da due proposizioni mediante uno dei connettivi.

L'*esplicitazione* di cosa è la negazione di una proposizione è utile nel ragionamento e nella discussione: se ho formato una proposizione a partire da A e B mediante un connettivo, è utile rappresentare la negazione di tale proposizione mediante una proposizione formata mediante qualche connettivo a partire da A e da B o dalle loro negazioni.

Le *leggi della negazione*, dette anche *leggi di De Morgan*, sono la risposta che la logica classica dà a questa questione. Ossia, per ciascun connettivo, ci sarà una legge della negazione per quel connettivo.

Così, se con $\diamond$indichiamo uno dei connettivi principali, la legge della negazione per il connettivo $\diamond$ dirà come la proposizione $\neg(A \diamond B)$ possa essere espressa mediante un certo connettivo $\star$ a partire da A o da $\neg A$ e da B o da $\neg B$.

Quando si ha una legge della forma

$$\neg(A \diamond B) = \neg A \star \neg B$$

oppure della forma

$$\neg(A \diamond B) = \neg B \star \neg A$$

diciamo che i due connettivi $\diamond$ e $\star$ sono *duali.*

3.2.1 Negazione della congiunzione classica e negazione della disgiunzione classica

La legge della negazione per la congiunzione classica e la legge della negazione per la disgiunzione classica sono le più importanti leggi della negazione.

Esse fissano che:

- la negazione classica di una congiunzione classica di due proposizioni è la disgiunzione classica delle negazioni classiche delle due proposizioni,
- la negazione classica di una disgiunzione classica di due proposizioni è la congiunzione classica delle negazioni classiche delle due proposizioni.

Ossia, per ogni proposizione A e B

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$$

$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$$

Infatti, come è mostrato nelle seguenti tabelle, il valore di $\neg A \vee \neg B$ (ultima colonna della prima tabella) è il duale del valore di $A \wedge B$ (terza colonna della prima tabella) quale che sia il valore di A e il valore di B, e il valore di $\neg A \wedge \neg B$ (ultima colonna della seconda tabella) è il duale del valore di $A \vee B$ (terza colonna della seconda tabella) quale che sia il valore di A e il valore di B:

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Dunque, possiamo dire che la congiunzione classica $\wedge$ e la disgiunzione classica $\vee$ sono *connettivi duali* .

Da queste leggi discendono immediatamente le leggi della negazione per gli altri connettivi.

3.2.2 Negazione dell'implicazione classica

La legge della negazione per l'implicazione classica è: per ogni proposizione A e B

$$\neg(A \to B) = A \wedge \neg B$$

Ossia: *la negazione dell'implicazione classica di due proposizioni è la congiunzione classica della prima proposizione e della negazione della seconda proposizione.*

Si può verificare, infatti, che per ogni valore di A e di B, il valore di $\neg(A \to B)$ è sempre lo stesso che il valore di $A \wedge \neg B$.

Ma questa legge può essere ricavata dalla legge della negazione per la disgiunzione classica e dal fatto che l'implicazione classica è definibile a partire dalla disgiunzione classica e dalla negazione classica. Infatti, poichè $A \to B = \neg A \vee B$, si ha che $\neg(A \to B) = \neg(\neg A \vee B) = \neg\neg A \wedge \neg B$ usando la legge della negazione per la disgiunzione classica.

3.2.3 Negazione della alternativa classica e della equivalenza classica

La legge della negazione per l'alternativa classica e quella per l'equivalenza classica sono:

- Negazione dell'alternativa classica: per ogni proposizione A e B,

$$\neg(A \text{ aut } B) = A \leftrightarrow B$$

- Negazione dell'equivalenza classica: per ogni proposizione A e B,

$$\neg(A \leftrightarrow B) = A \text{ aut } B$$

Ossia:

- la negazione di una alternativa classica fra due proposizione è l'equivalenza classica tra le due proposizioni;
- la negazione di un'equivalenza classica tra due proposizioni è l'alternativa classica tra le due proposizioni.

Infatti, si può verificare che per ogni valore di A e di B,

$$\neg(A \text{ aut } B) = A \leftrightarrow B$$

$$\neg(A \leftrightarrow B) = A \text{ aut } B$$

Ma si può anche ricavare queste leggi della negazione da quelle della congiunzione e della disgiunzione, usando la definibilità della alternativa classica e della equivalenza classica a partire da $\wedge$, $\vee$ e $\neg$. Infatti, poichè $A \leftrightarrow B = (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$ e $A \text{ aut } B = (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)$, si ha che

$$\neg(A \leftrightarrow B) = \neg(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A) =$$

$$= (\neg\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg\neg B \wedge \neg A) = (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A) = A \text{ aut } B$$

e dunque anche $\neg(A \text{ aut } B) = A \leftrightarrow B$.

Esercizi

- Qual è la negazione classica, secondo le leggi della negazione, delle proposizioni considerate negli esercizi precedenti?

- Indica la proposizione che, secondo le leggi della negazione, è la negazione classica della proposizione

$$((\neg A \vee B) \wedge ((A \vee C) \vee D)) \wedge ((C \wedge D) \vee B)$$

3.3 Analisi delle proposizioni

Un'analisi di una proposizione A mediante i connettivi principali della logica classica consiste nel rappresentare la proposizione A mediante un'espressione ottenuta da un certo numero di proposizioni $A_1, ..., A_n$, usando soltanto i connettivi principali della logica classica.

Un'analisi di una proposizione A mediante i soli connettivi $\wedge$ e $\vee$ consiste nel rappresentare la proposizione A mediante un'espressione ottenuta da un certo numero di proposizioni $A_1, ..., A_n$, usando soltanto quei connettivi.

Un'analisi di una proposizione A si può compiere a tappe, a stadi. In ciascuno stadio, a cominciare dal primo, si eseguono queste procedure:

1. Se si vuol analizzare una proposizione e si ritiene che essa sia la stessa cosa che la proposizione $B \diamond C$ dove $\diamond$ è uno connettivi principali della logica classica, allora si scrive tale proposizione come $B \diamond C$ e si passi ad eseguire il punto 2; se non si vuol analizzare una proposizione oppure non si riesce ad analizzarla mediante i connettivi principali della logica classica, allora quella proposizione è lasciata immutata.

2. Si esegua lo stesso procedimento descritto in 1 su ciascuna delle componenti dirette della proposizione analizzata.

Ogni proposizione A quando è intesa secondo la logica classica può essere rappresentata da A stessa o da una sua analisi mediante i connnettivi principali della logica classica. La proposizione A è rappresentata da se stessa quando non si ritiene possa essere considerata come ottenuta da altre proposizioni mediante uno dei connettivi principali della logica classica.

Una volta che una proposizione A è rappresentata da una sua analisi mediante i connettivi prinicpali della logica classica, la stessa proposizione A può essere anche rappresentata da una sua analisi mediante i soli connettivi $\wedge$ e $\vee$.

Infatti, basta rimpiazzare ogni connettivo $\rightarrow$, ogni connettivo $\leftrightarrow$ e ogni connettivo "aut" con la sua definizione a partire da $\wedge$, $\vee$ e $\neg$, e poi applicare ripetutamente le leggi della negazione.

Esempio

Consideriamo la proposizione A "Giovanni e Carlo scrivono una email a Maria, se Antonio o Lucia danno la notizia attesa" e supponiamo di poterla ritenere come una proposizione nel senso della logica classica.

- *Analisi mediante i connettivi principali*

  - Possiamo pensare che A è ottenuta dalle due proposizioni B "Antonio o Lucia danno la notizia attesa" e C "Giovanni e Carlo scrivono una email a Maria" mediante il connettivo $\rightarrow$, e in tal caso possiamo dunque rappresentare A come $B \rightarrow C$ ossia possiamo rappresentare A come "Antonio o Lucia danno la notizia attesa" $\rightarrow$ "Giovanni e Carlo scrivono una email a Maria". Questa è già una analisi di A mediante i connettivi principali della logica classica.

  - A questo punto potremmo fermarci, ma possiamo andare anche avanti. Potremmo pensare che - nell'ambito della concezione della logica classica - la proposizione B "Antonio o Lucia danno la notizia attesa" è la stessa cosa che "Antonio dà la notizia attesa oppure Lucia dà la notizia attesa", ossia possiamo ritenere che B è ottenuta dalle due proposizioni D "Antonio dà la notizia attesa" e E "Lucia dà la notizia attesa" mediante il connettivo $\vee$, e dunque che B può essere rappresentata come $D \vee E$, ossia come "Antonio dà la notizia attesa" $\vee$ "Lucia dà la notizia attesa". E allora la proposizione A può essere rappresentata come $(D \vee E) \rightarrow C$ ossia come ("Antonio dà la notizia attesa" $\vee$ "Lucia dà la notizia attesa") $\rightarrow$ "Giovanni e Carlo scrivono una email a Maria". E questa è un'altra analisi più approfondita di A mediante i connettivi principali della logica classica.

  - Anche a questo punto potremmo fermarci, oppure andare avanti, e considerare la proposizione C. Potremmo pensare che - nell'ambito della concezione della logica classica - la proposizione C "Giovanni e Carlo scrivono una email a Maria" è la stessa cosa che "Giovanni scrive una email a Maria e Carlo scrive una email a Maria", ossia possiamo ritenere che C è ottenuta dalle proposizioni F "Giovanni scrive una email a Maria" e G "Carlo scrive una email a Maria" mediante il connettivo $\wedge$, e dunque che C può essere rappresentata come $F \wedge G$ ossia come "Giovanni scrive una email a Maria"$\wedge$ "Carlo scrive una email a Maria". E allora la proposizione A può essere rappresentata come

$$(D \vee E) \rightarrow (F \wedge G)$$

ossia come ("Antonio dà la notizia attesa" $\vee$ "Lucia dà la notizia attesa") $\rightarrow$("Giovanni scrive una email a Maria" $\wedge$ "Carlo scrive una email a Maria"). E questa è un'altra analisi ancora più approfondita di A mediante i connettivi principali della logica classica.

– E' ora difficile pensare che le proposizioni D, E, F, G possano essere analizzate mediante i connettivi principali della logica classica, e dunque possiamo fermarci qui.

• *Analisi mediante i soli connettivi* $\wedge$ *e* $\vee$

– Partiamo dalla rappresentazione della proposizione che abbiamo fatto mediante i connettivi principali della logica classica, nella forma

$$(D \vee E) \rightarrow (F \wedge G)$$

dove D è la proposizione "Antonio dà la notizia attesa", E è la proposizione "Lucia dà la notizia attesa", F è la proposizione "Giovanni scrive una email a Maria" e G è la proposizione "Carlo scrive una email a Maria".

– Se sostituiamo il connettivo $\rightarrow$ con la sua definizione a partire da $\vee$ e $\neg$, si ha che A può essere rappresentata da

$$\neg(D \vee E) \vee (F \wedge G)$$

– Ora applichiamo la legge della negazione della disgiunzione classica e si ha che A può essere rappresentata da

$$(\neg D \wedge \neg E) \vee (F \wedge G)$$

dove $\neg D$ è la negazione classica di D (ossia è "Antonio non dà la notizia attesa") e $\neg E$ è la negazione classica di E (ossia è la proposizione "Lucia non dà la notizia attesa").

- Dunque, la proposizione A può essere rappresentata dalla proposizione ("Antonio non dà la notizia attesa"$\wedge$"Lucia non dà la notizia attesa")$\vee$("Giovanni scrive una email a Maria" $\wedge$"Carlo scrive una email a Maria"). Si noti che questa rappresentazione di A corrisponde a dire "nè Antonio nè Lucia danno la notizia attesa, oppure Giovanni e Carlo scrivono una email a Maria".

Esercizi

- si cerchi di vedere per quali valori di D, E, F, G la proposizione A considerata nell'esempio è vera e per quali valori di D, E, F, G la stessa proposizione A è falsa

- si cerchi di analizzare altre proposizioni, il più a fondo possibile, mediante i connettivi principali della logica classica, e poi mediante i soli connettivi $\wedge$ e $\vee$

- Considera la negazione di

$$(\neg D \wedge \neg E) \vee (F \wedge G)$$

  applicando le regole della negazione.

3.4 Regole

3.4.1 Regole di dimostrazione sulla congiunzione classica

Dimostrare una congiunzione $A \wedge B$ è stabilire che essa ha valore 1 . Dunque - poichè $A \wedge B$ ha valore 1 soltanto quando sia A che B hanno valore 1- dimostrare $A \wedge B$ è stabilire che A ha valore 1 e stabilire che B ha valore 1; cioè, dimostrare $A \wedge B$ è dimostrare A e dimostrare B.

Perciò *una dimostrazione di $A \wedge B$ è formata da una coppia di dimostrazioni, una per la proposizione A e l'altra per la proposizione B, e queste dimostrazioni devono essere distinte tra loro.*

Così, ogni dimostrazione di una congiunzione di due proposizioni consiste nel presentare *due* dimostrazioni distinte, una per ciascuna delle due proposizioni.

Si noti che possiamo dire (rimpiazzando "dimostrare" con "conoscere la verità di ") che "conoscere la verità di una congiunzione $A \wedge B$ è conoscere la verità di A e conoscere la verità di B".

Dall'esame della tabella della congiunzione classica $\wedge$ si ricavano le seguenti regole sulla congiunzione classica che si possono usare nelle dimostrazioni:

1. Dalla verità di A e dalla verità di B, possiamo concludere la verità di $A \wedge B$; ossia (letta dal basso verso l'alto) dalla falsità di $A \wedge B$ possiamo concludere che una della due è falsa. La regola è rappresentata da

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}$$

2. Dalla verità di una congiunzione $A \wedge B$ possiamo concludere la verità di A; ossia (letta dal basso verso l'alto) dalla falsità di A possiamo concludere la falsità di $A \wedge B$. La regola è rappresentata da

$$\frac{A \wedge B}{A}$$

3. Dalla verità di una congiunzione $A \wedge B$ possiamo concludere la verità di B; ossia (letta dal basso verso l'alto) dalla falsità di B possiamo concludere la falsità di $A \wedge B$. La regola è rappresentata da

$$\frac{A \wedge B}{B}$$

4. Dalla verità di una congiunzione $A \wedge B$ possiamo concludere la verità sia di A che di B; ossia (letta dal basso verso l'alto) dalla falsità di almeno una delle due proposizioni A,B possiamo concludere la falsità della congiunzione $A \wedge B$. La regola è rappresentata da

$$\frac{A \wedge B}{A \quad B}$$

3.4.2 Regole di dimostrazione sulla disgiunzione classica

Dimostrare una disgiunzione $A \vee B$ è stabilire che $A \vee B$ ha valore 1.

Ora, $A \vee B$ ha valore 1quando non si dà che entrambe le proposizioni A e B hanno valore 0.

Come possiamo stabilire, dunque, che non si dà che entrambe le proposizioni hanno valore 0?

Ci sono due maniere per stabilire questo:

- mostrando che *una* delle due proposizioni A e B ha valore 1; in tal caso infatti ovviamente abbiamo fatto vedere che non sono entrambe con il valore 0;

- mostrando che *se una delle due proposizioni* ha valore 0 allora *l'altra proposizione* ha valore 1, ossia dimostrando la verità di una delle due proposizioni a partire dall'ipotesi della falsità dell'altra; in tal caso abbiamo escluso che siano entrambe false (poichè la falsità di una comporta la verità dell'altra).

Nella prima maniera di dimostrare $A \vee B$ si indica anche quale delle due proposizioni è vera, nella seconda maniera di dimostrare $A \vee B$ non si indica quale delle due proposizioni è vera.

La prima maniera di dimostrare $A \vee B$ consiste dunque nel presentare *una* dimostrazione, la quale può essere la dimostrazione di A o può essere la dimostrazione di B. Perciò, secondo la prima maniera di dimostrare $A \vee B$, una dimostrazione di $A \vee B$ può avere la seguente forma:

- essere una dimostrazione di A, che viene vista come dimostrazione di $A \vee B$

- presentare una dimostrazione di B, che viene vista come dimostrazione di $A \vee B$.

Anche la seconda maniera di dimostrare $A \vee B$ consiste nel presentare *una* dimostrazione, ma questa è una *dimostrazione da ipotesi*: è una dimostrazione che dalla falsità di una delle due proposizioni posta come ipotesi arriva alla verità dell'altra proposizione posta come conclusione. Così, una dimostrazione - nella seconda maniera - di una disgiunzione $A \vee B$ può avere una delle seguenti forme:

- essere una dimostrazione della verità di B dalla falsità di A, ossia essere una dimostrazione di B dall'ipotesi $\neg A$, che viene vista come dimostrazione di $A \vee B$

- essere una dimostrazione della verità di A dalla falsità di B, ossia essere una dimostrazione di A dall'ipotesi $\neg B$, che viene vista come dimostrazione di $A \vee B$.

Ma noi sappiamo che una dimostrazione di B dall'ipotesi $\neg A$ è essa stessa (basta leggerla dal basso verso l'alto) una dimostrazione di A dall'ipotesi $\neg B$; e una dimostrazione di A dall'ipotesi $\neg B$ è essa stessa (basta leggerla dal basso verso l'alto) una dimistrazione di B dall'ipotesi $\neg A$. Dunque possiamo dire che la seconda maniera di dimostrare una disgiunzione $A \vee B$ consiste nel presentare una dimostrazione di B da $\neg A$ (il che è la stessa cosa che presentare una dimostrazione di A da $\neg B$) e considerare tale dimostrazione come una dimostrazione di $A \vee B$.

Si noti che, poichè una dimostrazione di $A \vee B$ può semplicemente arrivare a stabilire che "una delle due proposizioni è vera" senza mostrare "quale delle due proposizioni è vera", non possiamo dire che *"dimostrare $A \vee B$" è la stessa cosa che "dimostrare A oppure dimostrare B"*, e non possiamo dire che *"conoscere la verità di $A \vee B$" è la stessa cosa che "conoscere la verità di A oppure conoscere la verità di B"*. Infatti, chiaramente dimostrare A oppure dimostrare B è anche dimostrare $A \vee B$, ma non il viceversa: basta pensare ad una dimostrazione di $A \vee B$ che consista nel dimostrare A dall'ipotesi $\neg B$.

Dall'esame della tabella della disgiunzione classica $\vee$ si ricavano le seguenti regole sulla disgiunzione classica che si possono usare nelle dimostrazioni:

1. Dalla verità di A si può concludere la verità di $A \vee B$, ossia (letta dal basso verso l'alto) dalla falsità di $A \vee B$ si può concludere la falsità di A. Tale regola è rappresentata da
$$\frac{A}{A \vee B}$$

2. Dalla verità di B si può concludere la verità di $A \vee B$, ossia (letta dal basso verso l'alto) dalla falsità di $A \vee B$ si può concludere la falsità di B. Tale regola è rappresentata da
$$\frac{B}{A \vee B}$$

3. Quando almeno una delle due proposizioni A, B è vera (ossia quando esiste una dimostrazione di B da $\neg A$, il che è la stessa cosa di una dimostrazione di A da $\neg B$) si può concludere la verità di $A \vee B$; ossia, dalla falsità di $A \vee B$ si può concludere che tutte e due le proposizioni A, B sono false (e quindi non ci può essere una dimostrazione di B da $\neg A$ e neppure una di A da $\neg B$)

4. Dalla verità di una disgiunzione $A \vee B$ non si ricava direttamente nè la verità di A nè la verità di B.

5. Dalla verità di una disgiunzione $A \vee B$ e dalla falsità di A (cioè dalla verità di $\neg A$) si può concludere la verità di B; ossia (letta dal basso verso l'alto) dalla falsità di B si può concludere che una almeno tra le proposizioni $A \vee B$ e $\neg A$ è falsa. Tale regola è rappresentata da

$$\frac{A \vee B \quad \neg A}{B}$$

6. Dalla verità di una disgiunzione $A \vee B$ e dalla falsità di B (cioè dalla verità di $\neg B$) si può concludere la verità di A; ossia (letta dal basso verso l'alto) dalla falsità di A si può concludere che una almeno tra le proposizioni $A \vee B$ e $\neg B$ è falsa. Tale regola è rappresentata da

$$\frac{A \vee B \quad \neg B}{A}$$

Esercizi

- Si mostri, usando le regole sopra indicate per il connettivo $\vee$, una dimostrazione della conclusione $A \vee C$ dalle due ipotesi $A \vee B$ e $\neg B \vee C$.

- Si mostri, usando le regole sopra indicate per i connettivi $\vee$ e $\wedge$, una dimostrazione della conclusione $A \wedge C$ dalle due ipotesi $A \wedge B$ e $\neg B \vee C$.

3.4.3 Regole di dimostrazione sugli altri connettivi principali

Dalle regole di dimostrazione per la congiunzione classica e per la disgiunzione classica discendono le regole di dimostrazione per gli altri connettivi principali, poichè - come abbiamo visto - essi sono definibili a partire dalla negazione classica, dalla congiunzione classica e dalla disgiunzione classica.

3.4.3.1 Implicazione classica

Poichè dimostrare $A \rightarrow B$ è la stessa cosa che dimostrare $\neg A \vee B$, una dimostrazione di un'implicazione classica è nient'altro che una dimostrazione di una disgiunzione classica.

Quindi, una dimostrazione di una proposizione $A \to B = \neg A \vee B$ può consistere in una di queste dimostrazioni

- nella dimostrazione di $\neg A$, ossia nella refutazione di A, vista come dimostrazione di $A \to B$
- nella dimostrazione di B, vista come dimostrazione di $A \to B$;
- nella dimostrazione di B da A (ossia dalla falsità di $\neg A$) la quale è anche dimostrazione di $\neg B$ da $\neg A$, vista come dimostrazione di $A \to B$

Si tenga conto che:

- una dimostrazione di B o una refutazione di A possono essere viste come dimostrazioni di $A \to B$, anche se ovviamente non permettono di stabilire alcuna dipendenza tra A e B;
- una dimostrazione di B da A (la quale vista dal basso è una dimostrazione di $\neg A$ da $\neg B$, o se si preferisce una dimostrazione di $\neg A$ da $\neg B$ (la quale vista dal basso è una dimostrazione di B da A, può essere vista come dimostrazione di $A \to B$ e mostra una qualche dipendenza dtra A e B (il fatto che la verità di B discenda dalla verità di A , o che la falsità di A discenda dala falsità di B).

Le regole per l'implicazione classica, da usare nelle dimostrazioni, si ottengono dalle regole per la disgiunzione classica, poichè $A \to B$ è $\neg A \vee B$:

1. Dalla falsità di A, ossia dalla verità di $\neg A$, si può concludere la verità di $A \to B$; ossia (letta dal basso verso l'alto) dalla falsità di $A \to B$ si può concludere la falsità di $\neg A$, cioè la verità di A. Tale regola è rappresentata da
$$\frac{\neg A}{A \to B}$$
2. Dalla verità di B si può concludere la verità di $A \to B$, ossia (letta dal basso verso l'alto) dalla falsità di $A \to B$ si può concludere la falsità di B. Tale regola è rappresentata da
$$\frac{B}{A \to B}$$
3. Quando quando esiste una dimostrazione di B da A (il che è la stessa cosa di una dimostrazione di $\neg A$ da $\neg B$) si può concludere la verità di $A \to B$;

ossia, dalla falsità di $A \rightarrow B$ si può concludere che non ci può essere una dimostrazione di B da A e neppure una di $\neg A$ da $\neg B$

4. Dalla verità di una implicazione $A \rightarrow B$ non si ricava direttamente niente su A o su B.

5. Dalla verità di una implicazione $A \rightarrow B$ e dalla verità di A si può concludere la verità di B; ossia (letta dal basso verso l'alto) dalla falsità di B si può concludere che una almeno tra le proposizioni $A \rightarrow B$ e A è falsa. Tale regola è rappresentata da

$$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B}$$

e viene chiamata *regola del modus ponens per l'implicazione classica.*

6. Dalla verità di una implicazione $A \rightarrow B$ e dalla falsità di B (cioè dalla verità di $\neg B$) si può concludere la verità di $\neg A$ cioè la falsità di A; ossia (letta dal basso verso l'alto) dalla falsità di $\neg A$ (cioè dalla verità di A) si può concludere che una almeno tra le proposizioni $A \rightarrow B$ e $\neg B$ è falsa. Tale regola è rappresentata da

$$\frac{A \rightarrow B \quad \neg B}{\neg A}$$

Esercizi

- Si mostri, usando le regole sopra indicate per il connettivo $\rightarrow$, una dimostrazione della conclusione $A \rightarrow C$ dalle due ipotesi $A \rightarrow B$ e $B \rightarrow C$.

- Si mostri, usando le regole sopra indicate per i connettivi $\rightarrow$ e $\wedge$, una dimostrazione della conclusione $A \wedge C$ dalle due ipotesi $A \wedge B$ e $B \rightarrow C$.

3.4.3.2 Equivalenza classica e alternativa classica

Per esercizio, si ricavino le regole per dimostrare una proposizione $A \leftrightarrow B$ e le regole da usare nelle dimostrazioni per la equivalenza classica, tenendo presente che $A \leftrightarrow B$ è nient'altro che una congiunzione $(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$.

Per esercizio, si ricavino le regole per dimostrare una proposizione A aut$B$ e le regole da usare nelle dimostrazioni per la alternativa classica, tenendo presente che A aut B è nient'altro che una disgiunzione $(A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)$.

Capitolo 4

Logica classica: quantificatori

I due principali quantificatori in logica classica sono il quantificatore *universale* e quello *esistenziale*, che sono l'uno il duale dell'altro.

Usando i quantificatori della logica classica possono essere espresse importanti classi di proposizioni, considerate già nella logica antica e chiamate *proposizioni categoriche.*

I quantificatori della logica classica richiedono una lettura delle proposizioni imperniata sul concetto di *tipo di una componente di una proposizione* e sull'uso delle *variabili per un tipo.*

Le regole per dimostrare e per usare proposizioni contententi quantificatori sono importanti, e collegano tali proposizioni a proposizioni prive di quantificatori. Ecco alcune applicazioni di queste regole:

- una volta che si è dimostrato che "Carlo cammina" possiamo concludere "qualche uomo cammina" quando riteniamo che Carlo appartiene al *tipo* degli uomini, e possiamo concludere "Carlo ha qualche proprietà umana" quando riteniamo che "cammina" appartiene al *tipo* delle proprietà umane;

- dall'ipotesi che "ogni uomo è animale razionale" possiamo concludere "Carlo è animale razionale" quando riteniamo che Carlo appartiene al *tipo* degli uomini, e dall'ipotesi che "Carlo ha ogni proprietà umana" possiamo concludere che "Carlo cammina" quando riteniamo che "cammina" appartiene al *tipo* delle proprietà umane.

4.1 Componenti, tipi e variabili

Entro una proposizione, ciascuna componente può essere *evidenziata* e a ciascuna componente evidenziata può essere attribuito un *tipo*. A ciascun tipo possiamo associare *variabili per quel tipo*, che sono come spazi vuoti che possono essere riempiti da qualunque espressione appartenente a quel tipo.

4.1.1 Evidenziazione di componenti di una proposizione

Una proposizione può essere considerata come una unità priva di componenti, o come una unità nella quale ci sono alcune componenti; quando una proposizione è considerata come costituita da componenti, si può decidere di mettere in evidenza, di evidenziare, una o più di tali componenti.

Per *componente* di una proposizione intendiamo o una parte di quella proposizione o anche un complesso di parti di quella proposizione.

In una proposizione può essere *evidenziata una sua componente.* Quando in una proposizione A è stata evidenziata una componente a, si scriverà $A[a]$.

In sostanza, quando una componente a viene evidenziata in una proposizione A, intendiamo far parlare la proposizione A di ciò che è designato dalla componente a, o meglio intendiamo la proposizione A come una risposta alla domanda: "cosa si asserisce di a?"

Entro una proposizione possiamo anche *evidenziare più sue componenti*, contemporaneamente (difficilmente tutte). Quando in una proposizione A vengono evidenziate le sue componenti $a_1, ..., a_n$ si denoterà tale proposizione come $A[a_1, ..., a_n]$ e tale proposizione viene allora vista come risposta alla domanda "cosa si asserisce della n-pla ordinata $a_1, ..., a_n$?".

Una volta evidenziata una componente in una proposizione, ci si può rendere conto che essa - linguisticamente- è presente più volte nella stessa proposizione. Le varie presenze di una componente linguistica entro una proposizione sono dette *occorrenze* della componente.

Esempi

- *Componenti.* Nella proposizione "Carlo parla di Giovanni a Mario" possiamo individuare le componenti "Carlo", "Giovanni" e "Mario" - le quali sono parti di quella proposizione - e la componente "parla di ... a ..." che è un complesso di parti della proposizione.

- *Evidenziazione di una componente.* Nella proposizione sopra considerata:

- se evidenziamo “Carlo” , leggiamo la proposizione come l’attribuzione a “Carlo” del “parlare di Giovanni a Mario”, ossia la proposizione risponde alla domanda “cosa si asserisce di Carlo” dicendo che “parla di Giovanni a Mario”
- se evidenziamo “Giovanni”, leggiamo la proposizione come il fatto che è “Giovanni” che “Carlo parla a Mario” , ossia la proposizione risponde alla domanda “cosa si asserisce di Giovanni” dicendo che “di lui Carlo parla a Mario”
- se evidenziamo “Mario”, leggiamo la proposizione come il fatto che è a “Mario” che “Carlo parla di Giovanni”, ossia la proposizione risponde alla domanda “cosa si asserisce di Mario” dicendo che “a lui Carlo parla di Giovanni”
- se evidenziamo “parla di... a ...”, leggiamo la proposizione come il fatto che si è instaurato un collegamento (il primo parla del secondo al terzo) tra “Carlo”, “Giovanni” e “Mario”, ossia la proposizione risponde alla domanda: “chi sta parlando di chi a chi?” dicendo “Carlo, di Giovanni, a Mario”

- *Evidenziazione di più componenti.* Se nella proposizione sopra considerata si evidenziano contemporaneamente “Carlo”, “Giovanni” e “Mario”, la proposizione può essere vista come una riposta alla domanda “cosa si asserisce di Carlo, Giovanni e Mario?” e tale risposta è “il primo parla del secondo con il terzo”.

- *Occorrenze.* Si consideri la proposizione “Carlo parla di Giovanni con Mario, e Giovanni lo ascolta”. Se evidenziamo in tale proposizione “Giovanni”, allora ci sono due sue occorrenze nella proposizione; se evidenziamo in tale proposizione “Carlo” siamo naturalmente portati a dire che ci sono due sue occorrenze nella proposizione (che viene opportunamente riletta come “Carlo parla di Giovanni con Mario, e Giovanni ascolta Carlo”).

Esercizi

Si considerino alcune proposizioni, e in ciascuna di essa:

- si cerchi di individuare le sue componenti

- per ciascuna sua componente a, si consideri la sua evidenziazione in quella proposizione, e si legga la proposizione come una risposta alla domanda “cosa si asserisce di a?”

- per ciascuna sua componente a, si considerino le sue occorrenze nella proposizione

- per ciascuna coppia ordinata di componenti a e b, si consideri la loro evidenziazione in quella proposizione e si legga la proposizione come risposta alla domanda "cosa si asserisce della coppia ordinata fatta da a e b?"

4.1.2 Attribuzione di un tipo alle componenti di una proposizione

L'attribuzione di un *tipo* ad una componente di una proposizione consiste nel considerare tale componente non semplicemente come un'espressione che designa una cosa, ma come un'espressione che designa una cosa appartenente a una certa classe di cose. Quando ad una componente di una proposizione è stato attribuito un tipo, quella componente viene considerata come *un caso particolare* di espressioni, come *una* espressione *di una cosa* di quel tipo.

4.1.2.1 Attribuzione di un tipo

Una volta evidenziata, una componente di una proposizione è una espressione che può designare o designa *una particolare cosa.*

Ma, una volta evidenziata una componente di una proposizione, possiamo anche vedere la cosa designata da essa come *una cosa che appartiene a una classe.* In tale caso, frequente nella nostra conoscenza, la componente della proposizione viene considerata come un'espressione che designa *una cosa che appartiene a una classe* e questa classe viene chiamata *tipo* di quella componente.

Quando una componente a di una proposizione ha il tipo T, scriveremo $a : T$. E se in una proposizione A viene evidenziata una componente a e ad essa viene attribuito il tipo T, scriveremo $A[a : T]$.

L'attribuzione di un tipo ad una componente di una proposizione può dipendere spesso da una domanda esterna o dalla nostra esigenza di analizzare la proposizione. Ad esempio, se evidenziamo una componente a di una proposizione A, possiamo vedere l'attribuzione del tipo T ad a come la risposta alla domanda: a quale classe appartiene ciò di cui si parla in $A[a]$?

In generale, ad una stessa componente di una proposizione si possono attribuire *molti tipi*, e la scelta di quale tipo attribuire a una espressione è sostanzialmente libera. Ma l'attribuzione di un tipo a una componente di una proposizione limita la libertà di scelta del tipo per altre componenti della stessa proposizione.

Esempi

- Nella proposizione "Carlo parla di Giovanni a Mario", con l'evidenziazione delle componenti "Carlo", "Giovanni", "Mario", "parla di...a..."
  - ci si può limitare a dire che con "Carlo", "Giovanni" e "Mario" vengono designati particolari individui, e con "parla di...a..." viene designata l'attività di parlare di qualcuno con qualcuno;
  - si può ritenere che con "Carlo" o con "Giovanni" o con "Mario" vengono designati particolari individui come esempi di appartenenti alla classe degli uomini (o ad un'altra classe), e con "parla di...a..." viene designata l'attività di parlare di qualcuno con qualcuno come un esempio di una proprietà che si può riferire a tre uomini.
- Prendiamo ora la proposizione "Giovanni cammina". In essa possiamo considerare "Giovanni" come:
  - qualcosa appartenente alla classe delle cose e quindi dire che il suo tipo è quello delle cose,
  - qualcosa appartenente alla classe degli uomini e quindi dire che il suo tipo è quello degli uomini,
  - qualcosa appartenente alla classe degli italiani e quindi dire che il suo tipo è quello degli italiani,
  - qualcosa appartenente alla classe degli studenti e quindi dire che il suo tipo è quello degli studenti,
  - qualcosa appartenente alla classe dei soggetti e quindi dire che il suo tipo è quello dei soggetti,
  - ecc.

  Sempre nella stessa proposizione possiamo considerare "cammina" come
  - qualcosa appartenente alla classe delle proprietà delle cose e quindi dire che il suo tipo è quello delle proprietà delle cose,
  - qualcosa appartenente alla classe delle proprietà degli uomini e quindi dire che il suo tipo è quello delle proprietà degli uomini,

- qualcosa appartenente alla classe delle proprietà degli italiani e quindi dire che il suo tipo è quello delle proprietà di italiani,
- qualcosa appartenente alla classe delle proprietà degli studenti e quindi dire che il suo tipo è quello delle proprietà degli studenti,
- qualcosa appartenente alla classe dei verbi intransitivi e quindi dire che il suo tipo è quello dei verbi intransitivi,
- ecc.

Nella proposizione "Giovanni cammina"

- la scelta del tipo "cose" per "Giovanni" ci porta naturalmente a preferire il tipo "proprietà di cose" per "cammina", e viceversa,
- la scelta del tipo"soggetti" per "Giovanni" ci porta naturalmente a preferire il tipo "verbi intransitivi" per "cammina", e viceversa.

Esercizi

Si cerchi di assegnare, entro una proposizione che non contenga espressioni quali "ogni" o "qualche", un tipo a ciascuna delle sue componenti in una maniera che appaia sensata; e si cerchi, ove possibile, di cambiare tale assegnazione.

4.1.3 Tipi speciali

Il *tipo* assegnato ad una componente di una proposizione è comunque una classe. Ma talvolta il tipo di una componente di una proposizione può essere una classe *speciale*. Elenchiamo qui di seguito alcuni di questi tipi *speciali*.

4.1.3.1 Tipo delle proposizioni

Se una componente di una proposizione è vista come una proposizione, allora ad essa si attribuisce come tipo la classe delle proposizioni.

Una proposizione - in logica classica - è un bit, cioè appartiene alla classe $\{0,1\}$. Dunque, attribuire come tipo di una componente di una proposizione la classe delle proposizioni è attribuire a tale componente il tipo $\{0,1\}$.

Esempio

La componente "Giovanni cammina" entro la proposizione "se Giovanni cammina, allora Mario sta fermo" può essere vista come una *proposizione*, dunque come appartenente al tipo speciale delle proposizioni (in logica classica $\{0,1\}$).

4.1.3.2 Tipo delle proprietà su una classe

Vedere una componente di una proposizione come una proprietà su una classe X di cose, vuol dire attribuire a quella componente il tipo delle proprietà su X.

La logica classica adotta la concezione secondo cui, come abbiamo già detto nel capitolo 1, una proprietà P su una classe X è qualcosa che associa ad ogni cosa a che appartiene a X una proposizione, la proposizione "a ha la proprietà P" o " a è P".

Una proposizione - in logica classica - è un bit, cioè appartiene alla classe $\{0,1\}$; così una proprietà su X è qualcosa che associa ad ogni cosa a che appartiene a X un elemento di $\{0,1\}$. La classe delle operazioni che associano a una cosa a un elemento di $\{0,1\}$ è rappresentata da $X \mapsto \{0,1\}$. Dunque, attribuire come tipo di una componente di una proposizione la classe delle proprietà su X è attribuire a tale componente il tipo $X \mapsto \{0,1\}$.

Esempio

La componente "è buono" entro la proposizione "Giovanni è buono" può essere vista come una proprietà sugli uomini, una proprietà sulla classe degli uomini. Questa proprietà - secondo la concezione usata in logica classica - è qualcosa che associa ad ogni uomo a la proposizione "a ha la proprietà di essere uomo" usualmente scritta "a è un uomo".

4.1.3.3 Tipo delle relazioni su una classe

Vedere una componente di una proposizione come una relazione binaria su una classe X vuol dire attribuire a tale componente *il tipo delle relazioni binarie su* X. Vedere una componente di una proposizione come una relazione n-aria su una classe X, vuol dire attribuire ad essa *il tipo delle relazioni n-arie su X*.

La logica classica adotta la concezione secondo cui, come abbiamo già detto nel capitolo 1,

- una relazione binaria R su una classe X è qualcosa che associa ad ogni coppia ordinata di cose appartenenti a X una proposizione, la proposizione " a, b in questo ordine stanno nella relazione R" o "a è R di b";
- una relazione n-aria R su una classe X è qualcosa che associa ad ogni n-pla ordinata di cose appartenenti a X una proposizione, la proposizione " $a_1, ..., a_n$ in questo ordine stanno nella relazione R".

La classe di tutte le possibili operazioni che associano ad ogni coppia ordinata di cose appartenenti a X una proposizione è denotata $X^2 \mapsto \{0,1\}$, dove X^2

denota la classe delle possibili coppie ordinate costituite da cose appartenenti a X e $\{0,1\}$ denota la classe delle proposizioni in logica classica. Dunque il tipo delle relazioni binarie su X è rappresentato da $X^2 \mapsto \{0,1\}$.

La classe di tutte le possibili operazioni che associano ad n-pla ordinata di cose appartenenti a X una proposizione è denotata $X^n \mapsto \{0,1\}$, dove X^n denota la classe delle possibili n-ple ordinate costituite da cose appartenenti a X e $\{0,1\}$ denota la classe delle proposizioni in logica classica. Dunque il tipo delle relazioni n-arie su X è rappresentato da $X^n \mapsto \{0,1\}$.

Esempi

- La componente "è padre di" entro la proposizione "Giovanni è padre di Antonio" può essere vista come una relazione tra due uomini, una relazione binaria sulla classe degli uomini. In logica classica la relazione binaria di "paternità" sulla classe degli uomini applicata alla coppia ordinata di due uomini a e b produce la proposizione "a e b in questo ordine stanno nella relazione di paternità" o "a è padre di b".

- La componente "parla di ... a ..." entro la proposizione "Giovanni parla di Antonio a Mario" può essere vista come una relazione tra tre uomini, una relazione ternaria sulla classe degli uomini. Tale relazione, secondo la concezione della logica classica, applicata alla tripla ordinata di tre uomini a, b, c produce la proposizione "a parla di b a c" .

4.1.3.4 Tipo delle funzioni su una classe

Vedere una componente di una proposizione come una funzione unaria su una classe X vuol dire attribuire a tale componente *il tipo delle funzioni unarie su X*. Vedere una componente di una proposizione come una funzione n-aria su una classe X vuol dire attribuire a tale componente *il tipo delle funzioni n-arie su X*.

La logica classica adotta la concezione, vista già nel capitolo 1, secondo cui

- una funzione unaria f su una classe X è qualcosa che associa a ogni cosa a appartenente a X una cosa anch'essa appartenente a X, il *valore di f applicata a a*;

- na funzione n-aria f su una classe X è qualcosa che associa a ogni n-pla ordinata $a_1, ..., a_n$ di cose appartenenti a X una cosa anch'essa appartenente a X, il *valore di f applicata alla n-pla* ordinata $a_1, ..., a_n$.

La classe di tutte le funzioni che associano ad ogni cosa appartenente a una classe X una cosa anch'essa appartenente alla classe X è denotata $X \mapsto X$, e dunque il tipo delle funzioni su una classe X è rappresentato da $X \mapsto X$.

La classe di tutte le funzioni che associano ad ogni n-pla ordinate di cose appartenenti a una classe X una cosa anch'essa appartenente alla classe X è denotata $X^n \mapsto X$, dove X^n rappresenta la classe di tutte le n-ple ordinata di cose appartenenti a X. Dunque il tipo delle funzioni n-arie su una classe X è rappresentato da $X^n \mapsto X$.

Esempi

- La componente "il padre di ... " entro la proposizione "il padre di Antonio incontra Giovanni" può essere vista come una funzione che associa un uomo a un uomo, una funzione unaria sulla classe degli uomini. Tale funzione, secondo la concezione adottata in logica classica, associa ad ogni uomo a il valore di quella funzione applicata ad a, ossia il padre di a.

- La componente "la somma di ... e ..." entro la proposizione "la somma di tre e cinque è otto" può essere vista come una funzione che associa a due numeri un numeri, una funzione binaria sulla classe dei numeri.

Esercizi

Considera alcune proposizioni, e in ciascuna di esse cerca di attribuire tipi speciali ad alcune sue componenti.

4.1.4 Variabili per un tipo

4.1.4.1 Variabili per un tipo come caselle vuote per quel tipo

Supponiamo di aver scelto T come tipo di una componente a di una proposizione A.

In tal caso, possiamo concepire a entro la proposizione A come una *casella* riempita da a, una casella che poteva essere riempita da qualunque altro oggetto del tipo T e che nella particolare proposizione A è stata riempita da a.

Una casella che può essere riempita da qualunque oggetto di un tipo T sarà detta *variabile per il tipo* T, ogni oggetto del tipo T sarà chiamato *valore* di ciascuna variabile di tipo T, ed ogni riempimento della casella mediante un oggetto di tipo T sarà detta *sostituzione della variabile con un suo valore.*

D'altra parte siamo abituati, nell'uso dei computer, a vedere *caselle* che possono essere riempite non da qualunque oggetto ma soltanto da oggetti che appartengono a una certa classe, classe che possiamo ben chiamare *tipo* di quella casella. Gli oggetti che possono riempire una casella, ossia gli oggetti del tipo della casella, possono essere chiamati *valori* di quella casella; e il riempimento di una casella con un oggetto appartenente al tipo della casella può essere chiamato *sostituzione* della casella con *un suo valore.*

Di variabili per un certo tipo T ce ne possono essere in numero arbitrario, indipendentemente dal numero degli oggetti appartenenti al tipo T.

Analogamente, quale che sia il numero degli oggetti di un tipo T, di caselle per quel tipo ce ne possono in numero arbitrario.

Ogni variabile *deve essere* variabile per un tipo, e il tipo di una variabile deve essere sempre indicato esplicitamente o implicitamente.

4.1.4.2 Simboli delle variabili

Le variabili possono essere denominate da simboli.

Di solito, le lettere $x, y, z, \ldots$ sono usate come variabili per qualche tipo.

Se una variabile x ha il tipo T, ossia se x è una casella che può essere riempita da oggetti di tipo T, scriveremo $x : T$. Possiamo scrivere semplicemente x quando il tipo della variabile x è implicito nel contesto.

Quando troviamo due variabili dello stesso tipi denominate con lo stesso simbolo entro una proposizione, si intende che quelle due variabili devono essere sempre sostituite in maniera uguale: ossia che esse sono due caselle che ammettono di essere riempite dallo stesso oggetto e non da oggetti diversi.

4.1.4.3 Simboli delle variabili per tipi speciali, e loro uso

Le variabili per tipi speciali vengono rappresentate da simboli speciali.

Se un tipo è la classe delle proposizioni, le variabili per questo tipo sono rappresentate - così come abbiamo fatto finora - dalle lettere $A, B, C, \ldots$ e sono chiamate *variabili proposizionali.*

Se un tipo è la classe delle proprietà, o la classe delle relazioni, su una classe X di cose, le variabili per questo tipo sono rappresentate dalle lettere $P, Q, R, \ldots$ e sono chiamate *variabili predicative.*

Quando P è una variabile il cui tipo è la classe delle proprietà su una classe X, e a è una cosa appartenente alla classe X, la proposizione "a ha la proprietà P" viene letta "la proposizione ottenuta applicando la proprietà P alla cosa a" e viene rappresentata scrivendo $P(a)$.

Quando P è una variabile il cui tipo è la classe delle relazioni binarie su una classe X, e a e b sono cose appartenenti alla classe X, la proposizione "a sta nella relazione R con b" viene letta "la proposizione ottenuta applicando la relazione R alla coppia ordinata a, b" e viene rappresentata scrivendo $R(a, b)$.

Quando R è una variabile il cui tipo è la classe delle relazioni n-arie su una classe X, e $a_1, ..., a_n$ sono cose appartenenti a X, la proposizione "le cose $a_1, ..., a_n$ in questo ordine stanno nella relazione R" viene letta "la proposizione ottenuta applicando la relazione R alla coppia n-pla ordinata $a_1, ..., a_n$" e viene rappresentata scrivendo $R(a_1, ..., a_n)$.

Se un tipo è la classe delle funzioni o operazioni su una classe X di cose, le variabili per tale tipo sono rappresentate dalle lettere $f, g, h, ...$ e sono chiamate *variabili funzionali.*

Quando f è una variabile il cui tipo è la classe delle funzioni n-arie su una classe X, e $a_1, ..., a_n$ sono cose appartenenti a X, con $f(a_1, ..., a_n)$ viene rappresentata "la cosa di X che è il valore della funzione f applicata alla n-pla ordinata $a_1, ...a_n$.

Esempi

Prendiamo la proposizione "Giovanni cammina".

- Se consideriamo "Giovanni" come qualcosa appartenente a un tipo X, allora possiamo vedere la proposizione "Giovanni cammina" come ottenuta da "x cammina" dove $x : X$, mediante la sostituzione di x con "Giovanni".

- Se consideriamo "cammina" come appartenente al tipo delle proprietà su una classe X, allora possiamo vedere la proposizione "Giovanni cammina" come ottenuta da "P(Giovanni)" dove $P : X \mapsto \{0, 1\}$ mediante la sostituzione di P con "cammina".

- Se consideriamo "Giovanni" come qualcosa appartenente a un tipo X, e "cammina" come appartenente al tipo delle proprietà su una classe X, allora possiamo vedere la proposizione "Giovanni cammina" come ottenuta da "$P(x)$" dove $x : X$ e $P : X \mapsto \{0, 1\}$, mediante la sostituzione di x con "Giovanni" e di P con "cammina".

Esercizi

Si cerchi di considerare le le frasi considerate negli esercizi precedenti come ottenute mediante sostituzione da frasi contenenti variabili.

4.2 Quantificatori: universale, esistenziale

Il quantificatore universale classico è il significato che in logica classica viene assegnato a "per ogni ...", e il quantificatore esistenziale classico è il significato che in logica classica viene assegnato a "per qualche...".

4.2.1 Proposizioni quantificate

Una proposizione quantificata è una proposizione che ha una delle seguenti forme:

- "per ogni $x : T$, $A[x]$" o anche "per tutti gli $x : T$, $A[x]$", ossia "per ogni x di tipo T, $A[x]$" o anche "per tutti gli x di tipo T, $A[x]$", detta *proposizione quantificata universalmente*;
- "per qualche $x : T$, $A[x]$" o anche "per almeno un $x : T$, $A[x]$" o "esiste un $x : T$ tale che $A[x]$", ossia "per qualche x di tipo T, $A[x]$ o "per almeno un x di tipo T, $A[x]$" o "esiste un x di tipo T tale che $A[x]$", detta *proposizione quantificata esistenzialmente.*

Una proposizione quantificata universalmente o esistenzialmente

- "per ogni $x : T$, $A[x]$"
- "per qualche $x : T$, $A[x]$"

è strettamente collegata con le proposizioni che possono essere ottenute da $A[x : T]$ sostituendo la variabile x di tipo T con un'espressione di tipo T, ossia con le proposizioni $A[a : T]$: tali proposizioni sono dette *istanze* o *esemplificazioni* di quella proposizione quantificata.

Viceversa, data una proposizione qualunque $A[a : T]$ nella quale è stata evidenziata una componente a e ad essa è stato attribuito un tipo T, possiamo sempre formare una proposizione quantificata prendendo una variabile x di tipo T che non sia presente in quella proposizione e mettendo la variabile x al posto di ogni occorrenza di a : "per ogni $x : T$, $A[x]$", "per qualche $x : T$, $A[x]$".

In logica classica una proposizione quantificata è, al pari di ogni proposizione, uno dei due valori di verità. La logica classica deve rispondere a una di queste domande: quando una proposizione quantificata è vera? quando una proposizione quantificata è falsa? (E' ovvio che una risposta a una di queste domande è anche la risposta all'altra, poichè una proposizione è vera quando non è falsa, ed è falsa quando non è vera).

Ciascuna proposizione quantificata deve avere una proposizione che sia la sua negazione: ossia una proposizione il cui valore sia il duale di quello della proposizione quantificata considerata. La logica classica deve fissare, per ciascuna proposizione quantificata, quale sia la sua negazione.

Una proposizione quantificata sta anche esprimendo una maniera con cui essa è stata dimostrata o può essere dimostrata, a partire da sue istanze o esemplificazioni. La logica classica deve chiarire la maniera di dimostrare le proposizioni quantificate, formulando quelle che saranno le regole di dimostrazione delle proposizioni quantificate.

Esempi

- Sono proposizioni quantificate universalmente "per ogni uomo x , x parla di Giovanni a Mario"; "per ogni uomo y, Carlo parla di y a Mario"; "per ogni uomo z, Carlo parla di Giovanni a z"; "per ogni relazione ternaria R sugli uomini, R(Carlo, Giovanni, Mario)".

- Sono proposizioni quantificate esistenzialmente "per qualche uomo x, x parla di Giovanni a Mario" ; "per qualche uomo y, Carlo parla di y a Mario"; "per qualche uomo z, Carlo parla di Giovanni a z"; "per qualche relazione ternaria R sugli uomini, R(Carlo, Giovanni, Mario)"

- Di tali proposizioni una istanza o esemplificazione è la proposizione "Carlo parla di Giovanni a Mario", quando Carlo, Giovanni e Mario sono di tipo "uomo" e "parla... di... a..." è di tipo "relazione ternaria sugli uomini".

4.2.2 Quantificatore universale classico

In logica classica, una proposizione "per ogni $x : T$, $A[x]$" è vera quando per ogni valore a della variabile x la proposizione $A[a]$ è vera, ed è falsa in tutti gli altri casi. Dunque, una proposizione quantificata universalmente è vera quando tutte le sue istanze sono vere, ed è falsa quando qualche sua istanza è falsa.

Quando "per ogni" è inteso nel senso sopra indicato, si usa scriverlo con il simbolo

$$\forall$$

e si usa chiamarlo *quantificatore universale classico.*

4.2.3 Quantificatore esistenziale

In logica classica, una proposizione "per qualche $x : T$, $A[x]$" è falsa quando per ogni valore a della variabile x la proposizione $A[a]$ è falsa, ed è vera in tutti gli altri casi. Dunque, una proposizione quantificata esistenzialmente è vera quando una sua istanza è vera, ed è falsa quando tutte le sue istanze sono false.

Quando "per ogni" è inteso nel senso sopra indicato, si usa scriverlo con il simbolo

$$\exists$$

e si usa chiamarlo *quantificatore esistenziale classico.*

4.2.4 Negazione delle proposizioni quantificate

Prendiamo una proposizione $A[a : T]$ nella quale abbiamo evidenziato una componente a di tipo T, e la sua negazione $\neg A[a : T]$.

Consideriamo le proposizioni $\forall x : T\ A[x]$, $\forall x : T\ \neg A[x]$, $\exists x : T\ A[x]$, $\exists x : T\ \neg A[x]$.

E' facile vedere, dal significato che abbiamo dato al quantificatore universale $\forall$ e al quantificatore esistenziale $\exists$, che:

- la proposizione $\forall x : T\ A[x]$ è falsa in tutti i casi in cui $\exists x : T \neg A[x]$ è vera
- una proposizione $\exists x : T\ A[x]$ è falsa in tutti i casi in cui $\forall x : T \neg A[x]$ è vera

Infatti:

- la proposizione $\forall x : T\ A[x]$ è falsa quando una sua istanza è falsa, e $\exists x : T \neg A[x]$ è vera quando una sua istanza è vera. Mostriamo che in tutti i casi in cui si ha una istanza falsa di $\forall x : T\ A[x]$ si ha una istanza vera di $\exists x : T \neg A[x]$: una istanza falsa di $\forall x : T\ A[x]$ sarà della forma $A[b]$ dove b è un oggetto di tipo T, ma dire che $A[b]$ è falsa è la stessa cosa che dire che $\neg A[b]$ è vera, e $\neg A[b]$ è allora una istanza vera di $\exists x : T \neg A[x]$.
- la proposizione $\exists x : T\ A[x]$ è falsa quando ogni sua istanza è falsa, e $\forall x : T \neg A[x]$ è vera quando ogni sua istanza è vera. Mostriamo che in tutti i casi in cui si ha una istanza falsa di $\exists x : T\ A[x]$ si ha una istanza vera di $\forall x : T \neg A[x]$: una istanza falsa di $\exists x : T\ A[x]$ sarà della forma $A[b]$ dove b è un oggetto di tipo T, ma dire che $A[b]$ è falsa è la stessa cosa che dire che $\neg A[b]$ è vera, e $\neg A[b]$ è allora una istanza vera di $\forall x : T \neg A[x]$.

Dunque, possiamo enunciare le leggi della negazione dei quantificatori:

- la negazione classica di una proposizione quantificata universalmente $\forall x : T\ A[x]$ è la proposizione quantificata esistenzialmente $\exists x : T\ \neg A[x]$
- la negazione classica di una proposizione quantificata esistenzialmente $\exists x : T\ A[x]$ è la proposizione quantificata universalmente $\forall x : T\ \neg A[x]$

Tali leggi possono essere così scritte:
$\neg\forall x : T\ A[x] = \exists x : T\ \neg A[x]$
$\neg\exists x : T\ A[x] = \forall x : T\ \neg A[x]$

In questo senso, si dice che il quantificatore universale classico è il duale del quantificatore esistenziale classico, e che il quantificatore esistenziale classico è il duale del quantificatore universale classico.

Si può usare lo slogan, che vale per ogni seria considerazione di quantificatore e di negazione: la negazione della quantificazione universale è la quantificazione esistenziale della negazione, la negazione della quantificazione esistenziale è la quantificazione universale della negazione. Ossia: se qualcuno sostiene una proposizione universale, l'opponente ribatterà con una proposizione esistenziale (la negazione di quella proposizione universale); se qualcuno sostiene una proposizione esistenziale, l'opponente ribatterà con una proposizione universale (la negazione di quella proposizione esistenziale).

Esempio

La negazione di "per ogni uomo x, x cammina" è la proposizione "per qualche uomo x, x non cammina" : ogni istanza falsa della prima proposizione (ad esempio, "Giovanni cammina") è una proposizione la cui negazione (nell'esempio "Giovanni non cammina") è un'istanza vera della seconda proposizione.

Esercizio

Scrivi, usando i connettivi e i quantificatori, la seguente proposizione: per ogni uomo x, se x entra all'università allora per qualche uomo y x incontra y. Successivamente, forma la negazione di tale proposizione.

4.2.5 Regole

4.2.5.1 Regole di dimostrazione

Come si può dimostrare una proposizione quantificata, ossia come si può accertare che essa è vera? La risposta non è affatto banale.

Per stabilire la verità di una proposizione quantificata esistenzialmente è sufficiente stabilire la verità di una sua istanza. E dunque una dimostrazione di una proposizione $\exists x : T\ A[x]$ consiste nella dimostrazione di una sua istanza, ad esempio nella dimostrazione di $A[a]$ dove a è un oggetto di tipo T. Così, la dimostrazione di "per qualche uomo x, x cammina" può consistere nella dimostrazione di "Giovanni cammina".

Ma potremmo anche dimostrare la verità di una proposizione quantificata esistenzialmente mostrando che *non può essere falsa*, e ciò può essere fatto mostrando che dall'ipotesi che una sua istanza sia falsa segue che una sua istanza è vera. Ossia, una dimostrazione di una proposizione $\exists x : T\ A[x]$ può consistere nella dimostrazione di $A[a]$ da $\neg A[b]$ dove a e b sono oggetti di tipo T: in tal caso infatti non può essere vera la negazione di $\exists x : T\ A[x]$ ossia non può essere vera $\forall x : T\ \neg A[x]$(dalla quale seguirebbe la verità di $\neg A[b]$ e di $\neg A[a]$, ma - poichè la dimostrazione preserva la verità dall'ipotesi alla conclusione e poichè $\neg A[b]$ è vera- dovrebbe anche essere vera $A[a]$). In questa maniera, si ha una dimostrazione di $\exists x : T\ A[x]$ senza conoscere quale istanza è vera ma semplicemente sapendo che una istanza è vera.

Per stabilire la verità di una proposizione quantificata universalmente dobbiamo stabilire che tutte le sue istanze sono vere. Ma stabilire che tutte le istanze di una proposizione quantificata universalmente sono vere può consistere nel dimostrare tutte le singole istanze, solo quando esse siano in numero finito: infatti, una dimostrazione deve essere un oggetto finito e non può consistere in *infinite* dimostrazioni, una per ciascuna istanza. Come fare quando le istanze di una proposizione quantificata universalmente sono *infinite,* ad esempio quando si ha a che fare con una proposizione $\forall x : T\ A[x]$ dove T è un tipo che contiene *infiniti* oggetti? Il caso si presenta molto frequentemente: basta considerare il tipo dei numeri naturali, o il tipo delle proposizioni, o il tipo di tutte le cose.

La via per dimostrare una proposizione quantificata universalmente, senza dover esibire *tutte* le dimostrazioni (una per ciascuna sua istanza) è molto interessante e costituisce una delle più forti conquiste del sapere umano. Una dimostrazione di $\forall x : T\ A[x]$ può essere una dimostrazione di $A[a]$ dove a è un oggetto di tipo T con la condizione che in tutta la dimostrazione di $A[a]$ non si usa di a se non ciò che compete ad a per il solo fatto di appartenere al tipo T. Una dimostrazione di $A[a]$ dove a è un oggetto di tipo T, nella quale non si usa di a se non ciò che compete ad a per il solo fatto di appartenere al tipo T, si dice che è una dimostrazione in cui "a è usato come oggetto generico di tipo T".

Se si ha una dimostrazione di $A[a]$ dove a è usato come oggetto generico di tipo T, siamo sicuri che $\forall x : T\ A[x]$ è vera: infatti, quale che sia un oggetto b di tipo T, possiamo prendere b al posto di a in quella dimostrazione, e ottenere una dimostrazione di $A[b]$, poichè in quella dimostrazione non abbiamo usato di a se non ciò che compete ad a per il solo fatto di essere di tipo T, e tutto ciò che compete ad a per il solo fatto di essere un oggetto di tipo T compete ad ogni altro oggetto di tipo T.

Ad esempio, una dimostrazione di "per ogni triangolo x, la somma degli angoli interni ad x è pari a 180 gradi" può consistere nel dimostrare che un particolare triangolo ha la somma dei suoi angoli interni pari a 180 gradi purchè in quella dimostrazione di quel triangolo si usa soltanto ciò che gli compete per il solo fatto di essere un triangolo. E così infatti che tale teorema geometrico viene dimostrato.

Esercizi

Cerca di immaginare come possano essere dimostrate le proposizioni quantificate considerate negli esercizi precedenti.

4.2.5.2 Regole di inferenza

Cosa possiamo ricavare dall'ipotesi che una proposizione quantificata è vera?

Dall'ipotesi che una proposizione quantificata universalmente è vera, possiamo ricavare che ciascuna sua istanza particolare è vera. Ossia da una proposizione $\forall x : T\ A[x]$ possiamo sempre inferire $A[a]$ dove a è un oggetto di tipo T. Questa inferenza è detta ***dictum de omni***: ciò che è vero per tutti gli oggetti di un tipo, è anche vero per ciascun oggetto di quel tipo.

Dall'ipotesi che una proposizione quantificata esistenzialmente è vera, non possiamo ricavare che è vera una sua istanza particolare, ma semplicemente che *ci deve essere* una sua istanza particolare vera. Ossia da una proposizione $\exists x : T\ A[x]$ non possiamo inferire $A[a]$ dove a è un oggetto di tipo T: l'oggetto a potrebbe non essere un oggetto di tipo T per il quale si ha un'istanza vera di $\exists x : T\ A[x]$. Ma da una proposizione $\exists x : T\ A[x]$ possiamo inferire che ***ci deve essere un oggetto a di tipo T*** che fornisce una istanza vera di quella proposizione quantificata: tale oggetto a deve essere preso come un oggetto di tipo T che ha - oltre alle proprietà comuni a tutti gli oggetti di tipo T - soltanto la proprietà di fornire un'istanza vera di $\exists x : T\ A[x]$, ossia nel corso della dimostrazione su un tale oggetto può essere usato soltanto ciò che gli compete in quanto oggetto di tipo T e il fatto di costituire un'istanza vera di $\exists x : T\ A[x]$.

4.3 Proposizioni categoriche

4.3.1 Il quadrato aristotelico delle proposizioni categoriche

Una proposizione è detta *categorica* quando ha una delle seguenti forme:

- "ogni P è Q " (ad es. "ogni uomo è buono","ogni uomo è mortale", "ogni italiano è europeo", "ogni studente è simpatico", ecc.)
- "ogni P non è Q" (ad es. "ogni uomo non è buono", "ogni uomo non è mortale", "ogni italiano non è europeo", "ogni studente non è simpatico", ecc.)
- "qualche P è Q " (ad es. "qualche uomo è buono", "qualche uomo è mortale", "qualche italiano è europeo", "qualche studente è simpatico", ecc.)
- "qualche P non è Q" (ad es. "qualche uomo non è buono", "qualche uomo non è mortale", "qualche italiano non è europeo", "qualche studente non è simpatico", ecc.)

Le proposizioni che hanno la forma "ogni P è Q" sono chiamate *universali affermative,* mentre le proposizioni che hanno la forma "ogni P non è Q" sono chiamate *universali negative.* Le proposizioni che hanno la forma "qualche P è Q" sono chiamate *particolari affermative*, mentre le proposizioni che hanno la forma "qualche P non è Q" sono chiamate *particolari negative.*

In italiano, una proposizione universale negativa "ogni P non è Q" viene anche scritta "nessun P è Q" (ad es. "nessun uomo è buono", "nessun uomo è mortale", "nessun italiano è europeo", "nessuno studente è simpatico", ecc.).

In una proposizione categorica "ogni P è Q", "ogni P non è Q", "qualche P è Q", "qualche P non è Q" P viene detto *soggetto* della proposizione categorica e Q viene detto *predicato* della proposizione categorica.

La *negazione* di una proposizione categorica A, ossia la proposizione che l'avversario deve sostenere quando qualcuno asserisce A, è ancora una proposizione categorica e viene chiamata nella logica antica *contraddittoria di* A. La proposizione che l'avversario deve sostenere quando qualcuno asserisce la proposizione A è una che permetta ad uno solo di vincere e a uno solo di perdere.

La contraddittoria, la negazione, di ciascuna proposizione categorica è così fissata:

- la negazione di “ogni P è Q” è “qualche P non è Q” , e viceversa la negazione di “qualche P non è Q” è “ogni P è Q”, ossia la negazione di una universale affermativa è una particolare negativa e la negazione di una particolare negativa è una universale affermativa;

- la negazione di “qualche P è Q” è “ogni P non è Q”, e viceversa la negazione di “ogni P non è Q” è “qualche P è Q”, ossia la negazione di una particolare affermativa è una universale negativa e la negazione di una universale negativa è una particolare affermativa.

Così, la negazione fa passare da universale a particolare, e viceversa, e da affermativa a negativa, e viceversa.

Le proposizioni categoriche che si possono formare con soggetto P e predicato Q possono essere collocate nella seguente tabella:

	Affermative	*Negative*
Universali	ogni P è Q	ogni P non è Q
Particolari	qualche P è Q	qualche P non è Q

e il quadrato seguente

ogni P è Q	ogni P non è Q
qualche P è Q	qualche P non è Q

nel quale le due diagonali legano tra loro una proposizione categorica con la sua negazione è detto *quadrato aristotelico.*

Esercizi

- Si scelga un soggetto P e un predicato Q e si consideri il quadrato aristotelico formato dalle quattro proposizioni categoriche con soggetto P e predicato Q.

- Si faccia lo stesso esercizio, cambiando il soggetto e il predicato.

- Si faccia ancora lo stesso esercizio, considerando soggetti e predicati piuttosto complessi; ad esempio P “studente che ha conseguito l’esame di stato nei tre anni precedenti” e Q “iscritto ad uno dei corsi di studio dell’Università Roma Tre”.

- Ci si eserciti a individuare per ciascuna proposizione categorica la sua negazione.

4.3.2 La lettura odierna delle proposizioni categoriche

La lettura oggi adottata delle proposizioni categoriche è duplice.

La prima lettura delle quattro proposizioni categoriche costituite da un soggetto P e da un predicato Q si basa sull'uso di una *variabile di tipo* P, di una variabile che può avere come valore le cose che sono P. La lettura è la seguente, quando la variabile di tipo P è indicata da x:

Proposizione categorica	*Lettura tradizionale*	*Prima lettura odierna*
Universale affermativa	ogni P è Q	per ogni x di tipo P , x è Q
Universale negativa	ogni P non è Q	per ogni x di tipo P, x non è Q
Particolare affermativa	qualche P è Q	per qualche x di tipo P, x è Q
Particolare negativa	qualche P non è Q	per qualche x di tipo$P$, x non è Q

Questa lettura suppone che le quattro proposizioni categoriche con soggetto P e predicato Q stiano parlando delle *cose che sono* P, ciascuna delle quattro proposizioni asserisce *quante* cose di tipo P sono anche Q o non sono Q: tutte quelle cose sono anche Q (universale affermativa), tutte quelle cose non sono Q (universale negativa), qualcuna di quelle cose è anche Q (particolare affermativa), qualcuna di quelle cose non è Q (particolare negativa). In base a questa lettura, le quattro proposizioni categoriche costituite da un soggetto P e da un predicato Q vengono così scritte:

Proposizione categorica	*Lettura tradizionale*	*Prima lettura odierna*
Universale affermativa	ogni P è Q	$\forall x : P\ Q(x)$
Universale negativa	ogni P non è Q	$\forall x : P\ \neg Q(x)$
Particolare affermativa	qualche P è Q	$\exists x : P\ Q(x)$
Particolare negativa	qualche P non è Q	$\exists x : P\ \neg Q(x)$

Si vede allora che la contraddittoria di ciascuna proposizione categorica è nient'altro che la sua negazione.

La seconda lettura delle proposizioni categoriche costituite da un soggetto P e da un predicato Q si basa sull'uso di una *variabile di un tipo* X, di una variabile che può avere come valore le cose che sono X, dove X è una classe arbitraria, di solito più ampia di P. La lettura è la seguente quando la variabile di tipo X è indicata da x:

Proposizione categorica	*Lettura tradizionale*	*Seconda lettura odierna*
Universale affermativa	ogni P è Q	per ogni x, se x è P allora x è Q
Universale negativa	ogni P non è Q	per ogni x, se x è P allora x non è Q
Particolare affermativa	qualche P è Q	per qualche x, x è P e x è Q
Particolare negativa	qualche P non è Q	per qualche x, x è P e x non è Q

Questa lettura suppone che le quattro proposizioni categoriche stiano parlando delle cose che sono X, e ciascuna delle proposizioni categoriche asserisce che rapporto cìè tra le cose di X che sono P e le cose di X che sono Q:

(i) ogni cosa di X, se è P, è anche Q (universale affermativa)

(ii) qualche cosa di X è sia P che Q (particolare affermativa)

(iii) ogni cosa di X, se è P, non è Q (universale negativa)

(iv) qualche cosa di X è P ma non è Q (particolare negativa).

In base a questa seconda lettura, le quattro proposizioni categoriche con soggetto P e predicato Q vengono così scritte:

Proposizione categorica	*Lettura tradizionale*	*Prima lettura odierna*
Universale affermativa	ogni P è Q	$\forall x : X\ (P(x) \to\ Q(x))$
Universale negativa	ogni P non è Q	$\forall x : X\ (P(x) \to\ \neg Q(x))$
Particolare affermativa	qualche P è Q	$\exists x : X\ (P(x) \wedge\ Q(x))$
Particolare negativa	qualche P non è Q	$\exists x : X\ (P(x) \wedge\ \neg Q(x))$

Anche in questo caso si vede facilmente che la contraddittoria di ciascuna proposizione categorica è nient'altro che la sua negazione.

Esercizi

Scrivi, usando la prima e la seconda lettura delle proposizioni categoriche, le proposizioni categoriche considerate negli esercizi precedenti; e di ciascuna di esse forma la sua negazione.

Capitolo 5

La logica classica del primo ordine

La logica classica del primo ordine è la parte più usata della logica classica e quella sulla quale sono stati ottenuti i più importanti risultati.

La logica classica del primo ordine considera innanzitutto le *proposizioni del primo ordine* che, come vedremo, costituiscono una classe molto ampia di proposizioni nella quale rientrano quasi tutte le proposizioni delle diverse scienze.

Dalle proposizioni del primo ordine si ottengono - mediante astrazione - le *formule del primo ordine*: si ottengono - come vedremo - *rimpiazzando ciascuna componente extra-logica* con una *variabile* il cui tipo è costituito soltanto da *concetti logici.*

Un ruolo importante è quello delle *proposizioni logiche* che sono la *chiusura universale* o la *chiusura esistenziale* delle formule del primo ordine.

Ricordiamo che una proposizione logica è una proposizione nella quale non ci sono concetti extra-logici; come ogni proposizione, una proposizione logica può essere vera (e in tal caso è falsa la sua negazione) o falsa (e in tal caso è vera la sua negazione).

Intuitivamente, la verità della chiusura universale di una formula del primo ordine è la verità di una proposizione del primo ordine *per qualunque significato* si voglia dare a tutte le sue componenti extra-logiche, e la verità della chiusura esistenziale di una formula del primo ordine è la verità di una proposizione del primo ordine *per un particolare significato* delle sue componenti extra-logiche.

La logica classica del primo ordine fornisce una risposta a questioni intorno alla dimostrabilità delle proposizioni logiche.

La domanda "si possono dimostrare le proposizioni logiche vere?" è mal posta in quanto non può avere una risposta negativa. Infatti, se la risposta fosse negativa, dovrebbe esserci una proposizione A vera e non dimostrabile; ma come potremmo stabilire che A è vera se non attraverso una sua dimostrazione?

La domanda interessante e non banale è invece la seguente: "si possono dimostrare logicamente (ossia con l'uso esclusivo della logica) le proposizioni logiche vere?".

Attraverso la logica classica del primo ordine si dà una risposta negativa a questa domanda nella sua generalità: infatti, il *teorema di incompletezza di Goedel* stabilisce che ci sono proposizioni logiche vere che non possono essere dimostrate logicamente. In particolare ci sono proposizioni logiche, che sono *la chiusura esistenziale di formule del primo ordine*, e che sono vere e che non sono dimostrabili logicamente.

Ma attraverso la logica classica del primo ordine si arriva a stabilire che per un'ampia e interessante classe di proposizioni logiche vere la risposta è positiva: infatti *il teorema di completezza di Goedel per la logica del primo ordine* stabilisce che tutte le proposizioni logiche che sono la chiusura universale di formule del primo ordine, quando sono vere, sono anche dimostrabili logicamente.

5.1 Proposizioni e formule del primo ordine

5.1.1 Proposizioni del primo ordine

Una *proposizione del primo ordine* è una proposizione con le seguenti caratteristiche che verranno spiegate sotto:

- è presentata come costituita mediante connettivi e quantificatori a partire da proposizioni semplici prive di concetti logici;

- parla di un solo tipo di oggetti, e tutte le quantificazioni sono su quello stesso tipo di oggetti.

Abbiamo già visto nei capitoli precedenti come una proposizione possa essere analizzata logicamente e quindi vista come ottenuta da proposizioni semplici mediante i connettivi e i quantificatori. Le proposizioni semplici sono lo stadio ultimo di questa analisi logica di una proposizione, e non contengono alcun concetto logico. Una proposizione semplice all'interno di una proposizione può essere

- una proposizione non analizzata,
- una proposizione analizzata, ossia una proposizione che ha sue componenti le quali non corrispondono a concetti logici.

Talvolta una proposizione semplice all'interno di una proposizione può essere vista come *negazione* di una proposizione semplice B, e in tal caso essa viene denotata con $\neg B$. Le variabili quantificate in una proposizione non possono essere presenti altro che nelle proposizioni semplici contentute in quella proposizione.

Una proposizione A, costituita mediante connettivi e quantificatori a partire da proposizioni semplici prive di concetti logici, *parla di un solo tipo X di oggetti* e *tutte le quantificazioni sono su variabili di quel tipo X* quando

- ciascuna proposizione semplice presente in A ed analizzata può essere vista come il risultato dell'applicazione di una proprietà su X a un oggetto di X o come il risultato dell'applicazione di una relazione n-aria su X a una n-pla di oggetti di X,
- in ciascuna proposizione semplice presente in A gli oggetti di X sono indicati o da una variabile che ha come tipo X o da una espressione semplice o come il valore di una funzione n-aria su X applicata ad n oggetti di X;
- ciascuna quantificazione presente in A è su una variabile di tipo X.

La caratteristica principale di una proposizione del primo ordine è quella che tutte le quantificazioni sono su variabili di uno stesso tipo di oggetti, lo stesso tipo su cui parla la proposizione.

Molte delle proposizioni che vengono usate, nelle teorie scientifiche e non solo in esse, sono proposizioni del primo ordine. Una teoria scientifica nella quale ci sono proposizioni non del primo ordine è l'analisi matematica, e anche la logica stessa. Spesso proposizioni non del primo ordine sono usate nei principi di certe teorie, ad esempio nei principi dell'aritmetica e della geometria.

Una classe di proposizioni del primo ordine è *omogenea* quando tutte le proposizioni della classe parlano dello stesso tipo X di oggetti.

Le conoscenze di ciascuna teoria scientifica, con poche eccezioni quali l'analisi matematica e la logica stessa dove alcune importanti parti usano proposizioni che non sono del primo ordine, formano una classe omogenea di proposizioni del primo ordine.

Esempi

- "Carlo cammina e incontra qualcuno" ossia "Carlo cammina $\wedge \exists x$(Carlo incontra x)" è una proposizione del primo ordine: quando x è una variabile del tipo degli esseri umani: questa proposizione parla del tipo degli esseri umani e tutte le quantificazioni sono su variabili per quello stesso tipo.

- Invece, "Carlo incontra qualcuno e ha qualche proprietà" ossia "$\exists x$(Carlo incontra x) $\wedge \exists P$(Carlo ha P)", con x variabile per il tipo degli esseri umani e P varaibile per proprietà sugli esseri umani, non è una proposizione del primo ordine: c'è una quantificazione su una variabile per il tipo degli esseri umani e una quantificazione su una variabile per *proprietà* di esseri umani.

- Prendiamo le proposizioni seguenti:

  1. "Il diluvio asciuga e deterge".
  2. "Tutto ciò che non bagna vola e sorge".
  3. "Tutto ciò che pubblicizza stupisce e non scopre".
  4. "Il sole non bagna e non asciuga".
  5. "Tutto ciò che deterge bagna e pubblicizza".
  6. "Il diluvio non scopre" .

  e analizziamole nel modo seguente, dove x è una variabile per un tipo che comprende il "diluvio" e il "sole":

  1. (il diluvio asciuga)$\wedge$(il diluvio deterge)
  2. $\forall x(\neg(x$ bagna$)\rightarrow(x$ vola$)\ \wedge(x$ sorge$)))$
  3. $\forall x((x$ pubblicizza$)\ \rightarrow\ (x$ stupisce$)\ \wedge\neg(x$ scopre$))$
  4. $\neg$(il sole bagna)$\wedge\neg$(il sole asciuga)
  5. $\forall x\ ((x$ deterge$)\ \rightarrow\ (x$ bagna$)\ \wedge(x$ pubblicizza$)))$
  6. $\neg$(il diluvio scopre)

  Esse sono proposizioni omogenee del primo ordine. Infatti:

  - in 1. la proposizione semplice "Il diluvio asciuga" può essere vista come il risultato dell'applicazione della proprietà "asciugare" all'oggetto "diluvio" e la proposizione semplice "il diluvio deterge" può essere vista come il risultato dell'applicazione della proprietà "detergere" all'oggetto "diluvio", ed entrambe queste proprietà sono proprietà sul tipo di oggetti considerato, e "diluvio" è un nome di un oggetto di quel tipo; e la stessa argomentazione può essere fatta a proposito di tutte le proposizioni semplici preenti in 2., 3., 4., 5., 6.

- tutte le quantificazioni sono su variabili il cui tipo è il tipo di oggetti considerato, e non ci sono quantificazioni su operazioni, proprietà e relazioni.

Esercizi

Si accerti quali delle altre proposizioni considerate negli esercizi precedenti possono essere viste come proposizioni del primo ordine, e quali no.

5.1.2 La formalizzazione

La formalizzazione di una proposizione del primo ordine è un processo di *astrazione*, con il quale tutte le componenti extra-logiche della proposizione sono trasformate in variabili il cui tipo è costituito unicamente da concetti logici.

Prendiamo una proposizione A che parla di un solo tipo di oggetti, e leggiamola come una proposizione ottenuta da proposizioni semplici mediante i connettivi e i quantificatori. Il processo di astrazione che porta alla formalizzazione di A consiste:

- nell'individuare in A tutte le componenti extra-logiche
- nel rimpiazzare ciascuna componente extra-logica con una variabile il cui tipo è costituito unicamente da concetti logici.

Le componenti extra-logiche di A sono:

- il tipo di oggetti di cui A parla
- i nomi semplici di oggetti di quello stesso tipo, presenti in A
- le operazioni n-arie su quello stesso tipo di oggetti, presenti in A
- le proposizioni non analizzate, presenti in A
- le proprietà su quello stesso tipo di oggetti, presenti in A
- le relazioni n-arie su quello stesso tipo di oggetti, presenti in A.

Il tipo di oggetti di cui parla A viene rimpiazzato da una variabile X per tipi di oggetti. Ossia, il tipo di oggetti di cui parla A diviene un *generico tipo di oggetti.* La variabile X ha come tipo il tipo di tutti i tipi di oggetti, ossia un tipo logico.

Ciascun nome semplice di oggetti, presente in A, viene rimpiazzato da una variabile il cui tipo è X, tutte le volte che quel nome compare in A; e in maniera tale che nomi diversi di oggetti siano rimpiazzati da variabili diverse di tipo X. Tali variabili saranno ad esempio a, b, c, ... Ciascuna di queste variabili ha come tipo X, ossia un tipo nel quale non c'è niente di extra-logico. In questa maniera, si astrae da ciascun oggetto nominato in A ad un *generico oggetto* di tipo X.

Ciascuna operazione unaria presente in A viene rimpiazzata da una *variabile* il cui tipo è quello delle operazioni unarie su X, tutte le volte che quella operazione compare in A; ciascuna operazione binaria presente in A viene rimpiazzata da una *variabile* il cui tipo è quello delle operazioni binarie su X, tutte le volte che quella operazione compare in A; ciascuna operazione n-aria presente in A viene rimpiazzata da una *variabile* il cui tipo è quello delle operazioni n-arie su X, tutte le volte che quella operazione n-aria compare in A. Questi rimpiazzamenti vanno fatti in maniera tale che operazioni diverse siano rimpiazzate da variabili diverse. Tali variabili saranno ad esempio f, g, h, ... e per ciascuna di esse il tipo è quello delle operazioni unarie su X oppure quello delle operazioni binarie su X oppure quello delle operazioni n-arie su X, ossia un tipo nel quale non c'è niente di extra-logico. - In questa maniera, si astrae da ciascuna operazione n-aria presente in A ad una *generica operazione n-aria su X.*

Ciascuna proposizione non analizzata presente in A viene rimpiazzata da una *variabile* il cui tipo è quello delle *proposizioni*, un tipo sicuramente logico, tutte le volte che quella proposizione non analizzata compare in A; e in maniera tale che proposizioni non analizzate diverse siano rimpiazzate da variabili diverse. In questa maniera, si astrae da ciascuna proposizione non analizzata a una *generica proposizione.*

Ciascuna proprietà presente in A viene rimpiazzata da una *variabile* il cui tipo è quello delle *proprietà* su X, tutte le volte che quella proprietà compare in A; ciascuna relazione binaria presente in A viene rimpiazzata da una variabile il cui tipo è quello delle relazioni binarie su X, tutte le volte che quella relazione compare in A; e ciascuna relazione n-aria presente in A viene rimpiazzata da una variabile il cui tipo è quello delle relazioni n-arie su X, tutte le volte che quella relazione n-aria compare in A. Questi rimpiazzamenti vanno fatti in maniera tale che proprietà o relazioni diverse presenti in A siano rimpiazzate da variabili diverse. Le variabili che rimpiazzano proprietà o relazioni presenti in A sono ad esempio $P, Q, R, ...$: per ciascuna di essa il tipo è quello delle *proprietà su* X, o quello delle *relazioni binarie su* X, o quello delle *relazioni* n-arie su X per qualche n, ossia il tipo non contiene niente di extra-logico. In questa maniera, si astrae da ciascuna proprietà a una *generica proprietà su* X, da ciascuna relazione n-aria a una *generica relazione* n*-aria* su X.

Si usano poi le seguenti convenzioni di scrittura:

- l'applicazione di una generica operazione unaria f (una variabile per operazioni unarie su X) a una certa espressione s viene scritta $f(s)$;
- l'aplicazione di una generica operazione binaria g (una variabile per operazioni binarie su X) alla coppia ordinata formata da una espressione s e da una espressione t, viene scritta $g(s,t)$;
- l'applicazione di una generica operazione n-aria h (una variabile per operazioni n-arie su X) alla n-pla ordinata $t_1, ..., t_n$ viene scritta $h(t_1, ..., t_n)$;
- l'applicazione di una generica proprietà P (una variabile per proprietà su X) a un'espressione s viene scritta $P(s)$;
- l'applicazione di una generica relazione binaria R (una variabile per relazioni binarie su X) alla coppia ordinata formata da una espressione s e da una espressione t viene scritta $R(s,t)$;

Una volta formalizzata, una proposizione A del primo ordine non è più una *proposizione* poichè contiene *variabili*, ma è un'espressione aperta nella quale non ci sono altro che concetti logici.

La formalizzazione di una classe omogenea di proposizioni del primo ordine consiste nella fomalizzazione di ciascuna delle proposizioni, usando per ciascun concetto extra-logico la stessa variabile in ciascuna delle proposizioni.

Esempi

La formalizzazione delle proposizioni del primo ordine

1. (il diluvio asciuga)$\wedge$(il diluvio deterge)
2. $\forall x(\neg(x$ bagna)$\rightarrow(x$ vola) $\wedge(x$ sorge)))
3. $\forall x((x$ pubblicizza) $\rightarrow$ $(x$ stupisce) $\wedge\neg(x$ scopre))
4. $\neg$(il sole bagna)$\wedge\neg$(il sole asciuga)

5. $\forall x$ ((x deterge) $\rightarrow$ (x bagna) $\wedge$(x pubblicizza)))
6. $\neg$(il diluvio scopre)

che parlano di un certo tipo di oggetti che comprende "il diluvio" e "il sole" consiste nel rimpiazzare tale tipo con una variabile X per tipi di oggetti e nel passare a:

1. $P(a) \wedge Q(a)$
2. $\forall x(\neg R(x) \rightarrow S(x) \wedge T(x))$
3. $\forall x(U(x) \rightarrow V(x) \wedge \neg W(x))$
4. $\neg R(b) \wedge \neg P(b)$
5. $\forall x\ (Q(x) \rightarrow R(x) \wedge U(x))$
6. $\neg W(x)$

ossia a

1. $P(a) \wedge Q(a)$
2. $\forall x(R(x) \vee (S(x) \wedge T(x)))$
3. $\forall x(\neg U(x) \vee\ (V(x) \wedge \neg W(x)))$
4. $\neg R(b) \wedge \neg P(b)$
5. $\forall x\ (\neg Q(x) \vee (R(x) \wedge U(x)))$
6. $\neg W(x)$

usando la variabile a di tipo X al posto di "diluvio", la variabile b di tipo X al posto di "sole" e le variabili per proprietà su X P, Q, R, S, T, U, V, W nella maniera seguente

- P al posto di "asciuga"
- Q al posto di "deterge"
- R al posto di "bagna"
- S al posto di "vola"
- T al posto di "sorge"

- U al posto di "pubblicizza"
- V al posto di "stupisce"
- W al posto di "scopre".

Esercizi

Si compia la formalizzazione per tutte le proposizioni del primo ordine fino ad ora considerate negli esercizi.

5.1.3 Formule del primo ordine

Una *formula del primo ordine* è ciò che si ottiene formalizzando una proposizione del primo ordine.

Una formula del primo ordine non è in generale una *proposizione*, poichè può contenere *variabili.* Una formula del primo ordine diventa una proposizione, e quindi è vera o falsa, ogni qualvolta vengono dati valori particolari a ciascuna delle variabili che essa contiene, entro il tipo di quelle variabili.

Una formula del primo ordine può dunque essere vista come uno schema generale di una classe di proposizioni, la classe di tutte le proposizioni che si ottengono dando a ciascuna delle variabili un valore entro il tipo di quella variabile.

Data una formula del primo ordine A, si chiama *attribuzione di valori alle variabili di A* l'assegnazione di un particolare valore a ciascuna variabile che essa contiene, entro il tipo di quella variabile, a cominciare dalla variabile per la classe di oggetti su cui parla.

Con ogni attribuzione di valori alle variabili di una formula del primo ordine A si ottiene una proposizione, e dunque uno dei due valori di verità.

Un *alfabeto del primo ordine* è costituito dalle variabili usate nella formalizzazione di una classe omogenea di proposizioni del primo ordine, e dai simboli della logica, in particolare daisimboli per i connettivi $\wedge$ e $\vee$ e dai simboli per quantificatori $\forall$ e $\exists$.

Le *formule su un alfabeto del primo ordine* sono tutte le formule che si possono scrivere utilizzando soltanto i simboli di quell'alfabeto.

E' possibile dare una definizione rigorosa di *formula su un alfabeto del primo ordine*, una definizione chiamata *definizione induttiva* : la consideremo dopo che - parlando delle classi - introdurremo il concetto di definizione induttiva.

Esempi

Le seguenti espressioni sono formule del primo ordine:

1. $P(a)\wedge Q(a)$
2. $\forall x(R(x)\vee(S(x)\wedge T(x)))$
3. $\forall x(\neg U(x)\vee (V(x) \wedge\neg W(x)))$
4. $\neg R(b) \wedge \neg P(b)$
5. $\forall x\ (\neg Q(x) \vee(R(x) \wedge U(x)))$
6. $\neg W(x)$

su un alfabeto costituito

- dalle variabili a,b di tipo X,
- dalle variabili P,Q,R,S,T,U,V,W per proprietà su X,
- dai simboli logici.

Esercizi

- Si considerino alcune proposizioni che si possono ottenere dalle formule viste nell'esempio precente, dando particolari valori a X, alle variabili a,b di tipo X, e alle variabili P, Q, R, S, T, U, V, W per proprietà su X.
- Si compia un analogo esercizio anche sulle formule ottenute formalizzando altre proposizioni del primo ordine.

5.1.4 Modello e contromodello di una formula del primo ordine

Un *modello* di una formula del primo ordine A è una attribuzione di valori per le variabili presenti in A che trasforma la formula A in una proposizione vera.

Un *contromodello* di una formula del primo ordine A è una attribuzione di valori per le variabili presenti in A che trasforma la formula A in una proposizione falsa.

Dunque, i modelli e i contromodelli di una formula del primo ordine sono comunque particolari attribuzioni di valori alle variabili presenti in quella formula. D'altro lato, ciascuna attribuzione di un valore per le variabili presenti in una formula del primo ordine è comunque un *modello* di quella formula (quando la proposizione risultante è vera) o un *contromodello* di quella formula (quando la proposizione risultante è falsa).

Si noti che

- ogni modello di una formula del primo ordine A è un contromodello della formula $\neg A$
- ogni contromodello di una formula del primo ordine A è un modello della formula $\neg A$.

Esempio
Consideriamo la formula del primo ordine su un generico tipo X di oggetti

$$\forall x R(a, x) \wedge \exists x Q(b, x)$$

La seguente attribuzione di valori alle variabili è un modello di quella formula:

- ad X, il tipo "numeri naturali",
- ad a il numero 0
- a b il numero 1
- a R la relazione binaria "essere maggiore o uguale a" sui numeri naturali
- a Q la relazione binaria "essere il successore di " sui numeri naturali.

Infatti, ricaviamo la proposizione "ogni numero naturale è maggiore o uguale a 0, e 1 è il successore di qualche numero naturale".
Esercizi

- Trova un contromodello della formula considerata nell'esempio.
- Trova modelli e contromodelli delle formule considerate negli esercizi precedenti.

5.2 Dalle formule del primo ordine a proposizioni logiche

Le formule del primo ordine non sono proposizioni, ma sono espresssioni nelle quali non ci sono componenti extra-logiche.

Dalle formule del primo ordine si può passare a *proposizioni del primo ordine* dando valori alle variabili, ma tali proposizioni in generale sono proposizioni extra-logiche.

Mediante la quantificazione di tutte le variabili presenti in una formula del primo ordine si ottiene una proposizione la quale

- non è una proposizione del primo ordine, poichè la quantificazione può avvenire anche sulla variabile per tipi di oggetti, sulle variabili per proposizioni, sulle variabili per proprietà, sulle variabili per relazioni, sulle variabili per operazioni;
- è una proposizione puramente logica, poichè nessun concetto extra-logico viene introdotto.

Due maniere di quantificare tutte le variabili presenti in una formula del primo ordine sono particolarmente importanti: la chiusura universale e la chiusura esistenziale.

5.2.1 La chiusura universale di una formula del primo ordine.

Data una formula del primo ordine A relativa a un generico tipo X di oggetti, la sua *chiusura universale* è la proposizione logica ottenuta quantificando universalmente sia la variabile X che tutte le variabili presenti in A.

La proposizione che cosìsi ottiene si presenta come

$$\forall X \forall ....A$$

dove i puntini sono riempiti dalla quantificazione universale di ciascuna delle variabili presenti in A, e sarà brevemente indicata da

$$\underline{\forall}(A)$$

Tale proposizione è una proposizione logica, poichè in A non ci sono altro che concetti logici e la quantificazione è un concetto logico.

La chiusura universale di A può essere *vera* o *falsa*, così come ogni proposizione.

Se la chiusura universale di A è vera, ciò vuol dire che ogni proposizione ottenuta da A dando valori ad X e a ciascuna delle variabili presenti in A è una proposizione vera, ossia che ogni attribuzione di valori ad X e a ciascuna delle variabili presenti in A è un *modello per* A.

Se la chiusura universale di A è falsa, ciò vuol dire che qualche proposizione ottenuta da A dando valori a X e a ciascuna delle variabili presenti in A è una proposizione falsa, ossia che qualche attribuzione di valori ad X e a ciascuna delle variabili presenti in A è un *contromodello per* A.

Una formula del primo ordine è una *verità logica* (talvolta detta anche *tautologia* o *legge logica*) quando la sua chiusura universale è vera.

Ossia sono dette *verità logiche* le formule che per ogni attribuzione di valori alle loro variabili si trasformano in proposizioni vere, le formule per le quali ogni attribuzione di valori alle variabili è un modello, le formule (come talvolta si dice) che sono *vere in tutti i mondi possibili.*

Quando una formula del primo ordine è una verità logica, tutte le proposizioni che si ottengono da essa mediante attribuzione di valori alle variabili (proposizioni che sono tutte vere) sono chiamate anch'esse verità logiche: si tratta di proposizioni la cui verità dipende unicamente dalla logica.

Si usa abbreviare "A è una verità logica" scrivendo $\models A$.

Una formula del primo ordine è *falsificabile* quando la sua chiusura universale è falsa.

Ossia sono *falsificabili* le formule che si trasformano in proposizioni false per qualche attribuzione di valore alle variabili, le formule che hanno un contromodello.

Esempi

La formula del primo ordine $A \vee \neg A$, dove A è una variabile per proposizioni, ha come sua chiusra universale $\forall A(A \vee \neg A)$, e questa proposizione logica è vera: abbiamo già mostrato come, quale che sia la proposizione A, $A \vee \neg A$ è una proposizione vera.

La chiusura universale della formula del primo ordine

$$\forall x R(a,x) \wedge \exists x Q(b,x)$$

è

$$\forall X \forall R \forall Q \forall a \forall b(\forall x R(a,x) \wedge \exists x Q(b,x))$$

e questa proposizione logica è falsa: abbiamo visto che ci sono valori di X, R, Q, a, b per i quali la formula $\forall x R(a,x) \wedge \exists x Q(b,x)$ diventa una proposizione falsa.

Esercizi

Si formi la chiusura universale delle formule del primo ordine considerate negli esercizi precedenti.

5.2.2 La chiusura esistenziale di una formula del primo ordine

Data una formula del primo ordine A relativa a un generico tipo X di oggetti, la sua *chiusura esistenziale* è la proposizione logica ottenuta quantificando esistenzialmente sia la variabile X che tutte le variabili presenti in A.

La proposizione che cosìsi ottiene si presenta come

$$\exists X \exists .... A$$

dove i puntini sono riempiti dalla quantificazione universale di ciascuna delle variabili presenti in A, e sarà brevemente indicata da

$$\underline{\exists}(A)$$

Tale proposizione è una proposizione logica, poichè in A non ci sono altro che concetti logici e la quantificazione esistenziale è un concetto logico.

La chiusura esistenziale di A può essere *vera* o *falsa*, così come ogni proposizione.

Se la chiusura esistenziale di A è vera, ciò vuol dire che qualche proposizione ottenuta da A dando valori ad X e a ciascuna delle variabili presenti in A è una proposizione vera, ossia che qualche attribuzione di valori ad X e a ciascuna delle variabili presenti in A è un *modello per* A.

Se la chiusura esistenziale di A è falsa, ciò vuol dire che ogni proposizione ottenuta da A dando valori a X e a ciascuna delle variabili presenti in A è una proposizione falsa, ossia che ogni attribuzione di valori ad X e a ciascuna delle variabili presenti in A è un *contromodello per* A.

Una formula del primo ordine è *soddisfacibile* quando la sua chiusura esistenziale è vera. Ossia sono dette *soddisfacibili* le formule che per qualche attribuzione di valori alle loro variabili si trasformano in proposizioni vere, le formule per le quali qualche attribuzione di valori alle variabili è un modello, le formule (come talvolta si dice) che hanno almeno un *modello*.

Una formula del primo ordine è *falsità logica* quando la sua chiusura esistenziale è falsa.

Ossia sono dette *falsità logiche* le formule che diventano proposizioni false per ogni attribuzione di valori alle proprie variabili, le formule che non hanno modelli e che quindi hanno solo contromodelli.

Si noti che:

- se una formula del primo ordine A *non è verità logica*, allora la negazione $\neg A$ di tale formula è soddisfacibile
- se una formula del primo ordine A *non è soddisfacibile*, allora la negazione $\neg A$ di tale formula è una verità logica.

Esempi

La formula del primo ordine $A \vee \neg A$, dove A è una variabile per proposizioni, ha come sua chiusra esistenziale $\exists A(A \vee \neg A)$, e questa proposizione logica è vera: abbiamo già mostrato come, quale che sia la proposizione A, $A \vee \neg A$ è una proposizione vera.

La formula del primo ordine $A \wedge \neg A$, dove A è una variabile per proposizioni, ha come sua chiusra esistenziale $\exists A(A \wedge \neg A)$, e questa proposizione logica è falsa: abbiamo già mostrato come, quale che sia la proposizione A, $A \wedge \neg A$ è una proposizione falsa.

La chiusura esistenziale della formula del primo ordine

$$\forall x R(a, x) \wedge \exists x Q(b, x)$$

è

$$\exists X \exists R \exists Q \exists a \exists b (\forall x R(a, x) \wedge \exists x Q(b, x))$$

e questa proposizione logica è vera: abbiamo visto che ci sono valori di X, R, Q, a, b per i quali la formula $\forall x R(a, x) \wedge \exists x Q(b, x)$ diventa una proposizione vera.

Esercizi

Si formi la chiusura esistenziale delle formule del primo ordine considerate negli esercizi precedenti.

5.3 I principali risultati della logica del primo ordine

5.3.1 Si possono dimostrare logicamente tutte le verità logiche?

Quando la chiusura universale di una formula A del primo ordine è vera, possiamo dimostrarla con la pura logica? Ossia possiamo dimostrare A senza fare alcuna ipotesi sulle variabili ivi presenti, e usando soltanto le regole logiche (quelle che abbiamo studiato a proposito dei connettivi e dei quantificatori)?

La risposta è positiva per tutte le formule del primo ordine.

Questa risposta positiva è il contenuto del *teorema di completezza per la logica del primo ordine* dimostrato da Kurt Goedel nel 1929: *Per ogni formula A del primo ordine, se $\underline{\forall}(A)$ è vera allora $\underline{\forall}(A)$ e A stessa sono dimostrabili logicamente.*

La dimostrazione di questo teorema richiede preliminarmente un'approfondito studio del concetto di formula del primo ordine e una rigorosa caratterizzazione delle dimostrazioni logiche.

5.3.2 Si possono dimostrare logicamente tutte le soddisfacibilità ?

Spesso, la verità della chiusura esistenziale di una formula A del primo ordine - ossia la verità di una proposizione puramente logica - la dimostriamo mostrando un modello extra-logico per A. Ad esempio, un uomo che cammina è una prova della verità della proposizione logica $\exists X \exists P \exists a P(a)$ ossia del fatto che la formula del primo ordine $P(a)$ è soddisfacibile, e l'intuizione spaziale è la prova che è soddisfacibile la congiunzione degli assiomi della geometria trasformata in una formula del primo ordine.

Ma possiamo domandarci se non sia possibile dimostrare tali proposizioni *logiche* anche senza usare nient'altro che la logica, ossia con *dimostrazioni logiche.*

La risposta non è positiva sempre, ossia la soddisfacibilità delle formule del primo ordine non può essere dimostrata sempre con la pura logica ma per certe formule non può che essere una dimostrazione extra-logica.

Si tratta del contenuto del *teorema di incompletezza* dimostrato anch'esso da Kurt Goedel nel 1931: *Ci sono formule A del primo ordine tali che $\underline{\exists}(A)$ è vera ma non è dimostrabile logicamente (ossia è dimostrabile soltanto usando anche concetti extra-logici).*

La dimostrazione di questo teorema richiede preliminarmente, oltre che un'approfondito studio del concetto di formula del primo ordine e una rigorosa caratterizzazione delle dimostrazioni logiche, anche una accurata e approfondita analisi dell'aritmetica a partire dalla quale si trova l'esempio di una formula del primo ordine che è soddisfacibile - è vera quando parla di numeri naturali - mentre la sua chiusura esistenziale non è dimostrabile con l'uso esclusivo della logica.

Capitolo 6

Logica classica: le classi e gli insiemi

Abbiamo parlato molte volte, finora, di *classi* (o *collezioni* o *tipi*) di oggetti: è ora il momento di studiarle, adottando la concezione della logica classica sulle proposizioni, sulle dimostrazioni, sui connettivi e sui quantificatori.

Innanzitutto, dal punto di vista della logica classica, tratteremo la relazione di *appartenenza* che intercorre tra le cose e le classi, e le quattro principali relazioni che intercorrono tra le classi, fra le quali quella di *inclusione* e quella di *separazione*.

Particolare attenzione sarà data ai principi che regolano la trattazione delle classi in logica classica. Le classi sono regolate da due principi:

- *il principio di estensionalità*, ossia il principio che una classe non è determinata dalla sua definizione o dalla sua costruzione, ma solamente dai suoi elementi;
- *il principio di comprensione*, ossia il principio che ad ogni proprietà di cose corrisponde una classe i cui elementi sono tutte e sole le cose che hanno quella proprietà.

Talvolta certe classi sono ritenute anch'esse cose che possono appartenere a classi, enti che possono appartenere a classi. L'ipotesi che ogni classe sia una cosa (un ente) che può appartenere a classi, quando è aggiunta al principio di estensionalità e a quello di comprensione, porta ad una falsità: dunque, se vogliamo mantenere il principio di estensionalità e quello di comprensione, dobbiamo rigettare l'ipotesi che ogni classe sia una cosa (un ente) che può appartenere a classi. Gli *insiemi* sono le classi che sono ritenute cose (enti) che possono appartenere a classi.

Esamineremo quindi alcuni insiemi logici e alcune fra le principali operazioni logiche che fanno ottenere insiemi a partire da cose o da insiemi,

Tratteremo infine la concezione della logica classica delle proprietà, delle relazioni e delle operazioni, nonchè un particolare modo di definire insiemi che ha un grande ruolo sia nelle scienze che nell'informatica: la definizione induttiva.

6.1 Relazioni fondamentali

6.1.1 Appartenenza di una cosa a una classe

La relazione di appartenza intercorre tra una *cosa* e una *classe*. Anzi, una cosa può essere vista come ciò che può appartenere o non appartenere ad una classe, e una classe può essere vista come ciò cui le cose possono appartenere o non appartenere.

Se x è una cosa e X una classe, abbrevieremo la proposizione "la cosa x appartiene alla classe X" (espressa anche da "la cosa x è elemento della classe X") con

$$x \in X$$

Se x è una cosa e X una classe, la negazione della proposizione "la cosa x appartiene alla classe X" ("la cosa x è elemento della classe X") è la proposizione "la cosa x non appartiene alla classe X" ("la cosa x non è elemento della classe X") e viene abbreviata con

$$x \notin X$$

Se X è una classe, gli *elementi di* X sono quelle cose x per le quali la proposizione $x \in X$ è "vera".

La più piccola classe è la *classe vuota*, ossia la classe *senza alcun elemento.* Essa è una classe X per la quale è vera la proposizione $\forall x(x \notin X)$.

La più grande classe è la *classe totale*, ossia la classe *di tutte le cose.* Essa è una classe X per la quale è vera la proposizione $\forall x(x \in X)$.

Una classe X è *non vuota* se e soltanto se ha qualche elemento, ossia se e soltanto se è vera la proposizione $\exists x(x \in X)$.

Una classe X è *non totale* se e soltanto se c'è qualcosa che non è suo elemento, ossai se e soltanto se è vera la proposizione $\exists x(x \notin X)$.

6.1.2 Principali relazioni tra classi

Le principali relazioni tra classi sono:

1. la relazione di *inclusione*, relazione binaria che quando X e Y sono classi porta alla proposizioni "*X è inclusa in Y* " (o "*X è parte di Y*");
2. la relazione di *separazione*, relazione binaria che quando X e Y sono classi porta alle proposizioni "*X è separata da Y*" (o "*X è disgiunta da Y*" o "*X e Y sono disgiunte*");
3. la relazione di *condivisione di elementi*, relazione binaria che quando X e Y sono classi porta alla proposizione "*X e Y condividono elementi*" (o "*X e Y hanno elementi in comune*");
4. la relazione di *aver elementi esterni*, relazione binaria che quando X e Y sono classi porta alla proposizione "*X ha elementi esterni a Y* ".

Vediamo come queste relazioni sono concepite nella logica classica.

1. Se X e Y sono classi , la proposizione "*X è inclusa in Y* " (o "*X è parte di Y*") viene considerata in logica classica come nient'altro che la proposizione categorica universale affermativa "ogni elemento di X è elemento di Y" ossia "per ogni cosa x, se $x \in X$ allora $x \in Y$"

   $$\forall x(x \in X \to x \in Y)$$

   cioè

   $$\forall x(x \notin X \vee x \in Y)$$

   e viene abbreviata con

   $$X \subseteq Y$$

   Si noti che

   - se X è una classe senza alcun elemento, ossia la classe vuota, allora $X \subseteq Y$ è vera quale che sia la classe Y
   - $X \subseteq X$ è vera, quale che sia la classe X
   - se Y è la classe totale, allora $X \subseteq Y$ è vera quale che sia la classe X

   Se Y è una classe, le *parti (o sottoclassi)* di Y sono tutte le classi X per le quali è vera la proposizione $X \subseteq Y$.

Si noti che il concetto di “parte” o “sottoclasse” e quello di “elemento” di una classe sono concetti distinti. Innanzitutto, solo una cosa può essere *elemento* di una classe e solo una classe può essere *parte* di una classe. Una cosa può essere elemento di un insieme Y senza esserne parte: ciò si ha forzatamente qualora quella cosa non è una classe, e può verificarsi anche quando quella cosa è una classe; ad esempio, quando una tabella è vista come una classe di righe costituite da tre elementi, una riga di quella tabella è un elemento della tabella ma non una parte della tabella. Una classe può essere parte di una classe Y senza esserne un elemento, anche quando è una cosa; ad esempio, la classe dei numeri naturali pari è una parte della classe dei numeri naturali ma non è un suo elemento anche qualora si pensasse la classe dei numeri naturali pari una cosa che può appartenere a classi.

2. Se X e Y sono classi, la proposizione “*X è separata da Y*” (o “*X è disgiunta da Y*” o “*X e Y sono disgiunte*”) viene considerata in logica classica come nient'altro che la proposizione categorica universale affermativa “nessun elemento di X è elemento di Y” ossia “per ogni x, se $x \in X$ allora $x \notin Y$”

$$\forall x(x \in X \to x \notin Y)$$

cioè

$$\forall x(x \notin X \lor x \notin Y)$$

Si osservi allora che - usando la logica classica - “X è separata (disgiunta) da Y” è equivalente a “Y è separata da X” (per la commutatività di $\lor$).

3. Se X e Y sono classi, la proposizione “*X e Y condividono elementi*” (o “*X e Y hanno elementi in comune*”) viene considerata in logica classica come nient'altro che la proposizione categorica particolare affermativa “qualche elemento di X è elemento di Y” ossia “per qualche x, $x \in X$ e $x \in Y$” ossia

$$\exists x(x \in X \land x \in Y)$$

Essa è dunque la negazione della proposizione “*X è separata (disgiunta) da Y*” (“*X e Y sono disgiunte*”).

4. Se X e Y sono classi,la proposizione “*X ha elementi esterni a Y* ” viene considerata in logica classica come nient'altro che la proposizione categorica particolare negativa “qualche elemento di X non è elemento di Y”

ossia

$$\exists x(x \in X \wedge x \notin Y)$$

Essa è dunque la negazione della proposizione "*X è inclusa in Y*", ossia la negazione di $X \subseteq Y$.

Le quattro principali relazioni tra due classi X e Y costituiscono quindi un quadrato aristotelico:

$X \subseteq Y$		X e Y sono separate
X e Y condividono elementi		X ha elementi esterni a Y, $\neg(X \subseteq Y)$

Esempio

La classe degli uomini romani è inclusa nella classe degli uomini italiani, è separata dalla classe dei triangoli, non è separata dalla classe degli uomini studenti e non è inclusa nella classe degli uomini politici.

Esercizi

- Si cerchino esempi di inclusione tra due classi, di classi separate, di classi che condividono elementi e di una classe con elementi esterni ad un altra classe.
- Data la classe che come elementi le cose a,b,c , si considerino tutte le sue parti.
- Si cerchi di immaginare una classe di cui una cosa è sia elemento che parte.

6.2 I principi

Quando sono *uguali* due classi? In logica classica, due classi sono considerate uguali quando hanno gli stessi elementi, quando coincidono nei loro elementi. Il *principio di estensionalità sulle classi* è nient'altro il principio che l'uguaglianza di due classi è nient'altro che l'avere gli stessi elementi.

Il *principio di comprensione* è il principio che ad ogni proprietà di cose corrisponde una classe che ha come suoi elementi tutte e sole le cose che hanno quella proprietà.

Per il principio di estensionalità e di comprensione, ad ogni proprietà di cose corrisponde esattamente una classe.

Molte classi sono considerate anche come cose, come enti, e quindi come possibili elementi di classi: tali classi sono chiamate *insiemi*.

Non può però essere assunto il principio che ogni classe è un insieme, ossia che ogni classe è una cosa che può essere elemento di classi: tale impossibilità è stabilita dall'antinomia di Russell,

6.2.1 Uguaglianza: il principio di estensionalità

Se X e Y sono due classi, la proposizione "X *è uguale a* Y" è in logica classica la proposizione "X *e* Y *hanno gli stessi elementi*" ossia "per ogni x, $x \in X$ se e soltanto se $x \in Y$"

$$\forall x(x \in X \leftrightarrow x \in Y)$$

cioè

$$\forall x((x \in X \rightarrow x \in Y) \wedge (x \in Y \rightarrow x \in X))$$

ed è abbreviata da

$$X = Y$$

E' facile verificare che questa proposizione è equivalente alla proposizione "X è parte di Y e Y è parte di X" ossia

$$X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X$$

cioè

$$\forall x(x \in X \rightarrow x \in Y) \wedge \forall x(x \in Y \rightarrow x \in X)$$

La negazione di "X è uguale ad Y", ossia la proposizione "X è diversa da Y" è dunque la proposizione "per qualche x, $x \in X$ aut $x \in Y$" ("X e Y non hanno gli stessi elementi") cioè

$$\exists x((x \in X \wedge x \notin Y) \vee (x \in Y \wedge x \notin X))$$

("c'è una cosa che appartiene ad una delle due classi X e Y, ma non ad entrambe") ed è abbreviata da

$$X \neq Y$$

Questa proposizione è equivalente a

$$\exists x(x \in X \wedge x \notin Y) \vee \exists x(x \in Y \wedge x \notin X)$$

("X non è parte di Y oppure Y non è parte di X", "c'è una cosa che appartiene a X ma non a Y, oppure c'è una cosa che appartiene a Y ma non a X").

Ritenere che due classi X e Y sono uguali quando hanno gli stessi elementi, anche se sono state definite in maniera differente o sono state costruite in maniera differente o sono state pensate in maniera differente, vuol dire che *ciò che differenzia una classe da un'altra sono soltanto i suoi elementi,* vuol dire che *in una classe conta soltanto quali sono i suoi elementi* e non conta nient'altro. Le definizioni o le costruzioni di una classe possono servire a indicare o a pensare una classe, ma la classe è indipendente da quelle definizioni e da quelle costruzioni.

Questa concezione delle classi - per cui in una classe conta soltanto quali sono i suoi elementi - è detta *estensionale*. E si chiama *principio di estensionalità* il principio per cui due classi sono ugauli quando hanno gli stessi elementi.

In particolare, il principio di estensionalità comporta:

- *l'astrazione dalla molteplicità*, ossia il numero di volte in cui un elemento appartiene ad una classe non ha alcuna rilevanza: sono uguali due classi che "differiscono" solo perchè certi elementi in una delle due classi "compaiono" un certo numero (finito o infinito) di volte e nell'altra classe "compaiono" un numero (finito o infinito) diverso di volte. Ad esempio, la classe $\{a, b, c, a, b, b, c\}$ è uguale a $\{a, b, c\}$;

- *l'astrazione dall'ordine*, ossia l'ordine con cui gli elementi sono disposti in una classe non ha alcuna rilevanza: sono uguali due classi che "differiscono" solo perchè gli elementi in una delle due classi "compaiono" in un certo ordine e nell'altra classe in un altro ordine. Ad esempio, la classe $\{a, b, c\}$ è uguale a $\{b, a, c\}$.

Esempi

La proprietà "essere il doppio di un numero naturale" e la proprietà "essere divisibile per 2" sono proprietà alle quali corrispondono due classi che hanno gli stessi elementi e dunque sono uguali.

Esercizi

- Si trovino esempi di altre coppie di proprietà P e Q alle quali corrispondono due classi che hanno gli stessi elementi e dunque sono uguali.

- Come si dimostra che due classi sono uguali?

6.2.2 Dalle proprietà alle classi: il principio di comprensione

Il principio di comprensione afferma che, per ciascuna proprietà di cose, esiste una classe che le corrisponde. E' il principio che usiamo quando passiamo, ad esempio, dalla proprietà "essere uomo buono" alla classe degli uomini buoni, dalla proprietà "essere numero naturale" alla classe dei numeri naturali, ecc.

Sia P una proprietà di cose. - Si osservi che una proprietà di cose può essere espressa prendendo una proposizione qualsiasi in cui una certa componente ha il tipo di tutte le cose, e rimpiazzando tale componente con una variabile x per cose: si ha così la proprietà goduta da tutte quelle cose che, quando vengono prese come valore della variabile x, fanno ottenere una proposizione vera.

Una classe X *corrisponde* alla proprietà P quando gli elementi di X sono tutte e sole le cose che hanno quella proprietà P, ossia quando gli elementi di X sono tutte e sole le cose x per le quali la proposizione $P(x)$ *è vera,* ossia quando si ha che "per ogni cosa x, $x \in X$ se e soltanto se $P(x)$"

$$\forall x(x \in X \leftrightarrow P(x))$$

Dal principio di estensionalità, segue immediatamente che due classi che corrispondono a una stessa proprietà devono essere uguali, e cioè che ad ogni proprietà può corrispondere *al massimo una classe.* Infatti, se ci fossero due classi X e Y che corrispondono a una stessa proprietà P, si dovrebbe avere per ogni cosa x

- $x \in X$ sse $P(x)$
- $x \in Y$ sse $P(x)$

e dunque si dovrebbe concludere che per ogni cosa x $x \in X$ sse $x \in Y$, ossia che X e Y sono la stessa classe.

Il *principio di comprensione* afferma che ad ogni proprietà corrisponde *almeno una classe.* E dunque - dal principio di comprensione e dal principio di estensionalità - si ha che per ogni proprietà esiste una e una sola classe che le corrisponde.

Se P è una proprietà di cose, l'unica classe che corrisponde a P viene usualmente rappresentata dalla notazione

$$[x/P(x)]$$

che viene letta *la classe delle cose x per le quali $P(x)$ è vera*, ovvero *l'insieme delle cose che hanno la proprietà P*. Dunque, il principio di comprensione (sulla base del principio di estensionalità) può anche essere formulato nel modo seguente: se P è una proprietà di cose, allora esiste la classe $[x\ /P(x)]$.

6.2.3 Gli insiemi: le classi che sono enti

Di fatto, in matematica ma non solo in matematica, si considerano classi i cui elementi sono classi, ossia classi di classi.

Quando una classe X è considerata come elemento di una classe, allora X deve essere ritenuta una cosa, un ente, poichè solo le cose possono essere elementi di una classe. Ad esempio,

- quando i numeri reali sono definiti come classi di numeri naturali, la classe dei numeri reali è una classe di classi di numeri naturali, e dunque le classi di numeri naturali devono essere ritenuti cose;

- quando una tabella a tre colone è pensata come la classe delle sue righe, poichè una riga è una classe di tre oggetti (uno per ciascuna colonna), la tabella è una classe di classi di oggetti, e dunque le righe sono classi che vengono considerate cose.

Gli *insiemi* sono le classi che vengono ritenute *cose*, e dunque sono gli insiemi che possono essere elementi di classi.

Le classi che non sono insiemi vengono chiamate di solito *classi proprie*.

E dunque, poichè ogni insieme è una cosa, quando X e Y sono insiemi, possiamo formare l'enunciato "X è elemento di Y" ossia $X \in Y$.

Inoltre, se X è un insieme e $Y \subseteq X$, Y è detto *sottoinsieme di X* ed è a sua volta un insieme. Ossia: le parti di un insieme sono anch'esse insiemi.

6.2.4 Tutte le classi sono insiemi? No, per l'antinomia di Russell

Ha senso distinguere tra classi e insiemi? La distinzione tra classi e insiemi non avrebbe senso in uno dei seguenti casi:

- se nessuna classe potesse essere ritenuta una cosa, ossia se non ci fosse alcun insieme;

- se ogni classe potesse essere ritenuta una cosa, ossia se tutte le classi fossero anche insiemi.

Il primo caso non si dà: nella pratica ci sono classi che sono trattate come cose, ossia che sono elementi di una classe, e nella matematica e nella scienza ci sono abbondanti casi di classi di classi.

Si tenga presente che, se valesse il secondo caso, la concezione delle classi sarebbe regolata da tre principi soltanto: il principio di estensionalità, il principio che le classi sono cose, e il principio di comprensione. E tutti questi tre principi sono asserzioni *logiche*, ossia asserzioni in cui compaiono soltanto concetti logici.

Ma il secondo caso non si può dare: infatti, dall'ipotesi che si dia il secondo caso, ossia dall'ipotesi che tutte le classi sono cose, è dimostrabile una proposizione falsa, come faremo vedere qui sotto. Si ricordi che se da una proposizione A è dimostrabile una proposizione falsa, allora quella proposizione A deve essere per forza falsa.

La dimostrazione che dal principio di estensionalità, dal principio di comprensione e dal principio che ogni classe è una cosa si ottiene una proposizione falsa è detta *antinomia di Russell* e fu presentata da Bertrand Russell nel 1901; essa può essere esposta come segue:

- Assumendo il principio che le classi sono cose, possiamo considerare la seguente proprietà $RUSSELL$ definita da:

  $$RUSSELL(x) \text{ sse } x \notin x$$

  Ossia: una cosa x gode della proprietà $RUSSELL$ quando x è una classe che non appartiene a se stessa.

- Si applica il principio di comprensione a questa proprietà $RUSSELL$: allora, esiste la classe $[x\ /RUSSELL(x)]$ che denoteremo con $\boldsymbol{Russell}$, la classe di tutte le classi che non appartengono a se stesse. Si ha allora che

  $$\text{per ogni cosa } x, x \in \boldsymbol{Russell} \text{ sse } x \notin x$$

- Da questa proposizione, poichè per il principio che le classi sono cose si ha che anche $\boldsymbol{Russell}$ è una cosa, possiamo concludere

  $$\boldsymbol{Russell} \in \boldsymbol{Russell} \text{ sse } \boldsymbol{Russell} \notin \boldsymbol{Russell}$$

  Ma quest'ultima proposizione è falsa.

L'antinomia di Russell ci porta a distinguere tra le proprietà alle quali corrisponde un insieme e le proprietà alle quali non corrisponde un insieme. Ossia: data una proprietà P e considerata la classe di tutte e sole le cose che godono di quella proprietà,

$$[x/P(x)]$$

questa classe può essere un insieme (e quindi essere una cosa) oppure non essere un insieme, non essere una cosa, non essere un potenziale elemento di altre classi, e in tal caso è detta *classe propria.*

Ad esempio,

- la classe $[x/x \notin x]$ corrispondente alla proprietà espressa da "$x \notin x$" non è un insieme (in seguito alla antinomia di Russell),
- la classe $[x/x = x]$ corrispondente alla proprietà espressa dall'enunciato "$x = x$" (cioè la classe totale, la classe di tutte le cose) non è un insieme, poichè altrimenti ogni sua parte sarebbe un insieme, e dunque sarebbe un insieme anche la classe corrispondente alla proprietà espressa dall'enunciato "$x \notin x$".

6.3 Operazioni logiche sugli insiemi

6.3.1 Insieme vuoto, singoletti, coppie e n-ple

6.3.1.1 Insieme vuoto

Si prenda la proprietà espressa dall'enunciato $x \neq x$, ossia la proprietà "essere diverso da se stesso", proprietà che non è goduta da alcuna cosa. A questa proprietà corrisponde l'insieme - privo di elementi- che è detto "insieme vuoto" e viene rappresentato da $\emptyset$. Ossia:

$$\emptyset = [x/x \neq x]$$

Per il principio di estensionalità, c'è un solo insieme vuoto ed esso è l'insieme corrispondente a qualunque proprietà che non è goduta da alcuna cosa.

6.3.1.2 Singoletto di una cosa

Si supponga che a sia una cosa. Si consideri la proprietà espressa dall'enunciato $x = a$ ossia la proprietà "essere a" , proprietà che è goduta dalla sola cosa a. A questa proprietà corrisponde l'insieme - che ha a come unico suo elemento - che è detto "singoletto di a" e viene rappresentato da $\{a\}$. Ossia:

$$\{a\} = [x/x = a]$$

Per il principio di estensionalità, esso è l'insieme corrispondente a qualunque proprietà goduta soltanto dalla cosa a. Il singoletto di a non va confuso con la cosa a: il singoletto di a ha un solo elemento (a stessa) mentre a può avere anche numerosi elementi o nessun elemento.

Si noti che, data una cosa a, essendo $\{a\}$ una cosa, esiste anche l'insieme $\{\{a\}\}$, e così si può asserire che esistono *infiniti* insiemi

$$\{a\}, \{\{a\}\}, \{\{\{a\}\}\}, ..., \{\{\{... \{a\} ...\}\}\}, ...$$

tutti con un solo elemento.

Si noti anche che, data una cosa a, il singoletto di a (corrispondente alla proprietà "essere a") può ben essere considerato "l'idea di a", e che la successione infinita di insiemi sopra elencata è la successione : a, l'dea di a, l'idea dell'idea di a, l'idea dell'idea dell'idea di a, ..., l'dea dell'idea dell'idea dell'....idea di a...., ...

In particolare, a partire da $\emptyset$, si può asserire che esistono *infiniti* insiemi

$$\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, ..., \{\{\{... \{\emptyset\} ...\}\}\}, ...$$

tutti con un solo elemento.

6.3.1.3 Coppie di cose

Si supponga che a e b siano cose. Si consideri la proprietà espressa dall'enunciato "$x = a$ oppure $x = b$" ossia la proprietà "essere a oppure essere b", proprietà che è goduta dalle sole cose a e b. A questa proprietà corrisponde l'insieme - che ha come suoi unici elementi le cose a e b - che è detto "coppia di a e b" e viene rappresentato da $\{a, b\}$. Ossia:

$$\{a, b\} = [x/x = a \vee \ x = b]$$

Si noti che, per il principio di estensionalità, si ha che: $\{a, a\} = \{a\}$ e $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Ad esempio, con

$$\{0,1\}$$

denotiamo l'insieme dei valori classici di verità, ossia l'insieme delle proposizioni secondo la concezione classica.

A partire da $\emptyset$ e da $\{\emptyset\}$ si può asserire l'esistenza dell'insieme a due elementi $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$: nulla impedisce di prendere 0 come $\emptyset$ e 1 come $\{\emptyset\}$.

6.3.1.4 n-ple di cose

Se $a_1, ..., a_n$ sono cose, si consideri la proprietà espressa dalla formula "$x = a_1$ oppure $x = a_2$ oppure ... oppure $x = a_n$", proprietà goduta dalle cose $a_1, ..., a_n$. A tale proprietà corrisponde l'insieme - che ha come unici elementi le cose $a_1, ..., a_n$ - chiamato "n-pla di $a_1, ..., a_n$" e rappresentato da $\{a_1, ..., a_n\}$. Ossia

$$\{a_1, ..., a_n\} = [x/x = a_1 \ \lor ... \lor \ x = a_n]$$

Si noti che, se le cose $a_1, ..., a_n$ sono tutte diverse, allora l'insieme $\{a_1, ..., a_n\}$ha esattamente n elementi; altrimenti ha un numero di elementi pari al numero delle cose diverse in $a_1, ..., a_n$. In particolare, per il principio di estensionalità

$$\{a, b, c, a, d, c, b, e, a\} = \{a, b, c, d, e\} = \{b, c, a, d, e\}$$

Ossia in una n-pla l'ordine in cui gli elementi sono indicati non conta, e non conta neppure quante volte un elemento è indicato.

6.3.1.5 Coppie ordinate

Spesso si fa uso, quando a e b sono cose, del concetto di *coppia ordinata di* a *e* b che viene indicata con

$$\langle a, b\rangle$$

con l'idea di avere un aggregato che contiene a e b e dove a viene prima di b. Quindi, due coppie ordinate sono dette uguali quando la prima componente della prima coppia è uguale alla prima componente della seconda coppia e la seconda componenente della prima coppia è uguale alla seconda componente della seconda coppia. Ossia:

$$\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \ \text{ sse } a = c \text{ e } b = d$$

La coppia ordinata $\langle a,b\rangle$ è un insieme, quando a e b sono cose.

Infatti, come coppia ordinata $\langle a,b\rangle$ può essere preso l'insieme $\{\{a\},\{a,b\}\}$ che esiste perchè si tratta di una coppia formata dal singoletto di a e dalla coppia $\{a,b\}$. Si può dimostrare che $\{\{a\},\{a,b\}\}$ si comporta come una coppia ordinata: infatti

$$\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\} \text{ sse } a = c \text{ e } b = d$$

6.3.1.6 n-ple ordinate

Spesso si fa uso, quando $a_1, ..., a_n$ sono cose, della nozione di n-pla *ordinata* delle cose $a_1, ..., a_n$, che viene rappresentata da

$$\langle a_1, ..., a_n\rangle$$

con l'idea di avere un aggregato che contiene le cose $a_1, ..., a_n$, disposte nell'ordine indicato. Due n-ple $\langle a_1, ..., a_n\rangle$e $\langle b_1, ..., b_n\rangle$ saranno uguali quando $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$,...,$a_n = b_n$, ossia $\langle a_1, ..., a_n\rangle$= $\langle b_1, ..., b_n\rangle$ sse per ogni i compreso tra 1 e n inclusi si ha che $a_i = b_i$.

Dunque, $\langle a,b,c,d\rangle \neq \langle c,a,b,d\rangle$, ossia in una n-pla conta l'ordine in cui le cose sono elencate, e $\langle a,a,b,c\rangle \neq \langle a,b,c\rangle$ ossia in una n-pla conta anche quante volte una cosa compare.

6.3.2 Intersezione, unione, prodotto cartesiano, potenza

6.3.2.1 Intersezione di due insiemi

Se X e Y sono insiemi, allora si consideri la proprietà espressa da "$x \in X \ \wedge\ x \in Y$". A tale proprietà corrisponde un insieme che è unico (per il principio di estensionalità), ha come elementi gli elementi comuni a X e a Y, è detto "l'intersezione di X e Y " ed è rappresentato da $X \cap Y$. Ossia:

$$X \cap Y = [x/x \in X \ \wedge\ x \in Y]$$

6.3.2.2 Unione di due insiemi

. Se Se X e Y sono insiemi, allora si consideri la proprietà espress da "$x \in X \ \vee\ x \in Y$". A tale proprietà corrisponde un insieme che è unico (per il principio di estensionalità), ha come elementi tutti gli elementi di X e tutti gli elementi di Y , è detto "l'unione di X e Y " ed è rappresentato da $X \cup Y$. Ossia:

$$X \cup Y = [x/x \in X \ \vee x \in Y]$$

6.3.2.3 Intersezione su un insieme non vuoto di insiemi

Sia X un insieme *non vuoto* di insiemi. Si consideri la proprietà espressa da "x è elemento di ogni elemento di X" ossia " $\forall Y(Y \in X \rightarrow x \in Y)$": a tale proprietà corrisponde un insieme che è unico (per il principio di estensionalità), contiene gli elementi comuni a tutti gli elementi di X, è chiamato "l'intersezione su X" ed è denotato da $\bigcap X$. Ossia:

$$\bigcap X = [x/\forall Y(Y \in X \rightarrow x \in Y)]$$

Si verifica facilmente che: $X \cap Y = \bigcap\{X, Y\}$.

6.3.2.4 Riunione su un insieme

Sia X un insieme di insiemi. Si consideri la proprietà espressa da "x è elemento di qualche elemento di X" ossia "$\exists Y(Y \in X \wedge x \in Y)$": a tale proprietà corrisponde un insieme che è unico (per il principio di estensionalità), contiene gli elementi degli elementi di X, è chiamato "la riunione su X" ed è denotato da $\bigcup X$. Ossia:

$$\bigcup X = [x/\exists Y(Y \in X \wedge x \in Y)]$$

Si verifica facilmente che: $X \cup Y = \bigcup\{X, Y\}$.

6.3.2.5 Prodotto cartesiano di due insiemi

Se X e Y sono insiemi, si consideri la proprietà espressa da "z è una coppia ordinata la cui prima componente appartiene a X e la seconda componente appartiene a Y" ossia "per qualche x e per qualche y, $x \in X$ e $y \in Y$ e $z = \langle x, y\rangle$" ossia "$\exists x \exists y(x \in X \wedge y \in X \wedge z = \langle x, y\rangle)$": a tale proprietà corrisponde un insieme che è unico (per il principio di estensionalità), ha come elementi tutte le possibili coppie ordinate la cui prima componente è un elemento di X e la seconda componente è un elemento di Y, è chiamato "prodotto cartesiano di X e Y " ed è denotato da $X \times Y$. Ossia:

$$X \times Y = [z/\exists x \exists y(x \in X \wedge y \in X \wedge z = \langle x, y\rangle)]$$

$$= [\langle x, y\rangle \,/ x \in X \ \wedge y \in Y]$$

Si noti che, se X ha n elementi e Y ha m elementi, allora $X \times Y$ ha $n \times m$ elementi, ossia ci sono esattamente $n \times m$ coppie ordinate la cui prima componente è elemento di X e la seconda componente è elemento di Y.

Invece di $X \times X$, scriveremo X^2 che è chiamato "quadrato cartesiano di X" ed è l'insieme di tutte le possibili coppie ordinate fatte con elementi di X; ossia

$$X^2 = [\langle x, y\rangle \,/ x \in X \ \wedge \ y \in X]$$

Ovviamente, se X ha n elementi, allora X^2 ha n^2 elementi.

6.3.2.6 Prodotto cartesiano di n insiemi

Se $X_1, ..., X_n$ sono insiemi, consideriamo la proprietà " z è una n-pla ordinata la cui prima componente è elemento di X_1 e... e la n-esima componente è elemento di X_n": a tale proprietà corrisponde un insieme che è unico (per il principio di estensionalità) e che ha come elementi tutte le possibili n-ple ordinate dove la prima componente è elemento di X_1, la seconda è elemento di X_2,..., la n-esima è elemento di X_n; tale insieme è chiamato "prodotto cartesiano di $X_1, ..., X_n$" ed è denotato da $X_1 \times ... \times X_n$. Ossia

$$X_1 \times ... \times X_n = [\langle x_1, ..., x_n\rangle \,/ x_1 \in X_1 \ \wedge \ x_2 \in X_2 \wedge ... \ \wedge x_n \in X_n]$$

Si noti che X_1 ha m_1 elementi, ..., e X_n ha m_n elementi, allora $X_1 \times ... \times X_n$ ha $m_1 \times ... \times m_n$ elementi, e dunque $m_1 \times ... \times m_n$ è il numero di tutte le possibili n-ple ordinate la cui prima componente è elemento di X_1e... e la n-esima componente è elemento di X_n.

Invece di $X \times X \times X$ scriveremo X^3, e in generale invece di $X \times X \times ... \times X$ (n volte X) scriveremo X^n. Ossia

$$X^n = [\langle x_1, ..., x_n\rangle \,/ x_1 \in X \ \wedge \ x_2 \in X \ \wedge \ ... \ \wedge \ x_n \in X]$$

ed è l'insieme di tutte le possibili n-ple ordinate fatte con elementi di X (se X ha m elementi, allora X^n ha m^n elementi).

6.3.2.7 La potenza di un insieme (l'insieme delle parti di un insieme)

Se X è un insieme, si consideri la proprietà espressa da "$Y \subseteq X$" : a tale proprietà corrisponde un insieme che è unico (per il principio di estensionalità), contiene come elementi tutti i sottoinsiemi di X, è chiamato "potenza di X " o "insieme delle parti di X" ed è denotato da $\wp(X)$. Ossia

$$\wp(X) = [Y/Y \subseteq X]$$

Si ricordi che, per ogni X, $\emptyset \subseteq X$ e $X \subseteq X$, e dunque $\emptyset \in \wp(X)$e $X \in \wp(X)$. Si noti anche che $\wp(\emptyset) = \{\emptyset\}$ e $\wp(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Si verifica facilmente che:

- se $X \subseteq Y$ allora $\wp(X) \subseteq \wp(Y)$
- se X ha n elementi, allora $\wp(X)$ ha 2^n elementi, ossia il numero di tutti i possibili sottinsiemi di un insieme con n elementi è 2^n.

6.3.2.8 L'insieme dei numeri naturali e le definizioni induttive

La classe dei numeri naturali è un insieme. Esso è l'insieme che ha come elementi tutti e soli i numeri naturali, ossia i suoi elementi sono $0, 1, 2, ..., n, n + 1, ...$ L'insieme dei numeri naturali sarà denotato da $\mathbf{N}$.

Si noti che i singoli elementi di $\mathbf{N}$ possono essere concepiti come particolari insiemi: come 0 può essere preso l'insieme vuoto $\emptyset$, 1 come l'insieme $\{\emptyset\} = \{0\}$, 2 come l'insieme $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}$, ..., $n + 1 = \{0, ..., n\}$, ... In questa maniera, ogni numero naturale n è concepito come un insieme con n elementi, e precisamente come l'insieme dei numeri naturali minori di lui. Si noti anche che il passaggio da un numero naturale n al suo successore $n + 1$ consiste nel passare dall'insieme n (l'insieme dei numeri naturali minori di n) all'insieme $n \cup \{n\}$ (l'insieme dei numeri naturali minori di $n + 1$).

Se vogliamo caratterizzare questo insieme come insieme corrispondente a una proprietà, allora $\mathbf{N}$ è ***il più piccolo*** tra gli insiemi X che hanno queste proprietà:

- $0 \in X$, ossia $\emptyset \in X$
- per ogni x, se $x \in X$ allora il "successore di x"$\in X$.

In modo equivalente, ciò si esprime dicendo che l'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali è definito come l'insieme di tutte le cose che si ottengono da 0 mediante un uso illimitato del "passaggio al successore" e che non contiene nient'altro; ossia possiamo definire l'insieme $\mathbf{N}$ nella maniera seguente:

BASE: $0 \in \mathbf{N}$

PASSO (procedure di generazione) se $x \in \mathbf{N}$ allora il successore di x appartiene a $\mathbf{N}$

CLAUSOLA FINALE: nient'altro appartiene a $\mathbf{N}$.

Una definizione siffatta è detta *definizione induttiva.*

Una definizione induttiva di un insieme X consiste nel definire X come il più piccolo insieme che contiene tutte le cose che si ottengono a partire da un insieme di cose (detto la *base* della definizione induttiva, e costituito dal solo numero 0 nella defnzione induttiva dell'insieme dei numeri naturali) eseguendo illimitatamente certe operazioni (che costituiscono il *passo* della definizione induttiva; nella definizione induttiva dell'insieme dei numeri naturali c'è solo un'operazione, qiella del "passaggio al successore"). La più semplice definizione induttiva è quella dell'insieme dei numeri naturali.

La definizione induttiva di un insieme X può avere dunque la seguente forma. Si fissa un insieme $base(X)$ ("la base della definizione induttiva") e una collezione $Ope(X)$ di operazioni ("il passo della defnzione induttiva"), e si pone:

- *Base di induzione*: se $x \in base(X)$ allora $x \in X$
- *Passo di induzione*: se F è un'operazione n-aria e $f \in Ope(X)$ e $x_1, ..., x_n \in X$, allora $f(x_1, ..., x_n) \in X$
- *Clausola finale*: nient'altro appartiene a X

6.4 Operazioni, proprietà, relazioni

6.4.1 Operazioni e funzioni

Ricordiamo che un'operazione f è detta *operazione da una classe* X *a una classe* Y quando f si applica agli elementi di X e, se l'applicazione di f ha successo su un elemento x della classe X, fa ottenere da x un elemento della classe Y o associa a x un elemento della classe Y.

Ricordiamo anche che, se f è un'operazione da X a Y , allora

- la classe X è detta *dominio* dell'operazione f, e i suoi elementi sono detti anche *argomenti* o *input* dell'operazione f; ossia, il dominio di un'operazione f è l'insieme degli argomenti o degli input di tale operazione;

- Se x è una cosa del dominio X dell'operazione f , e f si applica con successo alla cosa x e assegna ad x la cosa y che deve appartenere a Y, si dice che y è ***il valore (o l'output) di f applicata a x*** e si scrive

$$f(x) = y$$

- la classe Y è detta ***codominio*** dell'operazione f ed è la classe a cui devono appartenere i valori o ouput dell'operazione;

Si ricordi infine che:

- Il dominio e il codominio di una operazione f possono avere gli stessi elementi. Quando il dominio e il codominio di un'operazione f sono la stessa classe, ossia quando f è un'operazione da X a X, allora si dice che f è un'operazione ***su*** X.

- Una operazione f che ha come dominio la classe di tutte le n-ple ordinate costituite da elementi di un insieme X e come codominio una classe Y viene anche chiamata ***operazione n-aria da X a Y***.

Se il dominio e il codominio di un'operazione f sono entrambi insiemi, ossia se l'operazione f ha come dominio un insieme X e come codominio un insieme Y, allora l'operazione è detta *funzione* da X a Y.

Una funzione su un insieme X è una funzione il cui dominio e il cui codominio sono l'insieme X.

Una funzione n-aria da un insieme X a un insieme Y è - per quanto abbiamo ricordato sopra - una funzione da X^n a Y, essendo X^n l'insieme di tutte le n-ple ordinate di elementi di X.

Ci limitiamo ora a studiare le *funzioni.*

Sia f una funzione da X a Y:

- L'insieme dei valori o output della funzione f è detto *rango* della funzione f. Poichè ogni valore di una operazione deve appartenere al codominio dell'operazione, il rango di f è sempre incluso nel codominio di f, cioè è un sottinsieme del codominio Y di f.

- Il *grafo* (o *tabella*) della funzione f è l'insieme di tutte le possibili coppie ordinate $\langle x, y\rangle$ dove x è un elemento del dominio di f e $f(x) = y$ (ossia y è il valore di f applicata a x). Ossia, il grafo di f è una sorta di tabella a due colonne, dove in ciascuna riga nella prima colonna compare un argomento della operfunzione f per il quale l'applicazione di f ha successo e nella seconda colonna compare il valore della funzione f applicata a quell'argomento indicato nella prima colonna nella stessa riga. Il grafo di una funzione f è così sempre incluso nel prodotto cartesiano $X \times Y$ del dominio e del codominio della funzione, ossia è un sottinsieme di $X \times Y$.

Si noti che il codominio di una funzione non coincide necessariamente con il rango della funzione.

Una funzione f da X a Y è detta *totale* quando si applica con successo ad ogni elemento del suo dominio X. Equivalentemente, una funzione f da X a Y è detta *totale* quando soddisfa la seguente condizione: per ogni elemento x del dominio X di f, esiste un y del codominio Y di F tale che $f(x) = y$. Ossia, una funzione f da X a Y è totale se e soltanto se è vera la proposizione

$$\forall x(x \in X \to \exists y(y \in Y \wedge f(x) = y)$$

proposizione che si usa abbreviare in

$$\forall x \in X \exists y \in Y(f(x) = y)$$

Una funzione f da X a Y è detta *iniettiva* quando ad argomenti diversi associa valori diversi, ossia quando "preserva le diversità". Equivalentemente, una funzione f da X a Y è detta *iniettiva* quando soddisfa questa condizione: se x è diverso da y, allora $f(x)$ è diverso da $f(y)$.Ossia, un'operazione f da X a Y è iniettiva se e soltanto se è vera la proposizione

$$\forall x \forall y(x \in X \wedge y \in X \wedge x \neq y \to f(x) \neq f(y))$$

proposizione che si usa abbreviare in

$$\forall x \in X \forall y \in X(x \neq y \to f(x) \neq f(y))$$

Quando una funzione da X a Y è iniettiva, ovviamente il numero degli elementi di X non può essere maggiore di quello di Y.

Una funzione f da X a Y è detta *suriettiva* quando il rango di f e il codominio Y di f hanno gli stessi elementi. Equivalentemente, poichè per definizione ogni elemento del rango di una funzione è elemento del codominio di quella funzione, una funzione f da X a Y è detta *suriettiva* quando la seguente condizione è soddisfatta : se y è un elemento del codominio Y di f, allora per qualche elemento x del dominio X di f si ha $y = F(x)$. Ossia, una operazione f da X a Y è suriettiva se e soltanto se è vera la proposizione

$$\forall y(y \in Y \to \exists x(x \in X \wedge f(x) = y))$$

proposizione che si usa abbreviare in

$$\forall y \in Y \exists x \in X(f(x) = y)$$

Una funzione f da X a Y è detta *biiettiva* o *corrispondenza biunivoca* quando è sia iniettiva che suriettiva. Le funzioni che sono sia iniettive che suriettive, ossia le corrispondenze biunivoche, sono particolarmente importanti anche perchè l'esistenza di una corrispondenza biunivoca f da X a Y impone che X e Y abbiano lo stesso numero di elementi.

Due insiemi X e Y si dicono *equipotenti* sse esiste una corrispondenza biunivoca da X a Y .

Esempi

- Esempio di funzione in cui il dominio e il codominio sono lo stesso insieme: l'operazione "successore di un numero naturale"che ha come dominio e come codominio l'insieme **N** dei numeri naturali.

- Esempi di funzioni il cui rango non coincide con il codominio: la funzione "il successore di un numero naturale" ha come dominio e come codominio l'insieme dei numeri naturali ma come rango ha l'insieme i cui elementi sono i numeri naturali eccetto il numero 0 (infatti 0 non è successore di alcun numero naturale) e la funzione "il numero naturale che è quadrato di un numero naturale" ha come dominio e come codominio l'insieme dei numeri naturali ma come rango l'insieme dei numeri quadrati (1, 4, 9, 16, 25, ecc.).

- Esempi di funzioni n-arie: sono funzioni binarie da **N** a **N**, la "somma" di numeri naturali, il "prodotto" di numeri naturali, l'operazione "il numero naturale sottrazione di due numeri naturali" e l'operazione "il numero naturale divisione di due numeri naturali".

- Esempi di funzioni totali: la funzione "successore" da **N** a **N**, la funzione "somma " di numeri naturali, la funzione "prodotto" di numeri naturali, la funzione unaria su **N** "numero naturale ottenuto dividendo per 2 un numero pari" ecc.

- Esempi di funzioni non totali: la funzione binaria su **N** "numero naturale sottrazione di due numeri naturali" (infatti, ci sono coppie di numeri naturali la cui sottrazione non è un numero naturale), la funzione binaria su **N** "numero naturale divisione di due numeri naturali"(infatti, ci sono coppie di numeri naturali la cui divisione non è un numero naturale), ecc.

- Esempi di funzioni iniettive: le funzioni unarie su **N** "successore" e "quadrato di un numero naturale" , la funzione dall'insieme dei numeri naturali pari all'insieme dei numeri naturali **N** "numero naturale ottenuto dividendo per 2 un numero pari" dalla classe dei numeri naturali pari alla classe (poichè dividendo per 2 numeri pari diversi si hanno numeri naturali diversi), ecc. .

- Esempi di funzioni non iniettive:

  – la funzione binaria di somma **N** a **N** (la somma applicata a due diverse coppie ordinate può dare come valore lo stesso numero, ad esempio alla coppia ordinata $\langle 2, 5\rangle$ e alla coppia ordinata $\langle 3, 4\rangle$ dà come valore lo stesso numero naturale 7)

  – la funzione binaria di prodotto da **N** a **N** (il prodotto applicato a due diverse coppie ordinate può dare come valore lo stesso numero, ad esempio alla coppia ordinata $\langle 2, 10\rangle$ e alla coppia ordinata $\langle 5, 4\rangle$ dà come valore lo stesso numero naturale 20)

  – la funzione "altezza in centimentri di un uomo" dall'insieme degli uomini all'insieme **N** (ci sono uomini diversi che hanno la stessa altezza)

- Esempi di funzioni suriettive: la funzione binaria di "somma" da **N** a **N** è suriettiva (infatti, ciascun numero naturale è valore della somma applicata a due numeri naturali, e in particolare $n = n + 0$), la funzione binaria "prodotto" da **N** a **N** è suriettiva (infatti, ciascun numero naturale è valore del prodotto applicato a due numeri naturali, e in particolare $n = n \times 0$), la funzione unaria "numero naturale ottenuto dividendo per 2 un numero naturale pari" da **N** a **N** è suriettiva (infatti ogni numero naturale n può essere ottenuto dividendo per 2 un numero naturale pari, ossia dividendo per 2 il numero $n \times 2$), ecc..

- Esempi di funzioni non suriettive: la funzione unaria "successore di un numero naturale" da **N** a **N** (poichè 0 non è successore di alcun numero), la funzione unaria "quadrato di un numero naturale" da **N** a **N** (poichè ci sono numeri, come il numero 2, che non sono quadrati di alcun numero), la funzione "altezza in centimetri di un uomo" (ci sono numeri naturali che non sono altezza in centimetri di nessun uomo!).

- Esempi di funzioni biiettive o corrispondenze biunivoche: degli esempi sopra considerati, soltanto la funzione unaria "numero naturale ottenuto dividendo per 2 un numero naturale pari" dall'insieme dei numeri naturali àipari all'insieme dei numeri naturali è una funzione biiettiva.

6.4.2 Principio di estensionalità per le funzioni

Anche la concezione delle funzioni in logica classica è estensionale. In logica classica, una funzione f da X a Y viene considerata "prescindendo" dalla natura e dal modo con cui si compie la trasformazione di elementi di X in elementi di Y, l'associazione di *valori* a *argomenti.* E cosa resta di una funzione f da X a Y, se si prescinde dalla maniera in cui elementi di X vengono trasformati in elementi di Y? Resta una sorta di tabella, eventualmente idealizzata, nella quale in ogni riga si indica per ciascun elemento di X l'elemento di Y in cui esso è trasformato dalla funzione f (e tale valore deve essere unico, ossia allo stesso argomento non può venir assegnato più di un valore) , e chiaramente in questa tabella non vengono indicati gli elementi di X che non vengono trasformati dalla operazione f in elementi di Y. Ma cosa è mai una siffatta tabella, se prescindiamo dall'ordine delle righe che non ha alcuna importanza? Ogni riga è nient'altro che una *coppia ordinata* $< x, y >$ dove x è un elemento di X e y è un elemento di Y, e la tabella (prescindendo dall'ordine delle righe) è quella che abbiamo chiamato *grafo della funzione*: una classe di righe ossia una classe di siffatte coppie ordinate. Il grafo dell'operazione f per la logica classica *è* l'operazione f.

Cosìuna funzione f da X a Y in logica classica è una classe di coppie ordinate. Dunque due funzioni che hanno lo stesso grafo sono ritenute uguali.

La concezione estensionale delle funzioni consiste nel dire che una funzione f da X a Y è nient'altro che la classe di quelle coppie ordinate $\langle x, y\rangle$ tali che "la funzione f applicata a x dà come valore y" ; in tale classe ,

- poichè gli argomenti appartengono al dominio della funzione e i valori appartengono al codominio, in ciascuna coppia ordinata $\langle x, y\rangle$ la prima componente appartiene al dominio di f e la seconda componente appartiene al codominio di f;

- poichè a ciascun argomento l'operazione assegna al massimo un valore, non ci sono due coppie ordinate che abbiano la stessa prima componente.

Perciò, nella concezione classica, una funzione f da X a Y è una classe di coppie ordinate tale che:

1. se $\langle x, y\rangle \in f$ allora $x \in X$ e $y \in Y$
2. se $\langle x, y\rangle \in f$ e $\langle x, z\rangle \in f$ allora $y = z$.

Viceversa, nella concezione classica, ogni classe di coppie ordinate che soddisfano 1. e 2. è una funzione da X a Y , quella funzione che ad ogni $x \in X$ dà come valore l'unico $y \in Y$ tale che $\langle x, y\rangle \in f$.

Riformuliamo, concependo le funzioni come classi di coppie ordinate, le nozioni di funzione totale, di funzione iniettiva, di funzione suriettiva.

Una funzione f da X a Y è detta *totale* sse

$$\forall x \in X \exists y \in Y(\langle x, y\rangle \in f)$$

Una funzione f da X a Y si dice *iniettiva* sse

$$\forall x \in X \forall y \in X \forall v \in Y \forall z \in Y(x \neq y \wedge \langle x, v\rangle \in f \wedge \langle y, z\rangle \in f \to v \neq z)$$

Se f è una funzione iniettiva da X a Y , allora la classe delle coppie $\langle y, x\rangle$ tali che $\langle x, y\rangle \in f$ è anche essa una funzione, ed è una funzione da Y a X: tale funzione è detta l'inversa di f e viene denotata da f^{-1} . Così, se f è definita per x, $f^{-1}(f(x)) = x$; e se y è un valore di f, allora $f(f^{-1}(y)) = y$.

Una funzione f da X a Y è detta *suriettiva* sse

$$\forall y \in Y \exists x \in X(\langle x, y\rangle \in f)$$

6.4.3 Proprietà e relazioni su insiemi

Si ricordi che una *proprietà* P su un insieme X è una funzione totale da X all'insieme $\{0, 1\}$, e che una relazione R n-aria su un insieme X è una proprietà sull'insieme X^n di tutte le n-ple ordinate fatte con elementi di X. Inoltre, si ricordi che, se P è una proprietà su X, e $x \in X$, si dice che "x gode di P" quando $P(x) = 1$ e si dice che "x non gode di P" quando $P(x) = 0$.

Per il principio di estensionalità per le funzioni, una proprietà P su un insieme X si identifica con il suo grafo che è un sottoinsieme di $X \times \{0,1\}$.

Mostriamo, sulla base del principio di estensionalità per le funzioni, che possiamo identiificare le proprietà su un insieme con i sottinsiemi di quell'insieme, e perciò possiamo vedere la potenza di un insieme come l'insieme di tutte le sue proprietà.

Infatti:

- Se P è una proprietà su un insieme X, l'insieme delle cose x per le quali $\langle x, 1\rangle \in P$ è detto *estensione di* P, è denotato da $Est(P)$ ed è un sottoinsieme di X: tale sottoinsieme di X determina univocamente il grafo di P, ossia tale grafo è costituito dalle coppie $\langle x, 1\rangle$ per gli elementi x di X che sono anche elementi di $Est(P)$ e dalle coppie $\langle x, 0\rangle$ per gli elementi x di X che non sono elementi di $Est(P)$.

- Inoltre, ogni sottoinsieme Y di un insieme X induce una proprietà che denoteremo $Pro(Y)$ e che è cosìdefinita: se $x \in X$, $\langle x, 1\rangle \in Pro(Y)$ se $x \in Y$, $\langle x, 0\rangle \in Pro(Y)$ se $x \notin Y$; ossia, $Pro(Y)$ è goduta da tutti e soli gli elementi di x che appartengono al sottoinsieme Y.

Pertanto, si mostra facilmente che, se X è un insieme:

- la funzione che ad ogni sottoinsieme Y di X associa la proprietà $Pro(Y)$ è una corrispondenza biunivoca dalla potenza di X (ossia dall'insieme di tutti i sottoinsiemi di X) alla collezione delle proprietà su X;

- la funzione inversa di questa corrispondenza biunivoca è la funzione che associa ad ogni proprietà P su X come valore $Est(P)$, e questa funzione è anch'essa una corrispondenza biunivoca dall'insieme delle proprietà su X all'insieme dei sottoinsiemi di X.

E ciò comporta che, se X è un insieme:

- possiamo identificare le proprietà su X con i sottoinsiemi di X

- il numero delle possibili proprietà su X è il numero dei possibili sottoinsiemi di X, ossia il numero degli elementi dell'insieme $\wp(X)$.

Mostriamo ora che ad ogni proprietà su un insieme si può associare il suo duale, in maniera tale che il duale del duale di una proprietà è quella stessa proprietà. Infatti, se P è una proprietà su un insieme X, il suo duale è una proprietà su quello stesso insieme che possiamo denotare con $\neg P$ e che è la funzione da X a $\{0,1\}$ così definita

$$\neg P(x) = 1 \text{ sse } P(x) = 0$$

$$\neg P(x) = 0 \text{ sse } P(x) = 1$$

Pertanto, tra il grafo di $\neg P$ e il grafo di P c'è questo rapporto:

$$\langle x, 1\rangle \in \neg P \text{ sse } \langle x, 0\rangle \in P$$

$$\langle x, 0\rangle \in \neg P \text{ sse } \langle x, 1\rangle \in P$$

Così è facile mostrare che per ogni x $\neg\neg P(x) = P(x)$, e cioè il duale del duale di P si comporta come P , e che il grafo di $\neg\neg P$ è uguale al grafo di P: dunque, per il principio di estensionalità delle funzioni, le due proprietà P e $\neg\neg P$ sono uguali.

Esercizio

Si applichi a una relazione binaria R su un insieme X quanto abbiamo stabilito sopra per le proprietà su X: la relazione può essere identificata con un sottinsieme di X^2, si pu0 definire una relazione $\neg R$ su X con $\neg\neg R = R$.

Capitolo 7

Codici binari e algebra di Boole

In questo capitolo saranno presentati alcuni risultati che hanno avuto grande importanza non solo per la logica in se stessa ma anche per le sue applicazioni (in particolare, all'informatica).

Mediante le *successioni finite di bit*, ossia mediante le successioni finite dei valori di verità della logica classica, si possono rappresentare - in conseguenza di un teorema dell'aritmetica - tutti i numeri naturali. Inoltre, poichè *dati* che hanno certe caratteristiche possono essere *codificati* mediante numeri naturali in conseguenza di un altro teorema dell'aritmetica, le successioni finite di bit divengono i *codici binari* dei dati che si possono codificare mediante numeri naturali.

La negazione classica e i due principali connettivi della logica classica, congiunzione classica e disgiunzione classica, soddisfano alcune importanti proprietà dalle quali discendono tutte le altre loro proprietà; queste stesse importanti proprietà sono soddisfatte anche da analoghe operazioni (complemento, intersezione, unione) sulla potenza di un insieme; in questo senso i valori di verità della logica classica e la potenza di un qualunque insieme sono casi particolari - anzi, casi principali - di un'*algebra di Boole*.

La teoria dell'algebra di Boole porta a scoprire che - introducendo la nozione di *connettivo n-ario* come funzione n-aria sull'insieme dei bit - ogni connettivo n-ario può essere definito a partire dalla negazione classica, dalla congiunzione classica e dalla disgiunzione classica. Pertanto, tutte le possibili operazioni sui bit sono ottenibili a partire da queste tre sole operazioni (negazione, congiunzione, disgiunzione) e anzi a partire dalla negazione e da una sola tra la congiunzione e la disgiunzione.

7.1 Codici binari

7.1.1 Successioni finite di bit

Diamo uno sguardo alle successioni finite di bit che (come vedremo) potranno rappresentare numeri naturali ed essere codici di dati codificabili mediante numeri numeri naturali.

Le successioni finite di bit hanno una *lunghezza*: la lunghezza di una successione finita di bit è un numero naturale.

La più piccola successione finita di bit è quella con lunghezza 0: ossia è costituita da nessun bit, ed è ovviamente unica. Si noti che il numero delle successioni finite di bit con lunghezza 0 è esattamennte $2^0 = 1$.

Le successioni finite di bit con lunghezza 1 sono formate ovviamente da un solo bit, e dunque possono essere soltanto due se si prescinde dalla natura particolare dei bit:

- la successione formata dal solo bit 0
- la successione formata dal solo bit 1.

Si noti che il numero delle successioni finite di bit con lunghezza 1 è esattamennte $2^1 = 2$.

Le successioni finite di bit con lunghessa 2 sono formate aggiungendo un bit davanti ad una successione finita di lunghezza 2, e dunque sono quattro se prescindiamo dalla natura dei bit:

- le due successioni ottenute mettendo un bit 0 prima di ciascuna delle due successioni di lunghezza 1, ossia le successioni

$$0, 0$$

$$0, 1$$

- le due successioni ottenute mettendo un bit 1 prima di ciascuna delle due successioni di lunghezza 1, ossia le successioni

$$1, 0$$

$$1, 1$$

Si noti che il numero delle successioni finite di bit con lunghezza 2 non cambierebbe se le considerassimo come ottenute aggiungendo un bit dopo ciascuna delle due successioni con lunghezza 1, e che tale numero è esattamennte $2^2 = 4$.

Le successioni finite di bit con lunghezza 3 sono formate anch'esse aggiungendo un bit davanti ad una successione finita di lunghezza 2, e dunque sono otto se prescindiamo dalla natura dei bit:

- le quattro successioni ottenute mettendo un bit 0 prima di ciascuna delle quattro successioni di lunghezza 2, ossia le successioni

$$0, 0, 0$$

$$0, 0, 1$$

$$0, 1, 0$$

$$0, 1, 1$$

- le quattro successioni ottenute mettendo un bit 1 prima di ciascuna delle quattro successioni di lunghezza 2, ossia le successioni

$$1, 0, 0$$

$$1, 0, 1$$

$$1, 1, 0$$

$$1, 1, 1$$

Si noti che il numero delle successioni finite di bit con lunghezza 3 non cambierebbe se le considerassimo come ottenute aggiungendo un bit dopo ciascuna delle quattro successioni con lunghezza 2, e che tale numero è esattamennte $2^3 = 8$.

Siamo quindi pronti a capire quante sono le successioni finite di bit con lunghezza 4: esse sono $2^4 = 16$. E così via.

In generale, le successioni finite di bit con lunghezza n sono esattamente 2^n: questa proprietà vale per il caso delle successioni finite di bit con lunghezza 0 e si trasmette dalle successioni finite di bit con una data lunghezza alle successioni finite di bit con la lunghezza immediatemente successiva $(+1)$.

7.1.2 Rappresentazione binaria dei numeri naturali

Ciascun numero naturale può essere rappresentato da una e una sola successione finita di bit, con una rappresentazione che viene chiamata *rappresentazione binaria* o *rappresentazione in base due*.

Questa possibilità è conseguenza di un importante teorema dell'aritmetica, anzi dello stesso teorema che permette di dare a ciascun numero naturale l'usuale *rappresentazione decimale* chiamata anche *rappresentazione in base dieci*.

Per capire bene quanto ora spiegheremo bisogna distinguere nettamente tra i *numeri naturali* e i loro *nomi*, le loro *rappresentazioni*, e quindi essere disposti a cambiare anche l'usuale maniera di rappresentare i numeri naturali. E bisogna, tra le varie possibili rappresentazioni dei numeri naturali, distinguere tra quelle che sono del tutto convenzionali e quelle che derivano da teoremi sui numeri naturali.

La rappresentazione dei numeri naturali usata dai latini o dai greci era del tutto convenzionale, mentre quella in base dieci da noi usata e a noi trsmessa dagli arabi è basata su un teorema aritmetico, lo stesso sul quale si basa la rappresentazione in base due.

Il teorema è il seguente.

Per ogni numero naturale n maggiore o uguale a due (numero che è chiamato *base*), ogni numero naturale diverso da zero può essere rappressentato in una sola maniera come somma finita di potenze decrescenti di n moltiplicate per coefficienti minori di n; ossia, scelta una base n maggiore o uguale a due, per ogni numero naturale m diverso da zero esiste un solo numero k ed esistono unici numeri $a_0, ..., a_k$ minori di n e con a_k diverso da zero, tali che

$$m = (n^k \times a_k) + (n^{k-1} \times a_{k-1}) + ... + (n^0 \times a_0)$$

Per rendersi conto di cosa sta dicendo questo teorema, e intuirne la dimostrazione, si rifletta su quanto segue. Fissata la base n, e preso un qualunque numero m diverso da zero,

- si cerchi innanzitutto la più grande potenza di n che è presente in m (l'esponente di n che dà luogo a questa potenza è il numero k presente nell'enunciato del teorema) ed essa non può che essere presente un numero di volte inferiore a n (perchè altrimenti essa non sarebbe la potenza più grande presente in m), e tale numero di volte è il coefficente a_k presente nell'enunciato del teorema e deve essere ovviamente maggiore di zero;

- progressivamente, per tutte le potenze di n inferiori a quella massima considerata, si considera quante volte essa è presente nel numero ottenuto da m quando si è sottratta ciascuna potenza superiore moltiplicata per il numero di volte in cui essa compare, e ciò porta a individuare i coefficienti di tali potenze che possono essere anche pari a zero ma comunque inferiori a n.

Ad esempio, consideriamo la base $n =$ *dieci* e prendiamo come m il numero *duemilacentootto*:

- la potenza di 10 più elevata presente in questo numero è la terza potenza, ossia 10^3, ed essa compare 2 volte;

- togliendo da quel numero $10^3 \times 2$, in quel che resta (*centootto*) la seconda potenza di 10, ossia 10^2, compare 1 volta;

- togliendo da quel numero $(10^3 \times 2) + (10^2 \times 1)$, nel numero risultante (*otto*) la potenza prima di 10, ossia 10^1, non compare affatto ossia compare 0 volte;

- togliendo dal numero iniziale $(10^3 \times 2) + (10^2 \times 1) + (10^1 \times 0)$, nel numero risultante (*otto*) la potenza nulla di 10 ossia 10^0 compare 8 volte;

- pertanto *duemilacentootto* è pari a

$$(10^3 \times 2) + (10^2 \times 1) + (10^1 \times 0) + (10^0 \times 8)$$

Come ulteriore esempio, consideriamo la base $n =$ *due* e prendiamo come m il numero *ventitre*:

- la potenza di 2 più elevata presente in questo numero è la quarta potenza, ossia 2^4, ed essa compare 1 volta;

- togliendo da quel numero $2^4 \times 1$, in quel che resta (*sette*) la terza potenza di 2, ossia 2^3 non compare ossia compare 0 volte;

- togliendo da quel numero $(2^4 \times 1) + (10^1 \times 0)$, nel numero risultante (ancora *sette*) la potenza seconda di 2, ossia 2^2, compare 1 volta;

- togliendo dal numero iniziale $(2^4 \times 1) + (2^3 \times 0) + (2^2 \times 1)$, nel numero risultante (*tre*) la potenza prima di 2 ossia 2^1 compare 1 volta;

- togliendo dal numero iniziale $(2^4 \times 1) + (2^3 \times 0) + (2^2 \times 1) + (2^1 \times 1)$, nel numero risultante (*uno*) la potenza nulla di 2 ossia 2^0 compare 1 volta;

- pertanto *ventitre* è pari a

$$(2^4 \times 1) + (2^3 \times 0) + (2^2 \times 1) + (2^1 \times 1) + (2^1 \times 1)$$

Da questo teorema si ricava che, quando abbiamo fissato una base (ad esempio la base dieci o la base due), ciascun numero naturale diverso da zero è univocamente determinato da questi dati (ossia può essere ricavato automaticamente da questi dati):

- l'esponente k della più alta potenza della base, che è presente nel numero naturale;

- i coefficienti (minori della base) con cui vanno moltiplicate le potenze della base, dalla k-esima potenza fino alla potenza zero, posti nella k-pla ordinata $a_k, ..., a_0$.

Infatti, quando si conoscono questi dati, è possibile ricavare il numero come somma di potenze decrescenti della base, ciascuna moltiplicata per il rispettivo coefficiente. Ma se la potenza più alta è quella con esponente k, la lista dei coefficienti $a_k, ..., a_0$ così come compaiono nella somma delle potenze decrescenti della base, essendo una k-pla ordinata, determina univocamente quel numero k. Dunque il teorema ci dice che, quando abbiamo fissato una base, ciascun numero naturale è univocamente determinato da una k-pla ordinata di numeri minori della base e con il primo membro della k-pla diverso da zero.

Nei due esempi visti sopra:

- il numero *duemilacentootto* è rappresentato univocamente, in base dieci, dalla lista di numeri: $due, uno, zero, otto$;

- il numero *ventitre* è rappresentato in base due dalla lista di numeri: $uno, zero, uno, uno, uno$.

Sulla base di questo teorema, se si sceglie una base e si introducono tanti simboli quanti sono i numeri minori di quella base, un simbolo per ciascun numero minore di quella base, allora ogni numero naturale può essere univocamente determinato da una successione finita di quei simboli (una successione che si usa scrivere senza virgole separatrici tra un simbolo e un altro).

Ad esempio:

- conveniamo che 0 rappresenti il numero zero e 1 il numero uno;
- quando è stata scelta la base *dieci*, si sono trovati dieci simboli, uno per ciascuno dei dieci numeri minori della base: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$;
- quando si sceglie la base *due*, basta avere due simboli, ossia basta avere i bit: $0, 1$;
- se si scegliesse la base sedici, bisognerebbe trovare sedici smboli, uno per ciascuno dei numeri inferiori a sedici.

Così, nei due esempi visti sopra:

- il numero *duemilacentootto* è rappresentato univocamente, in base dieci, dalla successione finita di simboli per numeri minori di dieci: $2, 1, 0, 8$ che viene scritta senza virgole separatrici nella forma 2108;
- il numero *ventitre* è rappresentato in base due dalla successione finita di simboli per numeri minori di due : $1, 0, 1, 1, 1$ che viene scritta senza virgole separatrici nella forma 10111.

In ciascuna base scelta,

- Il numero zero è rappresentato dalla sola successione finita costituita dal simbolo scelto per tale numero, usualmente 0,
- ogni numero diverso di zero è rappresentato da una e una sola successione finita di simboli per numeri minori della base, che comincia con un simbolo diverso da quello per il numero zero (0), e in particolare:
  - ciascun numero inferiore alla base è rappresentato dalla successione finita costituita soltanto dal simbolo scelto appositamente per esso, poichè tale numero è il coefficiente della potenza nulla della base;
  - la base è rappresentata da 10 poichè ciascuna base m è rappresentata da $(m^1 \times 1) + (m^0 \times 0)$;
  - la potenza k-esima della base è rappresentata dalla successione composta da 1 seguito da k volte il simbolo 0; ad esempio, 100 rappresenta la seconda potenza della base, 1000 la terza potenza della base e così via;
  - con successioni composte da $k + 1$ simboli e comincianti con 1 si rappresentano i numeri dalla k-esima potenza della base fino al numero precedente la $k + 1$-esima potenza della base.

Ad esempio, ecco come vengono rappresentanti in base 2 i numeri minori di 2^5 ossia minori di trentadue, con successioni di bit:

successione di bit	numero rappresentato in base due
0	zero
1	uno
10	due
11	tre
100	quattro
101	cinque
110	sei
111	sette
1000	otto
1001	nove
1010	dieci
1011	undici
1100	dodici
1101	tredici
1110	quattordici
1111	quindici
10000	sedici
10001	diciassette
10010	diciotto
10011	diciannove
10100	venti
10101	ventuno
10110	ventidue
10111	ventitre
11000	ventiquattro
11001	venticinque
11010	ventisei
11011	ventisette
11100	ventotto
11101	ventinove
11110	trenta
11111	trentuno

Se si sceglie una base, e si prendono in considerazione soltanto le successioni di lunghezza k, allora ciascuna di tali successioni rappresenta un numero inferiore alla k-esima potenza, il numero rappresentato dalla parte della successione che esclude gli eventuali 0 iniziali.

Ad esempio, in base 2, con le due successioni di lunghezza uno si rappresentano soltanto il numero zero (0) e il numero uno (1), con le successioni di lunghezza due si rappresentano i numeri da zero a tre (zero è 00, uno è 01, due è 10, tre è 11), con le successioni di lunghezza tre si rappresentano i numeri da zero a sette (zero è 000, uno è 001, due è 010, tre è 011, quattro è 100, cinque è 101, sei è 110, sette è 111), con le successioni di lunghezza quattro si rappresentano i numeri minori di sedici, con le successioni di lunghezza cinque si rappresentano i numeri minori di trentadue, ecc.

7.1.3 Codificazione degli elementi di un insieme

Cosa è una codificazione? cosa si può codificare? Sono queste le domande che ci porremo ora in questa prima sezione di questo capitolo.

La codificazione degli elementi di un insieme X avviene attraverso una *funzione* dall'insieme X all'insieme dei numeri naturali $\mathbf{N}$, ossia la codificazione consiste nell'associare ad ogni elemento dell'insieme X un numero che è detto *codice* di quell'elemento. Questa funzione deve avere le seguenti proprietà:

- essere totale, ossia il codice deve essere attribuito ad ogni elemento dell'insieme;

- essere iniettiva, ossia a elementi diversi dell'insieme devono essere attribuiti codici diversi;

- essere dotata di un algoritmo, ossia l'attribuzione del codice deve avvenire in manaiera meccanica e in un numero finito di passi.

. Inoltre, la sua inversa deve essere anch'essa una funzione (non necessariamente totale) dotata di un algoritmo, ed è la funzione di decodificazione: ossia, deve essere sempre possibile trovare mediante un algoritmo, dato un numero naturale, qual è (se c'è) l'elelemto di cui esso è codice.

Se f è una codificazione degli elementi di un insieme X, e $x \in X$, allora il numero naturale $f(x)$ viene chiamato *codice di* x ma sarebbe meglio chiamarlo f-codice di x poichè non è un codice in assoluto ma quello che viene attribuito dalla particolare funzione f. Se f è una codificazione degli elementi di un insieme

X allora con f^{-1} indicheremo la sua inversa, la funzione di decodificazione; se n è un numero naturale, con $f^{-1}(n)$ indicheremo - se esiste - l'elelemto di X di cui n è codice. Si noti che:

- per ogni $x \in X$, $f^{-1}(f(x)) = x$;
- per ogni $n \in \mathbf{N}$, $f(f^{-1}(n)) = n$ se n è nel rango di f.

Per *alfabeto* si intende un insieme di simboli (ad esempio, l'insieme delle lettere di un usuale alfabeto, o anche l'insieme dei simboli corrispondenti ad una tastiera).

Ogni alfabeto finito, ed ogni alfabeto infinito purchè equipotenete all'insieme dei numeri naturali, può avere una codificazione. Una codificazione di un siffatto è qualcosa di puramente arbitrario: si fissa mediante una tabella la corrispondenza di un numero naturale a ciascun simbolo appartenente all'alfabeto, facendo in modo che mai lo stesso numero sia fatto corrispondere a due simboli diversi. Se l'alfabeto è finito, la tabella è anche un algoritmo per detrminare quale numero corrisponde a ciascun simbolo: basta scorrere la tabella fino a che non si trova il simbolo per il quale si cerca il codice assegnato. Se l'alfabeto è infinito, ma equipotente all'insieme dei numeri naturali, è necessario trovare un algoritmo per la funzione iniettiva che assegna ad ogni simbolo un numero naturale.

Un esempio di codificazione di un alfabeto è quello dei codici ASCII: ad ogni simbolo di ciascuno degli usuali alfabeti delle lingue naturali, a ciascuno dei simboli di scrittura (come punto, punto e virgola, ecc.), a ciascun simbolo numerico, e in generale a ciascun tasto di una possibile tastiera, viene assegnato un numero naturale in maniera iniettiva, in una grande tabella.

Una volta codificato un alfabeto, ciascuna successione finita di simboli di quell'alfabeto può essere trafsormata in una successione finita di numeri naturali: precisamente, data una successione finita di simboli, essa viene trasformata nella successione finita di numeri naturali ottenuta rimpiazzando ciascun simbolo della successione finita con il numero naturale che è il suo codice.

Un teorema aritmetico consente di asserire che l'insieme delle successioni finite di numeri naturali può essere codificato, ossia che esiste almeno una funzione che è una codificazione di quell'insieme. Pertanto, possiamo anche asserire che l'insieme delle successioni finite di simboli di un alfabeto può essere sempre codificato: basta codificare l'alfabeto, disporre di una codificazione delle successioni finite di numeri naturali: data una successione finita di simboli dell'alfabeto, si assegnare come codice a tale successione il numero naturale che è assegnato alla successione di numeri naturali che si ottiene rimpiazzando ogni simbolo con il suo codice.

Un esempio di codificazione dell'insieme delle successioni finite di numeri naturali è dato dalla funzione che ad ogni successione finita di numeri naturali $n_1, ..., n_k$ associa il numero che è ottenuto ponendo ciascun numero come esponente del corrispondente numero primo (n_1 come esponente del numero 2, n_2 come esponente del numero 3, ..., n_k come esponente del k-esimo numero primo), calcolando queste potenze di numeri primi e poi eseguendo il loro prodotto, ossia il numero $2^{n_1} \times ... \times q^{n_k}$ dove q è il k-esimo numero primo cominciando con 2. Si vede facilmente che questa funzione è iniettiva e ha un algoritmo (si tratta di eseguire elevamenti a potenza e moltiplicazioni), e che l'inverso di tale funzione esiste ed ha come strategia la scomposizione di un numero in fattori primi e quindi l'individuazione degli esponenti dei numeri primi.

L'insieme delle successioni finite dei simboli di un alfabeto è un insieme molto importante: ogni testo scritto con simboli di un usuale alfabeto linguistico è in sostanza nient'altro che una successione finita di simboli di quell'alfabeto (eventualmente esteso con tutti ciò che corrisponde ai tasti di una tastierea che serva per scrivere quel testo). Dunque, ogni testo linguistico, e tutto ciò che può trsformarsi in un testo linguistico, può essere codifcato in un numero naturale.

Se n è il codice che viene attribuito a una successione finita di simboli di un alfabeto, si chiama *codice binario* di quella successione di simboli la successione finita di bit che serve per rappresentare il numero n.

7.2 Algebra di Boole

7.2.1 Proprietà dei connettivi $\wedge$, $\vee$, $\neg$, e dei valori di verità

Si può verificare che i connettivi $\wedge$ e $\vee$ sono *commutativi* e *associativi*, ossia che vale:

- per ogni valore di A e di B,

$$A \wedge B = B \wedge A$$

  (*commutatività di* $\wedge$) e

$$A \vee B = B \vee A$$

(*commutatività di* $\vee$)

- per ogni valore di A, di B e di C ,

$$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$$

(*associatività di* $\wedge$) e

$$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$$

(*associatività di* $\vee$).

Infatti, considerando tutti i possibili casi dei valori di A e di B, si ha che

- il valore di $A \wedge B$ è lo stesso che il valore di $B \wedge A$ e che il valore di $A \vee B$ è lo stesso che il valore di $B \wedge A$, come è mostrato dalle seguenti tabelle:

A	B	$A \wedge B$	$B \wedge A$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

A	B	$A \vee B$	$B \vee A$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

- il valore di $A \wedge (B \wedge C)$ è lo stesso che il valore di $(A \wedge B) \wedge C$, e il valore di $A \vee (B \vee C)$ è lo stesso che il valore di $(A \vee B) \vee C$, come è mostrato nelle seguenti tabelle:

A	B	C	$B \wedge C$	$A \wedge (B \wedge C)$	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \wedge C$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

A	B	C	$B \vee C$	$A \vee (B \vee C)$	$A \vee B$	$(A \vee B) \vee C$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Inoltre, i due connettivi hanno altre importanti proprietà in riferimento ai valori di verità 1 e 0, e in riferimento al connettivo della negazione $\neg$, proprietà facili da verificare:

- 1 è *l'elemento neutro di* $\wedge$, e 0 è *l'elemento neutro di* $\vee$, ossia per ogni possibile valore di A:

$$A \wedge 1 = A \ , \ A \vee 0 = A$$

- 0 è l'*elemento assorbente* di $\wedge$, e 1 è l'*elemento assorbente* di $\vee$, ossia per ogni possibile valore di A :

$$A \wedge 0 = 0, \ A \vee 1 = 1$$

- *la congiunzione di una proposizione con la sua negazione* è uguale a 0, e *la disgiunzione di una proposizione con la sua negazione* è uguale a 1, ossia per ogni possibile valore di A :

$$A \wedge \neg A = 0, \ A \vee \neg A = 1$$

.

Infine, ci sono due proprietà che legano tra loro i due connettivi $\wedge$ e $\vee$, proprietà la cui verifica è lasciata per esercizio:

- *il connettivo* $\wedge$ *distribuisce sul connettivo* $\vee$ (*distributività di* $\wedge$ *su* $\vee$), ossia per ogni possibile valore di A,B,C :

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

- anche *il connettivo* $\vee$ *distribuisce sul connettivo* $\wedge$ (*distributività di* $\vee$ *su* $\wedge$), ossia per ogni possibile valore di A,B,C :

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

  (si osservi che per la somma e il prodotto non vale $x + (y \times z) = (x + y) \times (x+z)$, e dunque l'analogia "$\wedge$/ prodotto" e "$\vee$/somma" non è completa...).

Risulta che tutte le altre possibili proprietà della negazione classica, della congiunzione classica, della disgiunzione e dei valori di verità 1 e 0 si ottengono da quelle sopra elencate.

7.2.2 Proprietà delle operazioni insiemistiche sulla potenza di un insieme

Consideriamo la potenza $\wp(X)$ di un insieme X, e definiamo su $\wp(X)$ la seguente operazione che viene chiamata *complemento rispetto a* X: per ogni $Y \subseteq X$, $-X = [x/x \in X \wedge x \notin Y]$.

Tutte le proprietà considerate nel paragrafo precedente a proposito delle proposizioni, dei due valori di verità, della negazione classica, della congiunzione classica e della disgiunzione classica valgono su $\wp(X)$, qualora:

- invece delle proposizioni si prendono i sottinsiemi di X,
- invece di 1 si prende l'insieme X, e invece di 0 si prende l'insieme $\emptyset$
- invece della negazione $\neg$ delle proposizioni si prende il complemento $-$ dei sottinsiemi di X rispetto a X,

- invece della congiunzione $\wedge$ tra due proposizioni si prende l'intersezione $\cap$ tra due sottinsiemi di X e invece della disgiunzione $\vee$ tra due proposizioni si prende l'unione $\cup$ tra due sottinsiemi di X.

Infatti, come si può facilmente verificare (spesso usando proprio le corrispondenti proprietà sui valori di verità e sui connettivi), valgono le seguenti proprietà:

1. *Commutatività di $\cap$ e di $\cup$.* Per ogni $Y \in \wp(X)$ e per ogni $Z \in \wp(X)$,

$$Y \cap Z = Z \cap Y$$

$$Y \cup Z = Z \cup Y$$

2. *Associatività di $\cap$ e di $\cup$.* Per ogni $Y \in \wp(X)$, per ogni $W \in \wp(X)$ e per ogni $Z \in \wp(X)$,

$$Y \cap (W \cap Z) = (Y \cap W) \cap Z$$

$$Y \cup (W \cup Z) = (Y \cup W) \cup Z$$

3. *X è l'elemento neutro di $\cap$, $\emptyset$ è l'elemento neutro di $\cup$* . Per ogni $Y \in \wp(X)$,

$$Y \cap X = Y$$

$$Y \cup \emptyset = Y$$

4. *$\emptyset$ è l'elemento assorbente di $\cap$, X è l'elemento assorbente di $\cup$.* Per ogni $Y \in \wp(X)$,

$$Y \cap \emptyset = \emptyset$$

$$Y \cup X = X$$

5. *La congiunzione di un sottoinsieme con il suo complemento rispetto a X è l'insieme vuoto, la disgiunzione di un sottoinsieme con il suo complemento rispetto a X è l'insieme X.* Per ogni $Y \in \wp(X)$,

$$Y \cap -Y = \emptyset$$

$$Y \cup -Y = X$$

6. *L'intersezione distribuisce sulla unione, l'unione distribuisce sulla intersezione.* Per ogni $Y \in \wp(X)$, per ogni $W \in \wp(X)$ e per ogni $Z \in$

$\wp(X)$,

$$Y \cap (W \cup Z) = (Y \cap W) \cup (Y \cap Z)$$

$$Y \cup (W \cap Z) = (Y \cup W) \cap (Y \cup Z)$$

Risulta inoltre che tutte le altre proprietà di queste operazioni sulla potenza $\wp(X)$ si possono ottenere da queste proprietà.

Si possono verificare facilmente, ad esempio, queste proprietà che risultano anche derivabili da quelle sopra elencate:

- $Y \cap Z \subseteq Y$ e $Y \cap Z \subseteq Z$
- $Y \subseteq Z \cup Y$ e $Y \subseteq Z \cap Z$
- Y e Z sono disgiunti sse $Y \cap Z = \emptyset$

7.2.3 Definizione di algebra di Boole

L'insieme delle proposizioni con i due valori di verità 1 e 0, con l'operazione unaria $\neg$ e con le operazioni binarie $\wedge$ e $\vee$ è detta *algebra di Boole* perchè sono valide quelle proprietà considerate sopra: le due operazioni binarie sono commutative e associative, 1 è l'elemento neutro di $\wedge$ e 0 è l'elemento neutro di $\vee$, 0 è l'elemento assorbente per $\wedge$ mentre 1 è l'elemento neutro di $\vee$, l'operazione $\wedge$ applicata a una proposizione e alla sua negazione è 0 mentre l'operazione $\vee$ applicata agli stessi argomenti dà come risultato 1, ciascuna delle due operazioni binarie distribuisce sull'altra.

Anche la potenza $\wp(X)$ di un insieme X, con i due sottinsiemi speciali X e $\emptyset$, con l'operazione unaria di complememnto rispetto a X e con le operazioni binarie $\cap$ e $\cup$ è detta *algebra di Boole* perchè sono valide queste proprietà: le due operazioni binarie sono commutative e associative, X è l'elemento neutro di $\cap$ e $\emptyset$ è l'elemento neutro di $\cup$, $\emptyset$ è l'elemento assorbente per $\cap$ mentre X è l'elemento neutro di $\cup$, l'operazione $\cap$ applicata a un sottinsieme e al suo complemento rispetto a X dà come risultato $\emptyset$ mentre l'operazione $\cup$ applicata agli stessi argomenti dà come risultato X, ciascuna delle due operazioni binarie distribuisce sull'altra.

In generale, è detta *algebra di Boole* qualunque insieme che abbia due elementi speciali che si comportano come 1 e 0 per le proposizioni o come X e $\emptyset$ in $\wp(X)$, una operazione unaria che si comporta come la negazione classica o come il complemento rispetto a un insieme, e due operazioni binarie che si comportano come la congiunzione classica e la disgiunzione classica o come l'intersezione e l'unione:

- le due operazioni binarie sono commutative e associative,
- uno dei due elementi speciali è:
  - l'elemento neutro di una operazione binaria
  - il risultato dell'applicazione di quella stessa operazione a un argomento e al risultato dell'operazione unaria applicata a quello stesso argomento,
  - l'elemento assorbente dell'altra operazione binaria;
- l'altro elemento speciale è
  - l'elemento neutro dell'altra operazione binaria
  - il risultato dell'applicazione di questa operazione a un argomento e al risultato dell'operazione unaria applciata a quello stesso argomento,
  - l'elemento assorbente della prima operazione binaria;
- ciascuna delle due operazioni binarie distribuisce sull'altra.

7.3 Definibilità dei connettivi proposizionali

Abbiamao considerato finora solo i principali connettivi binari e il connettivo unario della negazione classica, e abbiamo visto in 3.1 che, mediante la negazione classica $\neg$, la congiunzione classica $\wedge$e la disgiunzione classica $\vee$, possiamo definire gli altri tre connettivi principali nel modo seguente:

$$A \to B = \neg A \vee B$$

$$A \leftrightarrow B = (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$$

$$A \text{ aut } B = (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)$$

Dalle leggi della negazione, segue che il connettivo $\wedge$ può essere definito a partire dal connettivo $\vee$ e dal connettivo $\neg$, e che il connettivo $\vee$ può essere definito a partire dal connettivo $\wedge$ e dal connettivo $\neg$. Ossia, per ogni possibile valore di A e B (variabili per proposizioni):

$$A \wedge B = \neg(\neg A \vee \neg B)$$

$$A \vee B = \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

Infatti:

- per ogni possibile valore di A e di B, $\neg(\neg A \vee \neg B) = \neg\neg A \wedge \neg\neg B$ per quanto visto sopra, e dunque (poichè $\neg\neg A = A$ e $\neg\neg B = B$) si ha che $\neg(\neg A \vee \neg B) = A \wedge B$;
- per ogni possibile valore di A e di B, $\neg(\neg A \wedge \neg B) = \neg\neg A \vee \neg\neg B$ per quanto visto sopra, e dunque (poichè $\neg\neg A = A$ e $\neg\neg B = B$) si ha che $\neg(\neg A \wedge \neg B) = A \vee B$.

Ora, innazitutto studieremo la classe di tutti i possibili connettivi proposizionali e poi enunceremo il risultato (ottenuto nello studio matematico delle algebre di Boole) che anche tutti i possibili connettivi proposizionali possono essere definiti a partire dalla negazione classica, dalla congiunzione classica e dalla disgiunzione classica.

7.3.1 I possibili connettivi proposizionali

7.3.1.1 Connettivi unari

Se intendiamo per connettivo unario una qualunque operazione che associa ad ogni valore di verità un valore di verità, allora un connettivo unario è definito quando nella seguente tabella dove la prima colonna indica i valori possibili di A

A	
0	...
1	...

riempiamo la seconda colonna con una coppia ordinata di valori di verità, uno come valore della proposizione quando A è 0 e l'altro come valore della proposizione quando A è 1.

Poichè ci sono soltanto 4 coppie ordinate di valori di verità, ossia le coppie

$$0, 0 \quad 0, 1 \quad 1, 0 \quad 1, 1$$

allora ci sono soltanto 4 connettivi unari, uno per ciascuna di queste coppie ordinate di valori di verità. Dunque, i possibili connettivi unari, quando per connettivo unaria si intende una operazione che associa ad ogni valore di verità un valore di verità, sono quelli definiti da ciascuna delle 4 ultime colonne della seguente tabella, dove nella prima riga sono indicati i nomi di tali connettivi

A	0	id	$\neg$	1
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Il connettivo 0 (che possiamo chiamare *costante* 0) è quello che ad ogni valore di verità associa sempre come valore 0, mentre l connettivo 1 (che possiamo chiamare *costante* 1) è quello che ad ogni valore di verità associa sempre come valore 1. Il connettivo id (che possiamo chiamare *identità*) è quello che ad ogni valore di verità associa come valore lo stesso valore di verità. Il terzo connettivo è la negazione classica $\neg$. Dunque: per ogni valore della proposizione A

$$0(A) = 0 \quad id(A) = A \quad 1(A) = 1$$

Si noti che i tre connettivi sono definibili a partire da $\neg, \wedge, \vee$. Infatti per ogni valore della proposizione A

$$0(A) = A \wedge \neg A \quad id(A) = A \quad 1(A) = A \vee \neg A$$

7.3.1.2 Connettivi binari

Se intendiamo per connettivo binario una qualunque operazione che associa ad ogni coppia ordinata di valori di verità un valore di verità, allora un connettivo binario è definito quando nella seguente tabella dove sono indicate le 4 possibili coppie ordinate di valori di verità (ossia i quattro modi in cui possono essere i valori di A e di B)

A	B	...
0	0	...
0	1	...
1	0	...
1	1	...

riempiendo la riga in alto dell'ultima colonna con il nome del connettivo e le altre 4 righe con valori di verità, e dunque ponendo in quella colonna una quadrupla ordinata di valori di verità.

Ci sono 16 quadruple ordinate di valori di verità: una quadrupla ordinata di bit è una coppia ordinata di bit seguita da una coppia ordinata di bit, e dunque ciascuna delle 4 coppie ordinate di bit può essere seguita da ciascuna delle 4 coppie ordinate di bit, cosicchè ci sono $4 \times 4 = 16$ quadruple ordinate di bit.

Dunque, i connettivi binari sono 16, è ciascuno è caratterizzato da una quadrupla ordintata di bit assegnati come valore a ciascuna delle coppie ordinate di bit. Così, la seguente tabella nelle ultime 16 colonne presenta i 16 connettivi binari, ciascuna di quelle colonne indica quale valore quel connettivo il connettivo dà a ciascuna delle 4 coppie ordinate di valori di A e B :

A	B	$\mathbf{c}_0$	$\wedge$	$\neg \rightarrow$	id_1	$\neg \leftarrow$	id_2	aut	$\vee$	$\neg\vee$	$\leftrightarrow$	$\neg id_2$	$\leftarrow$	$\neg id_1$	$\rightarrow$	$\neg\wedge$	$\mathbf{c}_1$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Si noti che le sedici colonne dei 16 connettivi hanno questa caratteristica: la prima colonna e l'ultima, la seconda e la penultima, la terza e la terz'ultima, e cosìvia fino alla ottava e alla nona colonna, sono l'una la negazione dell'altra, nel senso che dove una colona ha 0 l'altra ha 1 e dove una colonna ha 1 l'altra ha 0.

Il primo connettivo è la costante 0 e l'ultimo connettivo è la costante 1: per ogni valore di A e di B

$$\mathbf{c}_0(A, B) = 0 \quad \mathbf{c}_1(A, B) = 1$$

I due connettivi sono definibili a partire da $\neg$,$\wedge$ e $\vee$ nel modo seguente:

$$\mathbf{c}_0(A, B) = A \wedge \neg A \quad \mathbf{c}_1(A, B) = A \vee \neg A$$

Il secondo connettivo è la congiunzione classica $\wedge$, e il penultimo connettivo $NAND$ è la sua negazione classica, ossia il connettivo che per ogni valore di

A, B

$$NAND(A, B) = \neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$$

e dunque tale connettivo è definibile a partire da $\neg$,$\wedge$ e $\vee$.

Il quattordicesimo connettivo è la implicazione classica, mentre il terzo connettivo è la negazione della implicazione classica ossia è il connettivo che per ogni valore di A e di B

$$\neg \rightarrow (A, B) = \neg(A \rightarrow B) = A \wedge \neg B$$

e dunque entrambi i connettivi sono definibili a partire da $\neg$,$\wedge$ e $\vee$.

Il quarto connettivo è il connettivo che ad ogni coppia ordinata di valori di verità dà come valore la prima componente di tale coppia, mentre il tredicesimo connettivo è quello che ad ogni coppia ordinata di valori di verità dà come valore la negazione classica della prima componente di tale coppia; dunque per ogni valore di A e di B

$$id_1(A, B) = A \quad \neg id_1(A, B) = \neg A$$

e dunque tali connettivi sono definibili a partire da $\neg$,$\wedge$ e $\vee$.

Il dodicesimo connettivo è l'inverso della implicazione classica, e il quinto connettivo è la sua negazione classica:

$$A \leftarrow B = B \rightarrow A = \neg B \vee A \quad \neg \leftarrow (A, B) = \neg(A \leftarrow B) = \neg(B \rightarrow A) = B \wedge \neg A$$

e dunque tali connettivi sono definibili a partire da $\neg$,$\wedge$ e $\vee$.

Il sesto connettivo è il connettivo che ad ogni coppia ordinata di valori di verità dà come valore la seconda componente di tale coppia, mentre l'undicesimo connettivo è quello che ad ogni coppia ordinata di valori di verità dà come valore la negazione classica della seconda componente di tale coppia; dunque per ogni valore di A e di B

$$id_2(A, B) = B \quad \neg id_2(A, B) = \neg B$$

e dunque tali connettivi sono definibili a partire da $\neg$,$\wedge$ e $\vee$.

Il settimo connettivo è la alternativa classica e il decimo connettivo è la equivalenza classica, e sappiamo che entrambi i connettivi sono definibili a partire da $\neg$,$\wedge$ e $\vee$.

L'ottavo connettivo è la disgiunzione classica e il nono connettivo è la sua negazione NOR, ossia il connettivo che per ogni valore di A, B

$$NOR(A, B) = \neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$$

e dunque tale connettivo è definibile a partire da $\neg$,$\wedge$ e $\vee$.

7.3.1.3 Connettivi n-ari.

Fissiamo un numero naturale n.

Se intendiamo per connettivo n-ario una qualunque operazione che associa ad ogni n-pla ordinata di valori di verità un valore di verità, allora un connettivo binario è definito da una tabella nella quale ad ogni possibile n-pla ordinata di valori di verità viene associato un valore di verità. - Sopra abbiamo visto il caso $n = 1$, e il caso $n = 2$.

Le possibili n-ple ordinate di valori di verità sono 2^n: ad esempio, $2^1 = 2$ sono le possibili 1-ple ordinate di valori di verità (cioè i possibili valori di verità), $2^2 = 4$ sono le possibili coppie ordinate di valori di verità, $2^3 = 8$ sono le possibili triple ordinate di valori di verità, $2^4 = 16$ sono le possibili quadruple ordinate di valori di verità, ecc.

Dunque la tabella che definisce un connettivo n-ario ha ha 2^n righe (se non contiamo la riga superiore dove indichiamo gli argomenti e il nome del connettivo) e i valori che un connettivo n-ario associa a ciascuna di queste n-ple ordinate formano una 2^n-pla ordinata. - Abbiamo visto sopra che i connettivi unari sono definiti da una tabella a $2^1 = 2$ righe, e che ciascun connettivo unario è caratterizzato da una coppia ordinata di valori di verità, e che i connettivi binari sono definiti da una tabella a $2^2 = 4$ righe e che ciascun connettivo binario è caratterizzato da una quadrupla ordinata di valori di verità, e analogamente i connettivi ternari sono definiti da una tabella a $2^3 = 8$ righe e che ciascun connettivo ternario è caratterizzato da una ottupla ordinata di valori di verità, e cosìvia.

Perciò ci sono tanti connettivi n-ari quante sono le possibili 2^n-ple ordinate di valori di verità: il numero delle possibili 2^n-ple ordinate di valori di verità è

$$2^{(2^n)}$$

e tale numero è il numero dei possibili connettivi n-ari.

Ad esempio:

- come abbiamo visto sopra, il numero delle possibili 2^1-ple ordinate (ossia delle possibili coppie ordinate) di valori di verità è $2^{(2^1)} = 4$, e 4 sono i possibili connettivi unari;
- come abbiamo visto sopra, il numero delle possibili 2^2-ple ordinate (ossia delle possibili quadruple ordinate) di valori di verità è $2^{(2^2)} = 16$, e 16 sono i possibili connettiv binari;
- analogamente, il numero delle possibili 2^3-ple ordinate (ossia delle possibili ottuple ordinate) di valori di verità è $2^{(2^3)} = 2^8$, e tale numero è il numero dei possibili connettivi n-ari.

7.3.2 Definibilità di tutti i possibili connettivi

Abbiamo visto che tutti i connettivi unari e tutti i connettivi binari sono definibili a partire dalla negazione classica $\neg$, dalla congiunzione classica $\wedge$ e dalla disgiunzione classica $\vee$. Ossia, abbiamo visto che

- per ciascun connettivo unario è possibile mostrare quanto segue: per ogni valore di una proposizione A, il valore della proposizione ottenuta da A mediante quel connettivo è uguale al valore di una proposizione nella quale compaiono soltanto $A, \neg, \wedge, \vee$;
- per ciascun connettivo binario è possibile mostrare quanto segue: per ogni valore di una proposizione A e di una proposizione B, il valore della proposizione ottenuta da A e da B mediante quel connettivo è uguale al valore di una proposizione nella quale compaiono soltanto $A, B, \neg, \wedge, \vee$.

Questo risultato si estende *a tutti i connettivi n-ari, per qualunque numero n.* Infatti - con metodi matematici - si dimostra il seguente teorema: *per ogni numero naturale n, tutti i connettivi n-ari sono definibili usando soltanto la negazione classica $\neg$, la congiunzione classica $\wedge$ e la disgiunzione classica $\vee$.* Ossia, siamo certi con questo teorema che, qualunque sia il numero n, e qualunque connettivo n-ario si voglia considerare, il valore della proposizione ottenta dalle proposizioni $A_1, ..., A_n$ mediante quel connettivo è uguale al valore di una proposizione nella quale compaiono soltanto $A_1, ..., A_n, \neg, \wedge, \vee$.

Capitolo 8

Macchina di Turing e calcolabilità

8.1 Le Macchine di Turing

Ricordiamo che una *macchina* è qualunque soggetto che sa *eseguire* una strategia o che *interviene* nella esecuzione di una strategia.

Una *macchina di Turing* è una macchina *logica* e ideale - che può ben essere davvero concretizzata - che sa eseguire da sola - senza interazioni con altri - una sola strategia e più precisamente un solo algoritmo per il calcolo di una funzione sui numeri naturali.

Una macchina di Turing è *logica* in quanto è costituita da ciò che è comune ad ogni ambito conoscitivo, frutto di un'analisi attenta di ciò che è davvero l'attività delle macchine, ivi compresa l'attività dell'uomo quando calcola.

Alla luce di quanto abbiamo visto nel capitolo 7 a proposito della possibilità di codificare mediante numeri naturali qualunque successione finita di simboli di un alfabeto, una macchina di Turing è capace di eseguire - via la codificazione - anche strategie per il calcolo di funzioni *su insiemi diversi* da quello dei numeri naturali.

Invece costituisce una seria limitazione il fatto che una macchina di Turing è una macchina senza alcuna interazione o collaborazione con altri soggetti.

Il fatto che una macchina di Turing sappia eseguire un solo programma, un solo algoritmo, differenzia le macchine di Turing dalle usuali macchine calcolatrici (che possono svolgere vari programmi, anche se uno solo alla volta) nonchè da noi uomini quando calcoliamo (poichè anche noi possiamo eseguire vari programmi).

Attraverso la codificazione, una macchina di Turing si presenta come un concetto matematico, come un particolare tipo di insieme di quintuple ordinate di numeri naturali; e l'attività di una macchina di Turing sempre attraverso la codificazione si presenta come una successione di numeri naturali.

Il concetto di Macchina di Turing ha ispirato John von Neumann a elaborare il modello - chiamato *Macchina di von Neumann* - seguito dal 1945 per la costruzione e il funzionamento di tutte le macchine calcolatrici. Pertanto, ciascuna concreta macchina calcolatrice è una Macchina di von Neumann, ossia è costruita secondo quel modello ispirato dal concetto di Macchina di Turing.

La macchina di Turing non è e non può essere il modello logico-matematico della mente umana poichè la nostra mente sa compiere molto più che i soli calcoli; può essere invece un modello di ciò che avviene nella mente umana quando essa compie calcoli senza interazioni o collaborazioni, ossia quando si comporta *meccanicamente* e *da sola*. Possiamo dire che il concetto di Macchina di Turing costituisce un'analisi accurata di questa parte (non la più importante) dell'attività della mente umana e che questa analisi ha portato alla possibilità di creare effettivamente potenti macchine di calcolo anche e non solo attraverso l'elaborazione del modello di Macchina di von Neummann.

Una macchina di Turing è costituita da:

- lo spazio su cui agisce, chiamato *nastro*, al quale la macchina è collegata con un *puntatore*;
- un insieme finito di *stati* in cui può essere e un insieme finito di *azioni* che sa compiere;
- un insieme finito di *istruzioni*, chiamato *programma*.

Ogni passo dell'attività di una macchina di Turing è chiamato *configurazione* della macchina, e ogni attività di una macchina di Turing è chiamata *computazione* ed è costituita da una successione di sue *configurazioni* di una macchima di Turing.

8.1.1 Il nastro di un macchina di Turing

Il *nastro di una macchina di Turing* è una successione di cose chiamate *caselle*, con queste proprietà:

- è potenzialmente infinita in entrambe le direzioni, ossia non finisce mai né in avanti (verso destra) né indietro (verso sinistra);
- in ciascun istante, ciascuna casella può contenere o non contenere il simbolo | ;
- in ciascun istante, ciascuna casella contiene al massimo una volta il simbolo | ;
- in ciascun istante, il numero di caselle che contengono il simbolo | è un numero finito, e quindi sono infinite le caselle che non contengono il simbolo |.

Una casella di un nastro di una macchina di Turing è detta vuota (o casella 0) se non contiene il simbolo |. Una casella di un nastro di una macchina di Turing è detta piena (o casella 1) se contiene il simbolo |.

Dunque un nastro di una Macchina di Turing, in ciascun istante della attività di calcolo, appare sempre nella seguente forma:

(caselle vuote)... 1 (prima casella piena) ... (caselle vuote o piene) ... 1(ultima casella piena) ... (caselle vuote)

In ciascun istante, una macchina di Turing è *posizionata con un puntatore* su una e una sola casella del suo nastro.

Spiegazione e commento

Per l'attività di calcolo è necessario uno spazio su cui questa attività viene esercitata: dove esso sia è irrilevante. Possiamo pensare - per avere un punto di riferimento - alla lavagna o alla carta su cui scriviamo e su cui altri hanno scritto lettere e numeri, o anche alla lavagna (o carta) simulata nella nostra mente quando calcoliamo mentalmente. Su questo spazio si trovano all'inizio dell'attività i dati da elaborare (gli input), durante l'attività i dati intermedi e al termine dell'attività i dati elaborati (l' output).

Se lo spazio appartiene davvero a chi calcola, esso è limitato essendo limitato colui che calcola. Ma se lo spazio è esterno a chi calcola ossia a chi ha un programma per calcolare, la mancanza di spazio o l'esaurimento di esso non può essere un motivo sufficiente per decretare che quel soggetto o quel programma non è in grado di calcolare: basta aggiungere un altro pò di spazio, così come noi aggiunguamo memoria a un calcolatore o a un telefonino quando vediamo che il suo *spazio* sta per esaurirsi o si è esaurito, o aggiungiamo altra carta quando la carta che avevamo non ci basta più, o ricorriamo ad una lavagna aggiuntiva quando la nostra lavagna non ci basta più. Non si può dichiarare impossibile una attività di calcolo per la sola mancanza di spazio, solo perchè manca la carta o manca un'altra lavagna.

Dunque, lo spazio deve essere estensibile, non deve avere un limite prefissato e invalicabile, ossia deve essere *potenzialmente illimitato*. E deve essere potenzialmente illitato in due direzioni: a sinista e a destra, oppure in alto o in basso. Invece, non è necessario che lo spazio sia potenzialmente illimitato in tutte e quattro le direzioni: a sinistra, a destra, in alto, in basso.

In questo senso, lo spazio su cui si lavora si configura come un nastro (di larghezza fissata), illimitato a sinistra e a destra: è il *nastro di una macchina di Turing*, un nastro che è comune a tutte le macchine di Turing.

In ciascun momento dell'attivitò di calcolo, la macchina (o chi svolge l'attività) riesce a dominare una parte finita, piccola, dello spazio e solo su essa riesce ad operare: una *casella* dello spazio, la cui dimensione dipende dalla macchina stessa (macchine più potenti possono controllare porzioni più grandi dello spazio, rispetto a macchine più semplici) o da chi svolge l'attività (ciascun uomo sa controllare in ciascun momento una parte soltanto di una lavagna). Pertanto, è opportuno dividere lo spazio in tante caselle, tutte con la stessa dimensione, la minima dimensione necessaria per lo svogimento dell'attività di calcolo da parte di una macchina. Così, il nastro di una macchina di Turing appare come una *successione di caselle*, tutte della stessa dimensione, illimitato a sinistra e a destra.

Il nastro di una macchina di Turing può comparire in maniera differente nei vari momenti dell'attività di calcolo, così come una lavagna appare in maniera differente nei vari momenti di un calcolo o di una lezione.

In ciascun momento di una attività di calcolo, ciascuna casella del nastro (la parte dello spazio dominabile dalla macchina e sulla quale può operare) può essere *vuota* (casella 0) o *piena* (casella 1); ossia ciascuna casella può essere considerata come un bit, come qualcosa che può avere il valore 0 - casella vuota, casella 0 - oppure il valore 1 - casella piena, casella 1 -.

Quando in un momento di una attività di calcolo una casella è piena, essa contiene cose dette *simboli*, e ciò corrisponde - nelle attiviotà di calcolo svolte da un uomo su una lavagna - al fatto che ciascuna porzione di spazio della lavagna può essere vuota di simboli o piena di simboli. Si noti bene che la parola *simboli* non deve essere fraintesa. I cosiddetti *simboli* sono cose che possono ricevere significato dall'esterno, da parte di chi osserva, ma questo significato non deve assolutamente avere rilevanza nell'attività di calcolo da parte della macchina o dell'uomo che calcola: il calcolo non esige che chi calcola conosca il significato di ciò che è scritto. Analogamente, dall'esterno possiamo attribuire significato alle combinazioni di simboli sul nastro, ma anche tale significato non deve avere alcuna rilevanza nell'attività di calcolo da parte della macchina.

Se in un momento di una attività di calcolo una casella è piena, essa deve necessariamente contenere soltanto un numero finito di simboli: i simboli presenti in una casella sono quelli dominabili da chi esegue l'attività di calcolo, e chi esegue tale attività non può dominare infinite cose bensì soltanto un numero finito di cose. Il numero finito di simboli che può essere contenuto in una casella dipende ovviamente dalla dimensione della casella: ma avendo in mente di considerare come macchina di Turing una macchina che abbia il minimo indispensabile per poter calcolare, e avendo detto che la dimensione di ciascuna casella deve essere minima, le caselle piene del nastro di una macchina di Turing *contengono soltanto un simbolo.* Infatti, per svolgere l'attività di calcolo non si ha bisogno di dominare un numero grande di cose, ma basta saper dominare una sola cosa alla volta

I simboli che - in ciascun momento dell'attività di calcolo, e uno solo per casella - possono comparire in un nastro fatto di caselle atte a contenere al massimo un simbolo potrebbero essere tanti o pochi, ossia potrebbero appartenere a *alfabeti* più o meno grandi. Anche in questo caso noi, per fissare quanti sono i possibili simboli che possono comparire nelle caselle piene di una macchina di Turingnei vari momenti dell'attività, dobbiamo individuare il numero minimo di simboli necessari per lo svogimento dell'attività di calcolo. Questo numero minimo è 1: basta infatti solo un simbolo per scrivere qualsiasi numero naturale (indicando il numero zero con quel simbolo, il numero uno con la successione fatta da due occorrenze di quel simbolo, ..., il numero n con la successione fatta da $n+1$ occorrenze di quel simbolo. Così, in ciascuna casella piena di un nastro di una macchina di Turing può comparire solo una occorrenza di un solo simbolo che per convenzione indichiamo con $|$.

In ciascun momento dell'attività di calcolo, sul nastro di una macchina di Turing il numero delle caselle piene (caselle 1) deve essere sempre un numero finito: infatti, se il numero delle caselle piene fosse infinito, vorrebbe dire che devono essere elaborati o prodotti infiniti dati, e ciò contraddice con il carattere finito dell'attività di calcolo. Lo spazio su cui si opera è potenzialmente infinito, ma ciò che è scritto su questo spazio è qualcosa di finito. Poiché il numero delle caselle piene (caselle 1) è finito, e il numero delle caselle è infinito, si ricava subito che il numero delle caselle vuote di un nastro di una Macchina di Turing è sempre infinito (togliendo una quantità finita da un insieme infinito, si ottiene ancora un insieme infinito). Inoltre, poiché il numero delle caselle piene (caselle 1) è finito mentre quello delle caselle vuote (caselle 0) è infinito, c'è sempre sul nastro (da sinistra verso destra) la prima casella piena (davanti alla quale tutte le caselle sono vuote) e l'ultima casella piena (dopo la quale tutte le caselle sono vuote). Fra la prima casella piena e l'ultima casella piena c'è un numero finito di caselle che possono essere piene o vuote.

In ciascun momento dell'attività di calcolo la macchina di Turing è posizionata su una e una sola casella, e viene chiamato *puntatore* della macchina di Turing lo strumento che serve a collegare in ciascun momento la macchina di Turing ad una sola casella del suo nastro. In modo analogo, nel corso dell'attività di calcolo un uomo lavora (è posizionato) su una parte di questo spazio, nel corso dell'attività si muove su questo spazio ed è su questo spazio che l'uomo esegue le operazioni prescritte dal programma che sta svolgendo.

8.1.2 Rappresentazione dei numeri naturali sul nastro di una macchina di Turing

Sul nastro di una macchina di Turing possono essere rappresentati i numeri naturali, e dunque - via la codificazione - ogni successione finita di numeri naturali e ogni testo finito.

Possiamo convenire di dare questo significato alle combinazioni di caselle sul nastro della Macchina di Turing:

- una casella piena (1), preceduta e seguita da una casella vuota (0), rappresenti il numero naturale zero;
- due caselle consecutive piene (1), precedute e seguite da una casella vuota (0), rappresenti il numero naturale uno;
- $n+1$ caselle consecutive piene (1), precedute e seguite da una casella vuota (0), rappresenti il numero naturale n.

In questa maniera possiamo rappresentare sul nastro di una macchina di Turing qualunque numero naturale. Ad esempio, se il nastro di una Macchina di Turing si presenta nella forma

...(caselle vuote)...0111111110 ...(caselle vuote)...

su esso è rappresentato il numero naturale sette.

Conveniamo di indicare $n+1$ caselle consecutive piene con $[n]$. Se il nastro di una Macchina di Turing si presenta nella forma

...(caselle vuote)... 0 $[n]$ 0...(caselle vuote)...

su esso è rappresentato il numero naturale n.

Possiamo anche rappresentare sul nastro di una macchina di Turing qualunque coppia ordinata di numeri naturali, qualunque tripla ordinata di numeri naturali, ecc., qualunque n-pla ordinata di numeri naturali, in questa maniera:

- Se il nastro di una Macchina di Turing si presenta nella forma

  ...(caselle vuote)..0$[n_1]$0$[n_2]$ ...(caselle vuote)...

  su esso è rappresentata la coppia ordinata $\langle n_1, n_2\rangle$;

- se il nastro di Macchina di Turing si presenta nella forma

  ...(caselle vuote)...0$[n_1]$0$[n_2]$0$[n_3]$0...(caselle vuote)...

  su esso è rappresentata la tripla ordinata $\langle n_1, n_2, n_3\rangle$; ecc.

- In generale, se il nastro di una macchina di Turing si presenta nella forma

  ...(caselle vuote)..0$[n_1]$0$[n_2]$0...0$[n_k]$0 ...(caselle vuote)...

  (ossia sono rappresentati da sinistra verso destra i numeri $n_1, ..., n_k$, separati l'uno dall'altro da una casella vuota) su esso è rappresentata la k-pla ordinata $\langle n_1, n_2, ..., n_k\rangle$.

Ad esempio, se il nastro di una macchina di Turing si presenta nella forma

...(caselle vuote)... 0111101110111111110 ...(caselle vuote)...

su esso sono rappresentati nell'ordine (da sinistra verso destra) i numeri naturali 3, 2, 7 ossia è rappresentata la tripla ordinata $\langle 3, 2, 7\rangle$

8.1.3 Gli stati e le azioni di una macchina di Turing

L'insieme degli stati di una macchina di Turing è un insieme finito che contiene almeno i seguenti due elementi: s_0 (***stato iniziale***) e s_1 (***stato finale***).

Una macchina di Turing sa compiere le seguenti azioni:

- Riconoscere lo stato in cui essa è (riconoscimento dello stato), ossia riconoscere di essere nello stato s (per ogni stato s della macchina);
- Passare a uno stato (cambiamento di stato), ossia passare allo stato s (per ogni stato s della machhina);
- Muoversi sul nastro (movimenti), ossia :
  - Posizionarsi sulla prima casella a destra rispetto a quella su cui è posizionata (movimento a destra, movimento R);
  - Posizionarsi sulla prima casella a sinistra rispetto a quella su cui è posizionata (movimento a sinistra, movimento L);
- Riconoscere il contenuto della casella su cui è posizionata (lettura), ossia:
  - Riconoscere che la casella su cui è posizionata è vuota (leggere 0),
  - Riconoscere che la casella su cui è posizionata è piena (leggere 1);
- Operare sul contenuto della casella su cui è posizionata (scrittura), ossia:
  - Rendere vuota la casella su cui è posizionata (scrivere 0), cioè cancellare $|$ se la casella è 1 e lasciarla immutata se la casella è 0,
  - Rendere piena la casella su cui è posizionata (scrivere 1), cioè scrivere $|$ se la casella è 0 e lasciarla immutata se la casella è 1.

Spiegazione e commento

Una macchina di Turing, in ciascun momento dell'attività di calcolo, è in uno *stato*. Lo stato in cui si trova la macchina determina parzialmente le operazioni che essa deve compiere durante la computazione. L'insieme dei possibili stati in cui una Macchina di Turing dipende dalla macchina stessa, ossia dal programma che deve eseguire; dunque, per ciascuna macchina di Turing c'è l'insieme dei suoi possibili stati, e tale insieme è uno che distigue una machina da un'altra. L'insieme dei possibili stati di una Macchina di Turing deve essere comunque un *insieme finito* e deve contenere almeno due stati:

- lo *stato iniziale (o di partenza)*, indicato con s_0, che è lo stato in cui la macchina di Turing si trova all'inizio di attività, e può essere anche lo stato in cui si trova in momenti intermedi di tali attività
- lo *stato finale (o di fermata)*, indicato con s_1, che è lo stato nel quale la macchina di Turing termina la sua attività, si arresta.

Una macchina di Turing sa compiere delle azioni, e l'insieme delle possibili azioni che sa compiere deve essere un insieme finito e comune a tutte le macchine di Turing: si tratta delle azioni indispensabili perchè si abbia un'attività di calcolo. Le azioni che appartengono a queste insieme sono quelle che la Macchina potrebbe essere chiamata a svolgere durante una attività di calcolo.

Analogamente, ciascun uomo - in quanto capace di un'attività di calcolo - sa svolgere un numero finito di azioni, quelle che potrebbe compiere durante l'esecuzione di un programma.

L'insieme delle azioni che una Macchina di Turing deve saper compiere è un insieme davvero piccolo, ed è significativo che esse siano sufficienti per poter compiere qualunque attività di calcolo.

Due azioni riguardano lo stato della Macchina di Turing: ciascuna macchina deve saper riconoscere lo stato in cui si trova e deve saper passare da uno stato ad un altro. In una attività di calcolo una Macchina di Turing potrebbe essere chiamata a svolgere qualcosa in dipendenza dello stato in cui essa si trova , e dunque è necessario che la Macchina sappia riconoscere da se stessa in che stato si trova. Inoltre, è necessario che la Macchina sappia passare da uno stato ad un altro, poiché almeno deve poter passare allo stato finale, lo stato nel quale deve terminare l'attività di calcolo e che non può essere uno stato ammissibile durante lo svolgimento dell'attività. L'azione di riconoscimento del proprio stato si specifica in tante maniere quanti sono gli stati della macchina (ossia riconoscere di essere nello stato iniziale, riconoscere di essere nello stato finale, riconoscere di essere in ciascuno degli altri stati). Analogamente, l'azione di passare ad uno stato si specifica in tante maniere quanti sono gli stati della macchina (ossia, passare allo stato iniziale, passare allo stato finale, passare a ciascuno degli altri stati).

Un'altra azione riguarda il posizionamento della Macchina sul nastro. Abbiamo detto che la macchina è posizionata, in ciascun momento, su una casella del nastro e soltanto su essa può operare in quel momento. Ma sarebbero impossibili tante attività di calcolo, forse tutte, se la Macchina non fosse capace di spostarsi, di passare ad altre caselle: vorrebbe dire che potrebbe agire sempre su quella piccola parte di spazio che essa sa dominare, parte che per di più in una Macchina di Turing è talmente piccola da poter contenere soltanto un simbolo. Dunque la Macchina deve saper muoversi da una casella ad un'altra. E deve saper muoversi - come l'uomo rispetto ad una lavagna - verso destra o verso sinistra. Nel caso della Macchina di Turing, essa è capace di effettuare - a destra così come a sinistra - il minimo movimento possibile, ossia spostarsi di una sola casella. Ciò vuol dire che per l'attività di calcolo è sufficiente sapersi spostare da una casella ad un'altra, a destra e a sinistra, con un passo minimo (di lunghezza 1) e non è necessario sapersi spostare con un passo maggiore (di lunghezza maggiore di 1). Così, questa azione di spostamento si specifica in due maniere possibili: muoversi di un passo a sinistra (alla casella precedente nel nastro), muoversi di un passo verso destra (alla casella successiva nel nastro). Ossia il movimento della macchina di Turing è una sorta di bit: può avere duie valori, a destra o a sinistra.

Un'altra azione riguarda la lettura di ciò che compare nella casella su cui la Macchina di Turing è posizionata: la macchina deve saper riconoscere come è fatta la casella, ossia deve saper leggere 0 (ossia riconoscere che la casella è vuota) e deve saper leggere 1 (ossia riconoscere che la casella è piena). Anche l'uomo che svolge una attività di calcolo su una lavagna deve saper riconoscere ciò che compare nella porzione di lavagna che egli domina, ossia deve saper riconoscere se quella porzione è vuota o no, e quando non è vuota deve saper riconoscere i simboli dell'alfabeto che vi compaiono: e questa attività di riconoscimento è giustamente chiamata lettura. Dunque, anche l'azione di lettura della casella su cui una macchina di Turing è posizionata è una sorta di bit: può avere ciascuna volta due valori, può essere infatti *leggere* 0 e *leggere* 1.

L'ultima azione riguarda il contenuto della casella su cui la Macchina di Turing è posizionata, ossia come si rende quella casella: si tratta dell'azione di *scrittura*, ossia dell'azione che rende la casella in uno dei due modi in cui essa può essere, vuota o piena. L'azione che rende la casella vuota è detta *scrivere* 0, mentre l'azione che rende la casella piena è detta *scrivere* 1. L'azione che rende la casella vuota consiste nel non far niente se la casella è già vuota, e nel cancellare il simbolo | se la casella lo contiene. L'operazione che rende la casella piena consiste nel non far niente se la casella è già piena, e nello scrivere davvero il simbolo | se la casella è vuota. Si usa chiamare genericamente *scrittura* questa azione, anche se in realtà si tratta di scrittura o di cancellazione o di non far niente sulla casella. In modo analogo, anche l'uomo che svolge un'attività di calcolo su una lavagna deve essere in grado, entro la porzione di lavagna che egli sa dominare, di cancellare qualche simbolo, di scrivere qualunque simbolo dell'alfabeto, o di lasciare la casella immutata: e queste attività sulla porzione di spazio della lavagna possono ben essere chiamate attività di scrittura/cancellazione.

8.1.4 Le istruzioni e il programma di una macchina di Turing

Una istruzione per una Macchina di Turing è un asserzione della forma seguente:

se sei nello stato q e leggi x, allora scrivi y, fai il movimento m e passa allo stato r

dove q è uno degli stati di quella Macchina di Turing ed è diverso dallo stato finale, r è uno degli stati di quella Macchina di Turing, x è 0 oppure 1, y è 0 oppure 1, m è R oppure L.

In una istruzione per una macchina di Turing

se sei nello stato q e leggi x, allora scrivi y, fai il movimento m e passa allo stato r

la parte tra "se" e "allora" è detta *condizione dell'istruzione*, e la parte che segue "allora" è detta *conclusione dell'istruzione*.

Una istruzione per una macchina di Turing

se sei nello stato q e leggi x, allora scrivi y, fai il movimento m e passa allo stato r

può essere anche scritta nella forma

$$q, x \Longleftrightarrow y, m, r$$

o anche come una quintupla ordinata

$$\langle q, x, y, m, r \rangle$$

Ciascuna macchina di Turing ha soltanto un programma.

Il programma di una Macchina di Turing è un insieme finito di istruzioni per quella macchina di Turing, nel quale:

- c'è almeno una istruzione che inizia con lo stato di partenza s_0,
- c'è almeno una istruzione che termina con lo stato finale.

Spiegazione e commento

Durante l'attività di calcolo una Macchina di Turing (così come l'uomo) esegue le operazioni che sa compiere soltanto se e soltanto quando esse sono prescritte; e una prescrizione di eseguire una o più operazioni è detta una *istruzione*.

La forma delle singole istruzioni può essere piuttosto arbitraria. Quel che conta è soltanto che nelle istruzioni si faccia riferimento soltanto a azioni che la macchina (l'uomo) sa compiere, e che ciascuna istruzione sia un'asserzione finita.

Nel caso di una Macchina di Turing le istruzioni devono avere la forma di un'asserzione condizionale. Ciascuna istruzione dice cosa deve fare la Macchina quando essa si trova in un certo stato e ha letto la casella sulla quale è posizionata, e le operazioni che prescrive di fare sono: scrivere qualcosa sulla casella, spostarsi sulla casella successiva a destra o sulla casella precedente a sinistra, passare a un certo stato (cambiare stato o restare nello stesso stato).

Le istruzioni per una attività di calcolo devono appartenere a un insieme finito di istruzioni che è detto programma. Un programma può servire per compiere più attività di calcolo, tutte con lo stesso programma.

Mentre ciascuno di noi e ciascuna concreta macchina calcolatrice può avere più programmi, con ciascuno dei quali si svolge una classe di attività di calcolo, una Macchina di Turing ha soltanto un programma, ossia sa svolgere soltanto una classe di attività di calcolo.

8.1.5 Uguaglianza di macchine di Turing

Il programma di una Macchina di Turing identifica una Macchina di Turing.

Infatti,le uniche cose che possono differire da una Macchina di Turing ad un'altra sono:

- l'insieme degli stati,
- l'insieme delle istruzioni, ossia il programma.

Dato il programma di una Macchina di Turing, si può sempre ricavare immediatamente quale è l'insieme degli stati di quella macchina di Turing: è l'insieme degli stati che compaiono nelle istruzioni che appartengono a quel programma. Infatti, se uno stato compare in un'istruzione che appartiene al programma di una Macchina di Turing, allora l'istruzione deve essere una istruzione per quella Macchina, e dunque quello stato deve appartenere all'insieme degli stati di quella Macchina; e ogni stato di quella Macchina deve comparire in almeno una istruzione che appartiene al programma di quella Macchina.

Dunque, possiamo identificare una Macchina di Turing con il suo programma. Ossia, possiamo dire che:

- ciascuna macchina di Turing è il suo programma (è univocamente determinata dal suo programma),
- due macchine di Turing che hanno lo stesso programma sono uguali.

8.1.6 Le configurazioni e le computazioni di una macchina di Turing

Una configurazione di una Macchina di Turing è costituita da:

- il nastro (con un numero finito di caselle piene e infinite caselle vuote),
- il posizionamento della Macchina di Turing su una casella del nastro ,
- uno stato della Macchina di Turing.

Una configurazione C di una Macchina di Turing è ricavata immediatamente da una configurazione C' della stessa Macchina quando C si ottiene da C' mediante una istruzione della Macchina di Turing, ossia:

- il nastro in C è quello ottenuto dal nastro in C' in base a quella istruzione,
- il posizionamento in C è ottenuto da quello in C' in base a quella istruzione,
- lo stato in C è ottenuto da quello in C' in base a quella istruzione.

Una configurazione di una Macchina di Turing è *iniziale* se e soltanto se in essa

- sul nastro è rappresentato un numero naturale o una successione finita di numeri naturali,
- il posizionamento della Macchina è sulla prima casella 1 (da sinistra a destra) del nastro,
- lo stato della Macchina è lo stato iniziale s_0.

Una configurazione di una Macchina di Turing è emph finale se e soltanto se in essa lo stato della Macchina è lo stato finale s_1.

Una *computazione di una Macchina di Turing* è una successione di configurazioni, nella quale

- la prima configurazione è una configurazione iniziale,

- ciascuna configurazione (eccetto la prima) è ricavata immediatamente da quella precedente eseguendo una istruzione di quella Macchina di Turing,
- ciascuna configurazione che non sia finale è seguita da una configurazione che si ricava immediatamente da essa.

Una computazione di una Macchina di Turing è *finita* se e soltanto se contiene una configurazione finale. (Infatti: se una computazione di una Macchina di Turing contiene una configurazione finale, a con esllora essa termina poiché nessuna istruzione della Macchina di Turing ha nella sua condizione lo stato finale; viceversa, se una computazione è finita, forzatamente l'ultima sua configurazione deve essere una configurazione finale poiché altrimenti ad essa dovrebbe seguire un'altra configurazione ricavata mediante immediatamente da quella.)

Spiegazione e commento

Quando un uomo inizia un'attività di calcolo su una lavagna, in base a un programma:

- la lavagna contiene certi dati (e ciò corrisponde al nastro di una macchina di Turing sul quale sono rappresentati dei numeri),
- l'uomo è posizionato su una parte della lavagna che contiene la prima parte dei dati presenti sulla lavagna,
- l'uomo è nello stato iniziale della attività di calcolo.

La *configurazione iniziale* di una macchina di Turing è ciò che corrisponde all'inizio di un'attività di calcolo da parte di un uomo,

Successivamente, in ogni momento dell'attività di calcolo, l'uomo procede - in base ad una istruzione :

- a modificare (o a lasciare inalterato) ciò che compare sulla lavagna,
- " a posizionarsi eventualmente su un'altra parte della lavagna,
- a modificare eventualmente il suo stato.

Il *passaggio da una configurazione di una Macchina di Turing ad una ottenuta immediatamente da essa* corrisponde al passaggio da un momento all'altro nell'attività di calcolo, passaggio scandito da una istruzione.

L'attività di calcolo prosegue, scandita dalle istruzioni, in questa maniera fino a che non l'uomo non raggiunge lo stato finale: e in tale stato si ha ciò che corrisponde a una *configurazione finale* di una Macchina di Turing.

8.1.7 La macchina di Turing come concetto matematico

Sulla base di quanto abbiamo visto nei paragrafi precedenti, una Macchina di Turing può essere definita nel modo seguente.

M è una *macchina di Turing* se e soltanto se M è un insieme finito di quintuple ordinate $\langle q, x, y, m, r\rangle$ chiamate *istruzioni* con queste caratteristiche:

- in ciascuna quintupla ordinata $\langle q, x, y, m, r\rangle \in M$, $x \in \{0, 1\}$, $y \in \{0, 1\}$, $m \in \{L, R\}$, $q \neq s_1$,
- esiste almeno una quintupla ordinata $\langle s_0, x, y, m, r\rangle \in M$ ($_0$ è detto *stato iniziale*),
- esiste almeno una quintupla ordinata $\langle q, x, y, m, s_1\rangle \in M$ (s_1 è detto *stato finale*).

Data una Macchina di Turing M, l'insieme $Q(M)$ (l'insieme degli stati di M) è l'insieme che ha come suoi elementi le prime e le ultime componenti delle quintuple che appartengono a M. Si vede facilmente che se M è una macchina di Turing, allora $Q(M)$ è un insieme finito e $\{s_0, s_1\} \subseteq Q(M)$.

Un nastro è una funzione F che associa ad ogni numero intero i (le caselle del nastro) un valore $F(i) \in \{0, 1\}$ (i è una casella piena quando $F(i) = 1$ e i è una casella vuota quando $F(i) = 0$) e che soddisfa la seguente condizione: l'insieme dei numeri interi i tali che $F(i) = 1$ è un insieme finito.

Una configurazione di una macchina di Turing M è una quadrupla $\langle M, F, i, q\rangle$ dove F è un nastro, i è u numero intero (il posizionamento di M) e $q \in Q(M)$.

Una configurazione $\langle M, F, i, q\rangle$ di una macchina di Turing M è *iniziale* se e soltanto se q è lo stato inziale s_0, $F(i) = 1$ e per ogni $j < i$ $F(j) = 0$ (ossia la casella i è la prima casella piena da sinistra a destra).

Una configurazione $\langle M, F, i, q\rangle$ di una macchina di Turing M è *finale* se e soltanto se q è lo stato finale s_1.

Se $\langle M, F, i, q\rangle$ è una configurazione di una macchina di Turing M, e $F(i) = x$ e $\langle q, x, y, m, r\rangle \in M$, allora la configurazione che si ottiene da $\langle M, F, i, q\rangle$ mediante l'istruzione $\langle q, x, y, m, r\rangle \in M$ è $\langle M, F', j, r\rangle$ dove:

- j è $i + 1$ se m è R, ed è $i - 1$ se m è L,
- F' coincide con F, con la sola eccezione che $F(i) = y$.

Una computazione di una Macchina di Turing M è una successione di configurazioni di M tale che:

- comincia con una configurazione iniziale,
- ogni configurazione che non sia finale è seguita da una configurazione che si ottiene da essa mediante un elemento di M.

Una computazione di una Macchina di Turing è finita sse termina con una configurazione finale.

8.1.8 Macchina di Turing per una funzione numerica

Una funzione numerica è una funzione sull'insieme dei numeri naturali. Ossia: una funzione nuemrica unaria è una funzione unaria dall'insieme dei numeri naturali allo stesso insieme, una funzione nuemrica binaria è una funzione binaria dall'insieme dei numeri naturali allo stesso insieme, ..., una funzione nuemrica k-aria è una funzione k-aria dall'insieme dei numeri naturali allo stesso insieme.

Le funzioni numeriche sono sì un caso particolare di funzioni, ma si tenga presente che qualunque funzione su un altro insieme di cose codificabili mediante numeri naturali si trasforma - codificando quelle cose - in una funzione numerica. Quindi, la classe delle funzioni numeriche è una classe di funzioni che comprende - tramite la codificazione - tutte le funzioni su qualunque insieme di cose codifcabili.

Le macchine di Turing permetono di calcolare funzioni numeriche, anzi ciascuna macchina di Turing può calcolare una (e una sola) funzione numerica.

Dobbiamo, a questo fine, definire cosa quando una macchina di Turing è una macchina per calcolare una funzione numerica, o brevemente una macchina per una funzione numerica.

Una Macchina di Turing M è una *macchina per una funzione numerica f unaria* quando per ogni numero naturale n la computazione della Macchina M che inizia con la configurazione inziale costituita dal nastro su cui è rappresentato il numero n ha questa caratteristica:

- se $f(n)$ è definita, allora la computazione termina in un numero finito di passi con la configurazione finale in cui sul nastro è rappresentato il numero $f(n)$
- se $f(n)$ non è definito, allora la computazione non termina mai, è infinita.

In generale, una Macchina di Turing M è una macchina per una funzione numerica f k-aria quando per ogni k-pla ordinata di numeri naturali $\langle n_1, ..., n_k \rangle$

la computazione della Macchina M che inizia con la configurazione inziale costituita dal nastro su cui è rappresentato la k-pla ordinata $\langle n_1, ..., n_k \rangle$ ha questa caratteristica:

- se $f(n_1, ..., n_k)$ è definita, allora la computazione termina in un numero finito di passi con la configurazione finale in cui sul nastro è rappresentato il numero $f(n_1, ..., n_k)$
- se $f(n_1, ..., n_k)$ non è definito, allora la computazione non termina mai, è infinita.

In breve, una Macchina di Turing per una funzione numerica f, quando riceve sul nastro l'argomento o gli argomenti per quella funzione e c'è il valore di f per tale argomento o per tali argomenti, è capace di trovare tale valore con una sua computazione scrivendolo sul proprio nastro alla sua configurazione finale.

Un esempio di Macchina di Turing: la macchina di Turing per la funzione di passaggio al successore

Ricordiamo che per definire una particolare Macchina di Turing, è sufficiente fissare il suo programma. Consideriamo dunque la macchina di Turing il cui programma contiene esclusivamente queste istruzioni:

$$\langle s_0, 1, 1, R, s_0 \rangle$$

$$\langle s_0, 0, 1, R, s_2 \rangle$$

$$\langle s_2, 1, 1, R, s_2 \rangle$$

$$\langle s_2, 0, 0, L, s_1 \rangle$$

Si può verificare che questo insieme di istruzioni soddisfa alle condizioni stabilite per essere un programma di una Macchina di Turing, e che l'insieme degli stati di questa particolare Macchina di Turing è l'insieme i cui elementi sono: s_0, s_1, s_2.

Supponiamo di avere questa Macchina di Turing nella seguente configurazione iniziale:

- Nastro: (caselle vuote),$0, 1, 1, 1, 0$,(caselle vuote) (Ossia sul nastro è rappresentato il numero 2.)
- Posizionamento: sulla prima casella piena da sinistra verso destra.

- Stato: s_0

Per esercizio, si mostri la computazione di questa Macchina di Turing che comincia con questa configurazione; si arriverà a stabilire che la computazione termina con questa configurazione finale:

- Nastro: (caselle vuote),$0, 1, 1, 1, 1, 0$,(caselle vuote) (Ossia sul nastro è rappresentato il numero 3.)
- Posizionamento: sulla prima casella vuota dopo l'ultima casella piena da sinistra verso destra.
- Stato: s_1

Si può anche mostrare che, con questa Macchina di Turing, qualunque computazione che comincia con una configurazione iniziale dove sul nastro è rappresentato un numero naturale n termina con una configurazione finale dove sul nastro è rappresentato il successore n+1 di n. Questa Macchina di Turing è dunque chiamata Macchina di Turing per l'operazione di successore.

8.1.9 La macchina di Turing codificata

Ciascuna macchina di Turing M può essere codificata (essendo una successione finita di quintuple di oggetti) mediante un numero naturale che è detto *codice di* M.

Pertanto, ciascuna macchina di Turing può essere non solo un*programma* per un calcolo, ma anche - una volta codificata - un *oggetto* sul quale si può operare mediante un programma.

Analogamente, anche le configurazioni di una macchina di Turing possono essere codificate mediante numeri naturali: infatti esse sono quadruple costituite da una macchina di Turing (che come abbiamo detto è codificabile mediante un numero naturale), un nastro (che è univocamente determinato dalla successione finite delle caselle piene da sinistra verso destra, e dunque come ogni successione finita è codificabile mediante un numero naturale), un numero intero e uno stato, ossia - una volta codificati gli elementi - sono quadruple ordinate di numeri naturali, e dunque sono codificabili mediante mìnumeri naturali.

Pertanto anche una *computazione finita* di una Macchina di Turing - essendo una successione finita di configurazioni che sono codificabili mediante numeri naturali - è essa stessa codificabile mediante un numero naturale: e dunque anche le computazioni divengono *oggetti* sui quali si può operare mediante programmi.

8.2 La calcolabilità

8.2.1 Le funzioni calcolabili e la tesi di Church

Una funzione numerica è chiamata *calcolabile* quando esiste un algoritmo o una macchina per essa. Ossia, una funzione numerica k-aria è detta *calcolabile* quando esiste un algoritmo o una macchina che, ricevuto come input una k-pla di nuneri naturali, produce in un numero finito di passi concreti ed elementari il valore di quella funzione per quella k-pla ordinata di numeri se tale valore esiste.

Fra le funzioni numeriche calcolabili ci sono sicuramente quelle che sono calcolabili mediante una *macchina di Turing*, le funzioni che chiameremo *Turing-calcolabili* e che sono talvolta chiamate anche *funzioni ricorsive.*

Una funzione numerica k-aria f è detta *Turing-calcolabile* se e soltanto se esiste una macchina di Turing per f (come l'abbiamo definita nella sezione precedente).

Si noti che nella definizione di *calcolable* o in quella di *Turing-calcolabile* l'asserzione *esiste un algoritmo (o una macchina)* non va intesa come *è presente, è noto un algoritmo o una macchina* ma nel senso di *è compatibile, è possibile l'esistenza di un algorimo, di una macchina.* Pertanto:

- una funzione numerica sarà chiamata *non calcolabile* quando è impossibile l'esistenza di un algoritmo o di una macchina che la calcola, ossia quando nessun algoritmo possibile o nessuna macchina possibile è un algoritmo o macchina che calcola quella funzione;

- una funzione numerica sarà chiamata *non Turing-calcolabile* quando è impossibile l'esistenza di una Macchina di Turing per quella funzione, ossia quando nessuna Macchina di Turing possibile è una Macchina di Turing per quella funzione.

Così, per affermare che qualche funzione numerica è *non calcolabile* bisogna far riferimento ad ogni algoritmo possibile, ad ogni macchina possibile. Ma cosa mai è un *algoritmo possibile* o una *macchina possibile*? Non potremmo mai dimostrare, dunque, rigorosamente che una data funzione non è calcolabile.

Invece, con il concetto di Macchina di Turing, sappiamo bene cosa sia una *possibile Macchina di Turing*: è quel concetto matematico, definito nella sezione precedente. E dunque, per dimostrare rigorosamente che qualche funzione numerica *non è Turing-calcolabile* possiamo ben riferimento al concetto generale e ben definito di Macchina di Turing.

Il concetto di Macchina di Turing è stato introdotto proprio con l'idea che potessse rimpiazzare quello - vago, non utilizzabile - di *macchina possibile.* E questo fine non va confuso con quello (sicuramente irrealizzabile) di intendere ciascuna macchina come una particolare macchina di Turing.

Se il concetto vago di *macchina possibile* può essere rimpiazzato dal concetto di *Macchina di Turing*, allora avremmo la possibilità di concludere rigorosamente che una funzione numerica non è calcolabile quando si è mostrato che per essa non c'è nessuna Macchina di Turing.

Ma possiamo rimpiazzare il concetto vago di *macchina possibile* con quello di *Macchina di Turing*?

Rispondere sì a questa domanda, significa asserire che la classe delle funzioni numeriche calcolabili è uguale a quella delle funzioni numeriche Turing-calcolabili, ossia che sono vere le due proposizioni:

1. Ogni funzione numerica calcolabile è Turing-calcolabile,

2. Ogni funzione numerica Turing-calcolabile è calcolabile.

La seconda proposizione è evidentemente vera, e dunque la proposizione che permette di rimpiazzare il concetto vago di *macchina possibile* con quello di *Macchina di Turing* è la prima proposizione:

Ogni funzione numerica calcolabile è Turing-calcolabile.

Questa proposizione è vera? Non potrà mai essere dimostrata rigorosamente, perchè per dimostrarla rigorosamente dovremo far appello al concetto di "macchina possibile" o a quello di "algoritmo possibile" che vaghi e non rigorosi. E però:

- Tutta la comunità scientifica - sin dall'inizio dell'informatica - la ritiene vera.

- Inoltre, nonostante il grande uso che si è fatto della nozione di calcolabilità sin dall'inizio dell'informatica, non è stata mai confutata da un controesempio, ossa non si è mai trivata una funzione numerica calcolabile (cioeè dotata di un programma di calcolo) che non sia anche Turing- computabile (ossia, dotata di una Macchina di Turing).

La proposizione, da ritenere vera, è chiamata *Tesi di Church* dal nome del logico A. Church che per primo la formulò.

8.2.2 Ci sono funzioni non calcolabili

Che ci siano funzioni non calcolabili, ossia funzioni che mai potranno avere un algoritmo o una macchina per il loro calcolo, è qualcosa che ogni buon matematico sapeva già prima dell'avvento dell'informatica, a partire da quando il matematico Georg Cantor mostrò che l'insieme infinito delle fnzioni numeriche costituisce un'infinità più grande di quella dei numeri naturali. Infatti, le funzioni numeriche calcolabili sono tante quante i numeri naturali (poichè a ciascuna di esse è associato un algoritmo o una macchina che ovviamente potrà essere codificato da un numero naturale) e quindi una infinità più piccola di quella di tutte le funzioni numeriche.

La teoria delle macchine di Turing permette di scoprire anche esempi di funzioni che non sono Turing-calcolabili e quindi - per la tesi di Church) non sono calcolabili.

Uno di questi esempi è la funzione numerica f, binaria, che ricevuto il codice di una Macchina di Turing M e un numero naturale n, dà come valore:

- il numero 1 , se la computazione della macchina di Turing M che comincia con la configurazione in cui sul nastro è rappresentato il numero n termina in un numero finito di passi;

- il numero 0, se la la computazione della macchina di Turing M che comincia con la configurazione in cui sul nastro è rappresentato il numero n non termina in un numero finito di passi.

Per questa funzione, non ci può essere nessuna Macchina di Turing che la calcoli, quindi nessun programma che la calcoli. Ossia, non si può avere un programma generale che, data una macchina di Turing e un input, ci dice se quella macchina si fermerà computando a partire da quell'input. Pertanto, la non-calcolabilità di questa funzione va sotto il nome *teorema della fermata delle Macchine di Turing.*

8.2.3 Calcolabilità, determinismo, non-determinismo

Un programma è deterministico quando non contiene istruzioni che dicono di fare cose diverse in una stessa situazione, ossia quando in ogni situazione può essere eseguita una sola istruzione senza dover scegliere fra più istruzioni diverse.

Nel caso della Macchina di Turing, un programma è deterministico quando non ci sono in esso istruzioni diverse che abbiano in comune la condizione e che quindi dicano di compiere operazioni diverse nello stesso stato e sotto la stessa lettura della casella su cui la macchina è posizionata.

Pertanto, il programma di una Macchina di Turing è

- deterministico se e soltanto se in tale programma non ci sono due istruzioni diverse che hanno la condizione uguale,

- non-deterministico se e soltanto se non è deterministico.

Una Macchina di Turing è detta deterministica se e soltanto se il suo programma è deterministico. Una Macchina di Turing è detta non-deterministica se e soltanto se il suo programma è non-deterministico.

Si può anche dire che una Macchina di Turing M è deterministica se e soltanto se soddisfa la seguente condizione: se $\langle q, x, y, m, r\rangle \in M$ e $\langle q, x, y', m', r'\rangle \in M$ allora $\langle q, x, y, m, r\rangle = \langle q, x, y', m', r'\rangle$.

Quando una Macchina di Turing è non-deterministica, nella computazione quando ci sono due diverse istruzioni che si possono eseguire in una particolare configurazione (nastro, e stato della macchina), si provvede a duplicare il nastro (idealmente, a duplicare la Macchina) e a eseguire su un nastro una istruzione e sull'altro l'altra istruzione.

Così, la computazione di una Macchina di Turing non-deterministica è sostanzialmente una computazione che richiede la presenza di *più macchine*.

8.2.4 Calcolabilità e fattibilità, le classi *P* e NP

La calcolabilità di una funzione ci assicura che il valore della funzione per un dato argomento - qualore tale valore esista - si può trovare con un programma *in un numero finito di passi*; ma questo numero *finito* di passi può anche essere molto grande, ed ovviamente dipoende da quanto è grande l'argomento della funzione.

Quel che importa è come cresce - in dipendenza dall'argomento n di una funzione calcolabile f - il numero dei passi necessari per il calcolo del valore $f(n)$:

- se cresce "troppo fortemente", allora la funzione pur calcolabile in teoria non lo è sempre nella pratica, ossia per argomenti "grandi" il numero dei passi diventerebbe troppo, troppo elevato, e il calcolo della la funzione per tali argomenti *non è fattibile*;

- se non cresce "troppo fortemente", allora non solo la funzione è calcolabile ma il sio calcolo *è fattibile.*

Una buona definizione di *fattibile* /*non fattibile* è data da *polinomiale* / *esponenziale.*

Un programma per il calcolo di una funzione numerica f è

- *polinomiale* se il numero dei passi necessario per il calcolo di $f(n)$ è ottenibile con un'espressione $k.n^p$ (dove n non compare all'esponente ma alla base);

- *esponenziale* se il numero dei passi necessario per il calcolo di $f(n)$ è ottenibile con un'espressione p^n (dove n compare all'esponente e non alla base).

I programmi *polinomiali* sono *fattibili,* quelli *esponenziali* sono *non fattibili.*

Una funzione numerica f appartiene alla classe P *(la classe delle funzioni calcolabili in tempo polinomiale da una macchina di Turing deterministica)* se e soltanto se esiste una macchina di Turing deterministica per f che è un programma polinomiale di calcolo per f .

Una funzione numerica f appartiene alla classe NP *(la classe delle funzioni calcolabili in tempo polinomiale da una macchina di Turing non deterministica)* se e soltanto se esiste una macchina di Turing non deterministica per f che è un programma polinomiale di calcolo per f.

Le funzioni numeriche che appartengono a P sono calcolabili in tempo polinomiale *da una macchina di Turing deterministica che opera duqnue assolutamente da sola, senza duplicare il nastro o richiedere collaborazioni.*

Le funzioni numeriche che appartengono a NP sono calcolabili anch'esso in tempo polinomiale *da una macchina di Turing non deterministica,* ossia mediante il ricorso a duplicazione di nastro e/o a duplicazione di macchine (duqnue a una osrta di collaborazione tra macchine).

Chiaramente, $P \subseteq NP$: se una funzione è calcolabile da una Macchina di Turing deterministica in tempo polinomiale, lo è anche se ammetto una duplicazione di nastri e/o di macchine. Si tratta dell'analogo della frase: ciò che si può fare da soli in tempo ragionevle, si può fare anche in collaborazione in tempo ancora ragionevole.

E l'inverso? Vale anche $NP \subseteq P$ e dunque $P = NP$? Cioè, è vero che ogni funzione che è calcolabile da una macchina di Turing non deterministica - e dunque con duplicazione di nastro e/o collaborazione - in tempo ragionevole (polinomiale), è calcolabile in tempo ancora ragionevole (polinomiale) anche senza non-determinismo, senza duplicazione di nastro, senza duplicazione di macchine?

Se la risposta è sì, cioè se $P = NP$ è vera, allora ciò significa che - almeno in questo caso - non è necessario ricorrere al non determinismo (alla duplicazione dei nastri e/o delle macchine) per calcolare le funzioni numeriche in tempo polinomiale.

Se la risposta è no, cioè se $P \neq NP$, allora ciò significa che l'uso del non determinismo, della duplicazione dei nastri, della collaborazione tra macchine rende *fattibile* il calcolo di certe funzioni che con una macchina non deterministica si calcolano soltanto in tempo esponenziale.

Ovviamente, come ogni coppia di proposizioni duali in logica classica, una e una sola è vera fra le due proposizioni $P = NP$ e $P \neq NP$. Quale delle due è vera, è ancora ignoto: si tratta di un grande problema ancora aperto della ricerca scientifica, un problema dalla cui soluzione dipende non solo la conoscenza se il non-determinismo rende fattibile il calcolo di funzioni che altrimenti non lo sarebbe, ma anche la risoluzione immediata di tanti altri problemi aperti che si è scoperto essere strettamente legati alla soluzione del problema: $P = NP$?

Capitolo 9

Assiomatizzazione della logica del primo ordine

9.1 Verità logiche e conseguenze logiche

Si può verificare che le seguenti formule del primo ordine sono verità logiche, ossia è vera la chiusura universale di ciascuna di esse:

$\neg A \vee (\neg B \vee A)$, ossia $A \to (B \to A)$

$((\neg C \wedge B) \wedge A) \vee ((\neg B \wedge A) \vee (\neg A \vee C))$, ossia $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

$(\neg B \vee \neg A) \vee A$, ossia $A \wedge B \to A$

$(\neg B \vee \neg A) \vee B$, ossia $A \wedge B \to B$

$(\neg A \wedge C) \vee ((\neg B \wedge C) \vee (\neg C \vee (A \wedge B))$, ossia $(C \to A) \to ((C \to B) \to (C \to A \wedge B))$

$\neg A \vee (A \vee B)$, ossia $A \to A \vee B$

$\neg B \vee (A \vee B)$, ossia $B \to A \vee B$

$(\neg C \wedge A) \vee ((\neg C \wedge B) \vee ((\neg B \wedge \neg A) \vee C)$, ossia $(C \to A) \to ((C \to B) \to (A \vee B \to C))$

$(\neg B \wedge A) \vee (B \vee \neg A)$, ossia $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

$\neg A \vee A$, ossia $A \to A$, $A \to \neg\neg A$, $\neg\neg A \to A$

$\exists x \neg A[x] \vee A[t]$, ossia $\forall x A[x] \to A[t]$

$\neg A[t] \vee \exists x A[x]$, ossia $A[x/t] \to \exists x A$

Si dimostra che da queste formule si ottengono tutte le altre formule del primo ordine che sono verità logiche.

Si noti che:

- se una formula del primo ordine *non è verità logica,* allora la negazione di tale formula è soddisfacibile
- se una formula del primo ordine *non è soddisfacibile*, allora la negazione di tale formula è una verità logica.

Una formula A è *conseguenza logica* di formule $A_1, ..., A_n$ del primo ordine se e soltanto se è verità logica la formula $A_1 \wedge ... \wedge A_n \rightarrow A$ ossia la formula $\neg A_1 \vee ... \vee \neg A_n \vee A$, ossia se e soltanto se $\models \neg A_1 \vee ... \vee \neg A_n \vee A$.

Quando c'è una *dimostrazione logica* di una proposizione B da certe proposizioni $B_1, ..., B_n$, ossia quando c'è una dimostrazione logica di $B_1 \wedge ... \wedge B_n \rightarrow B$, vuol dire che nella dimostrazione non si è mai utilizzato il contenuto delle componenti extra-logiche presenti in $B_1 \wedge ... \wedge B_n \rightarrow B$; e dunque quella dimostrazione è anche una dimostrazione della chiusura universale della formula ottenuta formalizzando $B_1 \wedge ... \wedge B_n \rightarrow B$.

Esempi ed esercizi

Si mostri che la formula $\neg W(x)$ è conseguenza logica delle formule

1. $P(a) \wedge Q(a)$
2. $\forall x(R(x) \vee (S(x) \wedge T(x)))$
3. $\forall x(\neg U(x) \vee (V(x) \wedge \neg W(x)))$
4. $\neg R(b) \wedge \neg P(b)$
5. $\forall x\ (\neg Q(x) \vee (R(x) \wedge U(x)))$

Si mostri che la congiunzione delle formule

1. $P(a) \wedge Q(a)$
2. $\forall x(R(x) \vee (S(x) \wedge T(x)))$
3. $\forall x(\neg U(x) \vee (V(x) \wedge \neg W(x)))$
4. $\neg R(b) \wedge \neg P(b)$
5. $\forall x\ (\neg Q(x) \vee (R(x) \wedge U(x)))$

è soddisfacibile.

Capitolo 10

Logica e altre discipline

Indice