ROMA TRE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI

Tesi di Laurea Magistrale in Scienze Filosofiche

Verso una sintassi trascendentale

Ricerche sui fondamenti della logica attraverso la logica lineare e i suoi sviluppi

Candidato:
Paolo Pistone

Relatore:
Prof. Vito Michele Abrusci
Correlatore:
Prof. Paolo Virno

a.a.2010/2011

Indice

Introduzione

Questa tesi nasce dal riconoscimento che gli sviluppi recenti della ricerca sulla logica lineare, guidati dall'enorme mole di idee elaborate dal suo fondatore Jean-Yves Girard, hanno condotto a dei risultati che difficilmente possono essere inquadrati nell'ambito della tradizionali prospettive sui fondamenti della logica. In particolare, alcuni dei "punti fermi" condivisi da gran parte delle concezioni nella filosofia della logica, riguardanti la descrizione di nozioni come quelle di "linguaggio", di "sintassi" e di "semantica", sembrano inadeguati a costituire la cornice teorica entro la quale rappresentare il senso di quello che la ricerca sta producendo in questi anni. Per questo motivo, questa tesi ha come obiettivo quello di presentare dei contributi per un ripensamento di tali "punti fermi", contributi che mirano, ben più che a stabilire tesi definitive, in un campo che di definitivo al momento ha ben poco, a porre fertili interrogativi. D'altra parte, credo che il miglior metodo per valutare la bontà di un'ipotesi elaborata per comprendere il "nuovo", sia quello di misurarla nel tentativo di gettare una nuova luce sul "vecchio", vale a dire sui risultati più rilevanti della logica del secolo scorso. E' questa ragione che mi ha spinto al confronto con alcuni tra i temi e tra i personaggi più importanti della tradizione sui fondamenti della logica.

La "scoperta" del criterio geometrico La logica lineare *LL*, che fa il suo debutto ufficiale nel 1986 con la pubblicazione di *Linear Logic* (Girard, [27]), al momento della sua nascita è una teoria che rispetta tutti i canoni tradizionali: ha un suo linguaggio, un calcolo dei sequenti, una sua "teoria dei modelli" (gli spazi di fasi), una semantica delle dimostrazioni (gli spazi coerenti) e quella che all'epoca Girard chiamava la sua deduzione naturale (i proof-net). Viene presentata come una versione del calcolo dei sequenti particolarmente orientata alle applicazioni nell'informatica, e i suoi stessi connettivi sono presentati in un vocabolario tipicamente informatico.

E' soltanto con la pubblicazione, l'anno seguente, dell'articolo *Multiplicatives* (Girard, [28]) che inizia a farsi largo l'idea che la logica lineare, piuttosto che l'ennesima "logica non classica", possa rappresentare qualcosa di profondamente diverso, riguardante i fondamenti della stessa logica classica non meno che le applicazioni informatiche: in quell'articolo infatti viene descritto un modo nuovo di guardare alla "deduzione naturale" di *LL*: introducendo la nozione di "modulo", che consiste, essenzialmente, in una struttura dimostrativa con delle ipotesi aperte (quelle che oggi chiameremmo "demoni"), Girard è in grado di associare a ogni modulo una permutazione σ, di definire l'*ortogonalità* tra permutazioni come

$$\sigma \perp \tau \Leftrightarrow \ \sigma\tau \text{ è ciclica} \tag{0.0.1}$$

e di dimostrare il seguente teorema (in cui la frontiera di un modulo β è definita come l'insieme delle ipotesi di β più qualche conclusione di β) :

$$\textit{Se } \beta, \beta' \textit{ sono moduli con stessa frontiera, } \sigma \textit{ e } \tau \textit{ le permutazioni associate e } \sigma\perp\tau, \textit{ allora} \\ \textit{la struttura dimostrativa ottenuta “incollando” le frontiere di } \beta \textit{ e } \beta' \textit{ è un proof-net} \tag{0.0.2}$$

Le novità radicali connesse con questo risultato sono essenzialmente due:

- *La formulazione di un criterio di correttezza "modulare" per i proof-net in termini puramente algebrico-geometrici*, senza alcun riferimento a formule, linguaggi o sistemi deduttivi, i tipici ingredienti delle consuete formulazioni dei teoremi logici. E' lo stesso Girard a parlare esplicitamente di una "semantica geometrica del calcolo".
- *La natura "interna" del criterio di correttezza*, il quale non fa alcun riferimento a modelli o ad altri oggetti esterni alle strutture dimostrative:

  > This replaces the familiar duality proofs/models (i.e. proofs/refutations) by a duality proofs/counterproofs, which is much more satisfactory (Girard, [28])

  La correttezza di un proof-net non è altro che il prodotto del confronto (dell'interazione, diremmo oggi) di questo con gli altri grafi possibili. Questa idea era difficile da raccogliere entro il quadro tradizionale che vede confrontarsi, come due universi separati, quello della sintassi (le derivazioni) e quello della semantica (i modelli).

E' facile immaginare come, nel giro di pochi mesi, questi risultati abbiano portato alla prima formulazione della Geometria dell'Interazione in (Girard, [29]), che costituisce una estensione della teoria dei proof-net nell'algebra degli operatori su uno spazio di Hilbert, a partire dall'osservazione che le permutazioni di un insieme finito possono essere naturalmente rappresentate in forma matriciale.

I contributi filosofici La rilevanza dei due aspetti sopra menzionati, e la forza con cui stridono con alcuni di quelli che sono in genere considerati i presupposti della stessa formulazione del vocabolario della logica mi hanno spinto a recuperare i nodi concettuali e filosofici che sono all'origine della visione tradizionale della logica. In particolare, decisiva in tal senso mi è sembrata la "svolta linguistica" che viene generalmente attribuita a Frege, ovvero al fondatore della moderna logica matematica. E' stato infatti lo studioso tedesco a rilevare la centralità della formulazione di linguaggi e sintassi rigorose, come garanzia della correttezza dei risultati della logica stessa. E' sempre Frege a sostenere, inoltre, a partire dai *Fondamenti dell'aritmetica* (Frege, [21]), che il terreno sul quale devono essere combattute battaglie epistemologiche e metafisiche come quelle che riguardano la realtà dei numeri e più in generale degli oggetti su cui verte la nostra pratica quotidiana del linguaggio, sia quello dell'elaborazione di rigorose concezioni del significato delle espressioni linguistiche con cui ci riferiamo a tali entità e a tali questioni. Una tesi questa che, oltre a costituire il perno attorno al quale si è sviluppata la cosiddetta filosofia analitica, ha influenza fortemente gli sviluppi della logica del ventesimo secolo.

Un'altra figura centrale, nel dibattito sui fondamenti, che mi è sembrato quanto mai opportuno chiamare in causa è Wittgenstein, il critico delle regole, o meglio della concezione secondo cui i contesti nei quali si sviluppa la pratica linguistica possano essere rigorosamente delimitati attraverso la descrizione delle regole di inferenza o delle regole sintattiche che sono sistematicamente "seguite" dai partecipanti a un "gioco linguistico". Ritengo che le sue, seppur talvolta criptiche, osservazioni sul "seguire una regola" possano rappresentare un prezioso contributo teorico al tentativo di ridimensionare e ridefinire, attraverso la geometrizzazione della logica in corso a partire dall'articolo di Girard citato sopra, il ruolo e il significato dei sistemi deduttivi e delle loro regole nella identificazione degli stessi contenuti logici. D'altra parte, nel ricordare l'ostilità di Wittgenstein nei confronti delle pretese dei logici di matematizzare i problemi filosofici, va riconosciuto come l'inestricabilità dei contenuti teorici e dei risultati tecnici che caratterizza le ricerche di questa tesi fa sì che queste, sebbene fortemente influenzate dal pensiero del filosofo austriaco, non possano essere sistematicamente orientate nella direzione della stessa filosofia wittgensteiniana.

Infine, particolarmente rilevanti alla discussione mi sono parsi i contributi del filosofo inglese Michael Dummett, per almeno tre ragioni: in primo luogo la sua interpretazione dei testi di Frege, tesa a sottolineare le divergenze piuttosto che le convergenze con la concezione semantica che emerge dai risultati della teoria dei modelli, con la quale le posizioni di Frege sono spesso, ingiustamente, confuse (anche dallo stesso Girard - vd. ad esempio il paragrafo su Frege in (Girard, [43])). In secondo luogo, il rilievo che gli sviluppi della teoria della dimostrazione hanno avuto nella filosofia del linguaggio di Dummett, sebbene questi si sia d'altra parte mostrato del tutto indifferente alle più recenti novità, oggetto di questa tesi, apportate dalla logica lineare. In ultimo, il suo interessante, e controverso, rapporto con la filosofia di Wittgenstein, di cui, da un lato, apprezza e recupera la centralità attribuita alla questione dell'uso come origine del senso linguistico, ma dall'altra rigetta con forza il rifiuto di ogni tentativo di giustificazione, o di "fondazione", della pubblicità e intersoggettività dell'uso attraverso l'oggettività delle regole che lo disciplinano.

L'incompletezza e la complessità Si è detto sopra di come la bontà di un nuovo punto di vista si misuri nella sua applicazione ai risultati già esistenti; in tal senso, mi sembra che i due punti elencati, vale a dire la rivalutazione della centralità delle nozioni tecniche di linguaggio e sistema deduttivo e la messa in discussione del rapporto "esterno" tra sintassi e semantica, rispondano a delle esigenze che emergono già dalla lettura dei più celebri risultati della logica del ventesimo secolo, tutti dovuti a Gödel, ovvero il teorema di completezza (della logica del primo ordine) e, soprattutto, i due teoremi di incompletezza. In effetti, una delle cose che a mio parere salta all'occhio, leggendo questi teoremi, è come ogni loro rigorosa formulazione ne "tradisca", in un certo senso, il contenuto stesso, e come ogni formulazione “fedele” sia invece generalmente espressa informalmente: questo risulta particolarmente evidente nel caso del primo teorema di incompletezza, che viene in genere formulato a partire da una qualche nozione di “teoria per l’aritmetica”, laddove non esiste alcuna teoria sistematica e completa in grado di raccogliere tutte le “teorie per l’aritmetica” cui il teorema si applica. Nella tesi cercherò inoltre di far vedere come lo stesso riferimento all’aritmetica può essere fortemente ridimensionato. D’altra parte, la stessa esistenza di formule “vere e non dimostrabili”, come conseguenza dell’incompletezza, costituisce una questione la cui interpretazione, all’interno della tradizionale separazione di sintassi e semantica, è da considerarsi, a partire dalla sterminata letteratura sul tema, come quantomeno controversa.

Un aspetto, che ha strettamente a che fare con l’incompletezza e che non ha ricevuto grande attenzione nella letteratura filosofica è quello della complessità computazionale. Come è noto, gli argomenti del primo e del secondo teorema di Gödel, applicati iterativamente, permettono di costruire delle gerarchie, indiciate da numeri ordinali transfiniti, di “teorie per l’aritmetica”, in cui una teoria T è situata a un gradino più alto della teoria T' se e solo se T è in grado di derivare la coerenza di T'. Un risultato importante è quello che mostra che, se α è l’ordinale corrispondente al “gradino” della teoria T, allora la classe delle funzioni f sui numeri naturali di cui T è in grado di derivare la totalità, attraverso la formula

$$\forall n \exists m (f(n) = m) \tag{0.0.3}$$

corrisponde esattamente alla classe delle funzioni indiciata da α nella cosiddetta *gerarchia di Grzegorczyk estesa*[1]. Questa corrispondenza tra ordinali e funzioni di cui una teoria deriva la totalità ha una controparte effettiva: se infatti ci rivolgiamo a funzioni computabili sui numeri naturali caratterizzate da un certo limite superiore nel tempo o nello spazio di esecuzione (ad esempio funzioni in tempo polinomiale), allora l’argomento di Gödel permette, data una classe di complessità C (in spazio o in tempo), di costruire esplicitamente una funzione computabile che non appartiene a C: si tratta della funzione che simula tutte le funzioni della classe C, e che dunque, in un certo senso (che può essere esplicitato rigorosamente col ricorso alla teoria dei tipi) dimostra la “coerenza” di C, nel senso della totalità di tutte le sue funzioni..

Ora, uno dei risultati più interessanti negli sviluppi della logica lineare, che risale all’articolo *Light Linear Logic* (Girard, [31]) del 1998, è la possibilità di caratterizzare in termini puramente logici, ossia attraverso formulazioni “leggere” di (frammenti della) logica lineare, alcune importanti classi di complessità computazionale (si tratta delle classi P e *Elementary*). Questi risultati hanno indotto lo stesso Girard a pensare che la questione della complessità algoritmica, che ancora oggi, così come la logica risente della dipendenza dai suoi linguaggi e dalle sue sintassi, risente della dipendenza dal formalismo

[1] Si tratta di una gerarchia che misura, per mezzo di ordinali ricorsivi, la “velocità di crescita” delle funzioni computabili. Per ogni ordinale ricorsivo α, G_α è la classe delle funzioni computabili limitate superiormente da F_α, dove quest’ultima è definita per induzione transfinita come segue: $F_0(n) := n+1$ è la funzione successore, $F_{\alpha+1}(n) := (F_\alpha)^n(n)$ e, per $\alpha = lim_k \beta_k$, $F_\alpha(n) = F_{\beta_n}(n)$. Esempi notevoli sono la classe $G_2 = \mathcal{P}$ delle funzioni polinomiali, la classe $G_3 = \mathcal{E}$ delle funzioni elementari, la classe G_ω delle funzioni ricorsive primitive, limitate dalla F_ω, che è una versione della celebre *funzione di Ackermann*, e la classe G_{ϵ_0} delle funzioni la cui totalità è dimostrabile nell’Aritmetica di Peano.

delle macchine di Turing, possa avere un serio e profondo contenuto logico e costituire un terreno fertile per la stessa tematica dei fondamenti:

> Foundational questions are cognitive: ≪What can we know? ≫, ≪How do we know? ≫, ≪What are our preconceptions? ≫. Thus, the open problems in algorithmic complexity, which address the efficiency of computation, are foundational, although far from the stereotyped problem of consistency. (Girard, [44])

Lo "spazio" della logica La pubblicazione, nel 2001, di *Locus Solum: from the rules of logic to the logic of rules* (Girard, [33]), giunge a conclusione di un periodo di studi che portano Girard alla elaborazione di una teoria, la ludica, che si presenta come una formulazione non linguistica e non (in senso stretto) sintattica del frammento moltiplicativo-additivo della logica lineare. La prima proprietà che caratterizza la ludica è infatti l'assenza delle formule del linguaggio, sostituite dai cosiddetti "loci", i quali sono organizzati secondo una struttura decomposizionale che interpreta la relazione "formula/sottoformula" secondo l'analogia informatica "cartella/sottocartella": un "locus", dunque, è concepito come un indirizzo che può dare accesso a una data informazione. In tal modo, attraverso la dinamica dei "loci", la ludica si propone di ridefinire il vocabolario logico indipendentemente dalle definizioni tradizionali di linguaggio, delle quali invece mira a mettere in discussione la stessa morfologia.

La seconda caratteristica della ludica è il ridimensionamento, in accordo con quella che Girard chiama "sintassi a posteriori" del ruolo delle regole nell'interazione logica: nella ludica le derivazioni, chiamate *design*, sono definite sulla base di *azioni* sui loci, e possono essere "decorate" in più modi attraverso regole sintattiche, in virtù delle proprietà che queste manifestano durante l'interazione. In tal modo, all'enumerazione delle regole d'uso degli artefatti logici si sostituisce una teoria dell'interazione tra i design, interazione basata sulla polarità qualitativa tra *positivo* e *negativo*: questa polarità, che risale alle ricerche di Jean-Marc Andreoli (vd. (Andreoli, [3])) sulla focalizzazione nella logica lineare, corrisponde alla differenza tra regole *irreversibili* e *reversibili*, invisibile nei formalismi non lineari, ed è assunta nella ludica come fondamento stesso dell'interazione; in tal modo quest'ultima, consistendo nel reciproco scambiarsi dei ruoli positivo (risposta) e negativo (domanda) tra design, viene ad assomigliare sempre più a una forma di interpretazione reciproca, vale a dire a una forma di comunicazione. La rilevanza semiotica di queste osservazioni costituisce il perno della discussione dei risultati della ludica in questa tesi.

La "sintassi trascendentale" e il recupero di Kant Laddove la ludica costituisce una realizzazione concreta della dualità "proof/counter-proof" emersa fin dai tempi di *Multiplicatives*, tale approccio non è direttamente compatibile con quella decostruzione delle regole sintattiche rappresentata dalla teoria dei proof-net. Quello che serviva era perciò un recupero della prospettiva che aveva portato alla Geometria dell'Interazione all'interno del nuovo punto di vista "sintattico a priori" e "locativo". Alla base di un tale "revival" della *GdI*, occorso intorno al 2006, sta una profonda riconsiderazione dell'ambiente "continuo" rappresentato dalle algebre di operatori, di contro alla natura "discreta" dei sistemi deduttivi, in linea con il tentativo di Alain Connes, con la sua *geometria non commutativa*, di ricostruire i fondamenti della matematica sostituendo, al mondo "discreto" degli insiemi, quello "continuo" e "quantistico" (nel senso di non commutativo) delle algebre di operatori. Scrive ad esempio Girard:

> Le monde commutatif, ensembliste, apparaît comme un espace vectoriel muni d'une base distinguée. Toutes les opérations sont organisées par rapport à cette base, en particulier, on peut les représenter per des fonctions linéaires dont la matrice est diagonale dans cette base.
>
> Le monde non commutatif oublie la base; il y a toujours une, mais subjective, celle où se diagonalise l'opérateur hermitien que l'on utilise: ≪sa ≫théorie des ensembles, pour ainsi dire. Mais, si deux hermitiens f et g ont des ≪théories des ensembles ≫qui ne commutent pas, on voit que $f + g$ a une troisième théorie des ensembles sans relation avec celle des deux précédents. (Girard, [36])

L'aspetto più innovativo di questa seconda versione della *GdI*, tecnicamente molto più elaborata, è la distinzione tra gli aspetti "oggettivi" (nel senso di indipendenti da ipotesi di commutazione) dell'interazione logica e quelli "soggettivi" (dipendenti dalla commutazione), in cui questi ultimi vengono in ultima analisi a identificarsi con quegli aspetti relativi alla scomposizione (discreta) degli artefatti logici secondo regole sintattiche: gli operatori che costituiscono le "derivazioni" della *GdI* possono essere considerati "oggettivamente" come entità geometriche la cui interazione è determinata da proprietà topologiche ricavate dalla teoria dei proof-net, e "soggettivamente" come prodotti "generati" attraverso l'applicazione di regole sintattiche. D'altra parte, come nella celebre coppia "posizione/momento" che dà luogo al *principio di indeterminazione* nella meccanica quantistica (il formalismo è lo stesso!) non c'è alcuna garanzia che due distinte "derivazioni", pur potendo interagire, possano essere scomposte "soggettivamente" secondo le regole di una stessa sintassi.

Nella prima *GdI*, essendo questa formulata sempre in riferimento a una base canonica, era impossibile notare questa differenza. Nel momento in cui tale riferimento è caduto, si è aperta una prospettiva completamente nuova che, negli ultimissimi anni (2010-2011), attraverso l'identificazione del tema della "soggettività della sintassi", ha acquisito spessore filosofico con il riferimento esplicito di Girard alla filosofia trascendentale di Kant (vd. (Girard, [43])): il programma della *GdI* viene oggi concepito come un tentativo di ricostruire i fondamenti della logica attraverso l'identificazione, nel dominio geometrico e non commutativo delle algebre di operatori, delle *condizioni di possibilità* delle sintassi logiche, e dunque come una vera e propria "sintassi trascendentale":

> [...] il est nécessaire de comprendre la part de nous-même dans les objets que nous étudions, d'où l'invocation de Kant — du moins de sa méthode — pour essayer de trouver, sinon un format définitif (qui serait alors nécessaire), du moins de sérier les problèmes pour ne pas objectiviser ce qui appartient au sujet ou subjectiviser le ≪monde ≫. Bien sûr, il ne faut pas compter sur Immanuel pour répondre à notre place : rappelons que ces questions n'avaient aucun sens précis il y a 25 ans. Mais, dans les limites de sa compétence, celle d'un catadioptre qui *réfléchit* la technique, l'intervention de la philosophie me semble inévitable: c'est bien la seule nécessité que je vois. (Girard, [43])

E' per questo motivo che il riferimento, talvolta anche critico, alla *Critica della Ragion Pura* di Kant costituirà una costante di questa tesi, nel tentativo, ben più che di legittimare una anacronistica affiliazione, di dare luogo a un dialogo che possa risultare proficuo. La stessa adozione, quasi ovunque, di termini presi in prestito dal vocabolario kantiano, come le stesse nozioni di "soggetto", "oggetto", "trascendentale" dovrà quindi essere considerata come niente più di una, magari irriverente, escursione in un lessico del quale non si ha troppa cura di salvaguardare la solennità.

Una "svolta geometrica"? In (Tronçon, [69]) compare per la prima volta, in riferimento agli sviluppi appena discussi, l'espressione "*tournant géométrique*", contrapposta al "*tournant analytique*", ossia alla svolta linguistica da Frege in poi. In effetti, il ruolo determinante ricoperto da concetti puramente geometrici nei risultati che abbiamo rapidamente elencato, può indurre a pensare a una sorta di "scomparsa del linguaggio", in favore appunto della "comparsa della geometria". Si deve anzitutto rilevare che quando, in relazione alla logica lineare, si parla di geometria lo si fa essenzialmente in tre sensi diversi:

- Il senso *topologico* del criterio di correttezza dei proof-net, che sostituisce alla concezione "analitica", locale, delle dimostrazioni l'idea che queste debbano essere piuttosto intese nella loro "forma" geometrica globale.
- Il senso *locativo*, che sostituisce alle formule di un linguaggio, incuranti della loro stessa peculiarità morfologica, il posizionamento dei "loci" in uno spazio concreto, disponibile alle manipolazioni sintattiche.
- Il senso *non commutativo*, che considera l'universo indeterminato ed esposto alle interferenze del continuo più fondamentale, nel senso di più profondo, di quello discreto e insiemistico, da esso derivato (contrariamente alla gran parte delle prospettive - insiemistiche, intuizioniste, formaliste, ecc.- sui fondamenti).

Una tale divergenza di contenuti è, a mio parere, testimone del fatto che, piuttosto che di fronte alla nascita di una nuova ideologia "geometrista" che ambisca a sostituire la vulgata analitica dominante nella filosofia della logica, ciò che davvero emerge da queste linee di ricerca, ancora del tutto aperte (non a caso Girard parla di un "*Far West* intellectuel" (Girard, [43])), è un modo nuovo di accostarsi alla stessa questione dei fondamenti, concepiti non più all'insegna di una "fondazione" del sapere della logica sulla base di formalismi (i linguaggi, i sistemi deduttivi) che, per la loro peculiarità, hanno avuto il pesante risultato di isolare la logica stessa dal resto della ricerca matematica. L'idea, fatta propria dallo stesso Girard, è quella di pensare i fondamenti piuttosto come un *approfondimento* dei concetti che sono oggetto della logica, e un conseguente avvicinamento della disciplina ai contenuti, spesso ben più profondi, di quelle che sempre più, per sottolinearne la diversità, sentiamo chiamare la "vera" matematica e la "vera" filosofia.

> Cette expression [le tournant géométrique] ne doit pas être pris comme un rejet du tournant linguistique, à qui l'on doit des avancées fondamentales. Il s'agit plutôt

> d'une réforme, consécutive à la fossilisation dont nous avons parlé. L'idée linguistique est excellente, elle est la première étape de toute déréalisation, mais comme toute idéologie elle a ses caves, ses non-dits subliminaux. [...]
>
> En revanche, nous allons faire l'hypothèse que le langage est structuré, qu'il n'est pas ce désert bureaucratique que nous venons d'évoquer. Mais, cette structure, où la chercher? Sûrement pas dans une explication langagière de langage, qui conduit à une essentialisme prétentieux et stérile. Il reste la *géométrie*. Par géométrie, on n'entend rien di trop précis, disons qu'est géométrique ce qui est sensible au codage, ce qui s'oppose au codage. (Girard, [41])

Concordemente con l'opposizione appena discussa, la prima parte di questa tesi è dedicata ai rapporti della logica con la svolta linguistica e, soprattutto, a come la logica lineare e i suoi sviluppi possono aiutarci a comprendere tale relazione. In particolare, il primo capitolo, è dedicato alla ricostruzione, a partire dalla concezione "linguistica" della logica di Frege e dalla stessa teoria dei modelli, della dualità "interna" "proof/counterproof" sopra menzionata. Il secondo capitolo, invece, è dedicato al rapporto tra la "sintassi a posteriori" della ludica e quelle concezioni semantiche, come quella di Dummett e Prawitz, che, a partire dai risultati della teoria della dimostrazione (precedenti alla scoperta della logica lineare) considerano le regole di inferenza il fulcro della giustificazione della correttezza logica.

La seconda parte, invece, sarà interamente dedicata alla "svolta geometrica" (ammesso che di tale svolta abbia senso parlare), vale a dire all'irruzione dei criteri geometrici dei proof-net, di contro ai "dogmi" generativisti sulla natura della sintassi (terzo capitolo) e ai più recenti, tutt'altro che sistematici, sviluppi della "sintassi trascendentale" attraverso la riformulazione non commutativa della *GdI* (quarto capitolo).

Concludo con due informazioni di carattere pratico, riguardanti la lettura del testo: in primo luogo, per quanto riguarda le citazioni, ho scelto di lasciarle per quanto possibile in lingua originale e di limitarmi a considerare edizioni italiane, o al più traduzioni mie, nel solo caso in cui la lingua fosse il tedesco. Infine, anche per via della considerevole lunghezza di questa tesi, all'inizio di ogni capitolo è presente un breve riassunto dei contenuti generali e di quelli specifici dei singoli paragrafi, per facilitare una lettura del testo di tipo "enciclopedico".

Parte I

La svolta linguistica e la logica

Capitolo 1

La dualità sintassi-semantica

L'obbiettivo di questo capitolo è ricostruire le basi, a partire dalla diffusa concezione dei fondamenti della logica che, influenzata dalla cosiddetta "svolta linguistica", pone al centro la questione del riferimento delle espressioni di un linguaggio a entità e stati di cose esterni ad esso, di una prospettiva diversa, resa possibile dal raffinamento degli strumenti logici occorso con la scoperta della logica lineare; tale prospettiva, invertendo la direzione dello sguardo semantico, si rivolge direttamente agli artefatti logici e alle proprietà che, caratterizzandone l'uso, ne influenzano le possibilità di riferimento.

La prima sezione sarà dedicata alla discussione dei caratteri principali e dei limiti dell'approccio "referenzialista" alla logica; in §1.1.1 e §1.1.2 sarà focalizzato il ruolo che, a partire da Frege, lo sviluppo delle nozioni tecniche di linguaggio, sistema deduttivo e modello ha giocato nell'inquadrare i fondamenti della logica all'interno di una più ampia visione filosofica, caratterizzata dalla ricerca di soluzioni logico-linguistiche ai grandi temi della tradizione metafisica. In §1.1.3, servendosi di una rilettura puramente logica di alcuni concetti (sintassi, computabilità, incompletezza) che, nella tradizione "linguistica", sono considerati piuttosto presupposti per la stessa formulazione del vocabolario della logica, saranno gettate le basi per una descrizione interna alla logica di alcune questioni sintattiche e semantiche su cui si focalizza il dibattito sui fondamenti. In §1.1.4, attraverso la discussione, ispirata a un celebre articolo di Hilary Putnam, del significato dell'esistenza di modelli "non standard", sarà introdotta per la prima volta la nozione di "soggettività della sintassi", che risulterà decisiva all'interno di una rilettura del rapporto tra sintassi e semantica che si rifà alla questione kantiana del soggetto trascendentale: di fronte alle aporie discusse, sarà individuata, in §1.1.5, la necessità di un passaggio dall'analisi dei criteri di riferimento degli enunciati del linguaggio a quella delle *condizioni di possibilità* di un tale riferimento, da ricercare all'interno della stessa sintassi della logica.

Nella seconda sezione sarà delineato un percorso che, a partire dalla teoria dei modelli, permetterà di riscoprire internamente alla logica classica i presupposti per il suo riferimento a strutture siffatte. In §1.2.2 sarà esposta la dimostrazione del teorema di completezza per la logica del primo ordine per mezzo della cosiddetta *analisi canonica*, la quale ci permetterà di stabilire, per la prima volta, una forma di *dualità* tra derivazioni e modelli: realizzeremo così un primo tentativo di "internalizzare" la semantica, associando ai contromodelli di una formula dei "tentativi" di refutazione esprimibili all'interno del calcolo dei sequenti. La riformulazione interna del vocabolario modellistico indurrà una analogia in termini di teoria dei giochi, in cui un "tentativo" di derivazione e un "tentativo" di refutazione corrisponderanno alle strategie di due giocatori che cercano di avere la meglio l'uno sull'altro. La rappresentazione astratta di questa metafora strategica sarà formalizzata in §1.2.3 con l'introduzione degli spazi coerenti, il fondamentale strumento a partire dal quale Girard riuscì a ricavare regole molto più raffinate, rispetto a quelle di LK, per il calcolo dei sequenti, vale a dire la logica lineare (introdotta in §1.2.4). In particolare, le fondamentali nozioni di "positivo" e "negativo", che richiedono essenzialmente il ricorso alla logica lineare, garantiranno la possibilità di una lettura "qualitativa" dell'interazione logica come una forma di comunicazione caratterizzata dal reciproco scambiarsi dei ruoli passivo (negativo, la domanda) e attivo (positivo, la risposta) tra due "giocatori". Attraverso gli spazi coerenti e la prospettiva della dualità, infine, sarà proposta in §1.2.5 una analisi delle "simmetrie classiche", ovvero delle proprietà interne alle derivazioni della logica classica nei termini delle quali riusciremo a individuare le ragioni sintattiche e geometriche (proprio perchè basate su "simmetrie") di un principio semantico così carico di contenuti filosofici come quello della bivalenza.

1.1 Semantica e rivoluzione copernicana

1.1.1 Frege e il realismo semantico

In questo paragrafo ci occuperemo di sottolineare alcuni tra i caratteri della filosofia di Frege che più sono stati influenti nella tradizione "linguistica" sui fondamenti della logica e, a partire da questi, introdurremo la nozione di "quoziente semantico" (e semiotico), la quale costituirà uno dei concetti chiave per intendere e approfondire il rapporto tra sintassi e semantica. Inoltre, attraverso il riferimento alla deduzione trascendentale di Kant, sarà introdotta l'analogia "soggetto-sintassi" che ci accompagnerà per tutto il testo.

Il principio del contesto

> Distinguo ciò che chiamo oggettivo da ciò che si può maneggiare, da ciò che è nello spazio e da ciò che è attuale. L'asse della Terra è oggettivo, così come il centro di massa del sistema solare, ma non chiamerei questo attuale nello stesso modo in cui è attuale la Terra. Parliamo spesso dell'equatore come di una linea *immaginaria*; ma sarebbe sbagliato chiamarla una linea immaginaria in senso dispregiativo; non è una creazione del pensiero, prodotto di un processo psicologica, ma è soltanto riconosciuta o appresa dal pensiero. Se essere riconosciuto equivalesse ad essere creato, allora non potremmo dire niente di positivo sull'equatore in nessun periodo precedente alla data della sua presunta creazione. [trad. mia] (Frege, [21])

Qualcuno ci chiede di spiegargli cos'è l'equatore, gli diciamo che l'equatore è la circonferenza massima della superficie della Terra perpendicolare al suo asse di rotazione, e conveniamo con lui quando osserva che si tratta di qualcosa che non può essere visto, sentito, percepito in alcun modo, qualcosa che, anche attraversandolo, non dà alcun tipo di sensazione (questo esempio è presentato in (Dummett, [18])). Questa persona ci chiede poi perchè, in fondo, diciamo che l'equatore è un oggetto, qualcosa di esistente, se tutto sommato non sembra altro che una buona e utile finzione matematica. Ecco allora che l'ira di Frege si riverserebbe contro il povero malcapitato (il vecchio professore tedesco non era certo noto per le sue buone maniere!): "Cosa diamine hanno a che fare le tue maledette e irrilevanti percezioni con l'esistenza delle cose? Vuoi forse dire che, se attraversare avanti e indietro l'equatore non è la stessa cosa che avere un dolore intermittente, allora non è pur sempre vero che tu lo stia attraversando avanti e indietro?"

Del resto,

> Solo all'interno di una proposizione le parole hanno davvero un significato [...] Basta che la proposizione, presa per intero, abbia un senso; è questo che conferisce contenuto alle sue parti. [trad. mia] (Frege, [21])

Chiedere se un certo nome denoti un oggetto esistente non vuol dire chiedere se a quel nome è associato qualcosa in grado di generare specifiche reazioni psicologiche in qualcuno, bensì chiedere se gli enunciati in cui quel nome occorre hanno un valore di verità definito. Questo è quanto si deve accettare se si sostiene il cosiddetto *principio del contesto* (d'ora in poi *PdC*), secondo il quale *è soltanto nel contesto di un enunciato che un'espressione linguistica assume un significato.* Frege si serve di questo principio, in (Frege, [21]), per refutare gran parte delle obiezioni psicologiste alla sua teoria sulla natura dei numeri: come si può pensare, come fa ad esempio Mill, di ricondurre i numeri, si pensi allo zero, a entità del mondo che interagendo con la mente generano certe idee quando

> Potremmo provare inutilmente a darci un'idea di zero stelle visibili. Possiamo, certamente, pensare a un cielo completamente coperto di nubi; ma in questo non c'è nulla che corrisponda alla parola "stella" o allo zero. Quello che riusciamo a immaginare non è altro che una situazione in cui il giudizio naturale da esprimere sarebbe: al momento non si vede alcuna stella. [trad. mia] (Frege, [21])

Tanto i numeri, quanto l'equatore e l'asse terrestre, sono oggetti come le sedie e i frullatori perchè sia riguardo ai primi che ai secondi è possibile formulare asserzioni vere o false, e sia i primi che i secondi sono oggetti solo in virtù di ciò: la possibilità di interagire percettivamente, di formarsi rappresentazioni mentali è una caratteristica che alcuni oggetti hanno ed altri no, ma non è discriminante circa il fatto che entrambi siano, nel senso più pieno del termine, oggetti.

Condizione necessaria (e sufficiente) per poter parlare di un numero come di un oggetto è dunque che si possano formulare riguardo ad esso asserzioni di identità vere o false:

> Come ci devono essere dati i numeri, se non possiamo farci nessuna idea o intuizione di essi? Dal momento che è soltanto nel contesto di una proposizione che le parole hanno un significato, il nostro problema si riduce a questo: definire il senso di

una proposizione in cui occorre un'espressione numerica. Il che, ovviamente, ci apre una grande quantità di scelte possibili. Ma abbiamo già stabilito che le espressioni numeriche devono essere intese come riferentesi a oggetti di per sè sussistenti. E questo è sufficiente per indicarci una classe di proposizioni che devono avere un senso, vale a dire quelle che esprimono il nostro riconoscimento di uno stesso numero. Se dobbiamo usare un simbolo a per denotare un oggetto, allora dobbiamo avere un criterio per decidere, in tutti i casi, se b è lo stesso di a, anche qualora non sia sempre in nostro potere di applicare un tale criterio. [trad. mia] (Frege, [21])

Il PdC pone al centro delle indagini ontologiche (cosa esiste?) la nozione di enunciato (assertorio) e la questione delle sue condizioni di verità. Possiamo leggere in queste citazioni fregeane gli albori di quella *svolta linguistica* che ha segnato gran parte della più recente filosofia, caratterizzata dal fatto di affrontare le vecchie questioni metafisiche sul campo dell'analisi linguistica e dello sviluppo di una *teoria del significato* (vd. ad esempio (Dummett, [17])) per gli enunciati di quella lingua in cui tali questioni vengono poste. In effetti, l'obbiettivo di tutta una vita di intenso studio, per Frege, era quello di giustificare la naturale credenza nei numeri come oggetti esistenti indipendentemente dalle volontà e dai capricci delle persone, perfino da quelli dei più raffinati matematici, e le attività a cui progressivamente si rivolse a tal fine furono due:

(i) *l'elaborazione di una sintassi logica rigorosa;*

(ii) *lo sviluppo di una (anch'essa rigorosa) teoria semantica per tale sintassi.*

Abbiamo visto che, nell'intento di specificare le modalità di accesso ai numeri, il PdC rimanda direttamente al punto (ii), ossia al progetto di specificare il senso degli enunciati di identità in cui occorrono espressioni denotanti numeri. La prima cosa da chiedersi è cosa esattamente si debba intendere con l'espressione "teoria semantica" (d'ora in poi TS); in prima approssimazione possiamo dire che una TS è qualcosa di simile a ciò che Frege ha cercato di fare, elaborando la nota teoria del "senso" e della "denotazione", al fine di specificare come sia che certi segni della lingua possano riferirsi a qualcosa (denotazione, intuitivamente, "3" si riferisce a 3, "Aristotele" si riferisce ad Aristotele), e possano farlo in modi diversi (senso, "$2 + 1$", "$(27 \times 7) - 186$" si riferiscono a 3, "Il maestro di Alessandro Magno", "Il più famoso allievo di Platone" si riferiscono ad Aristotele). Già a questo livello molto generale emerge però un carattere fondamentale delle TS: senza aver prima formulato in maniera rigorosa come sia fatta la sintassi della lingua per cui vogliamo costruire la nostra teoria, è difficile riuscire a essere più precisi circa la forma che una tale teoria dovrà assumere; senza un preliminare chiarimento della forma della lingua che ci interessa, non c'è una chiara nozione di semantica per quella lingua stessa.

Il concetto di teoria semantica Prima di tutto, occorre quindi chiarire cosa significhi, da Frege in poi, fornire una sintassi rigorosa: scrive ad esempio Tarski:

[...] dobbiamo individuare in modo non ambiguo la classe di quelle parole e espressioni che devono essere considerate *significanti.* In particolare, dobbiamo indicare tutte le parole che decidiamo di usare senza definirle, dette *termini non definiti*

> (o *primitivi*); e dobbiamo dare le cosiddette *regole di definizione* per introdurre *termini* nuovi o *definiti*. In secondo luogo, dobbiamo elaborare dei criteri per distinguere entro la classe delle espressioni quelle che diciamo *enunciati*. Infine, dobbiamo formulare le condizioni alle quali un enunciato del linguaggio può essere *asserito*. In particolare dobbiamo indicare tutti gli *assiomi* [...] e dobbiamo dare le cosiddette *regole di inferenza* [...]. Tanto gli assiomi quanto gli enunciati da essi dedotti mediante regole di inferenza sono indicati come *teoremi* o *enunciati dimostrabili*. [...] In tale linguaggio i teoremi sono gli unici enunciati che possono essere asseriti. (Tarski, [66])

Questa caratterizzazione ricalca fedelmente la definizione di linguaggio e di sistema deduttivo ancor oggi in uso in logica. Per le definizioni rigorose (e un po' pedanti) che saranno qui adottate si veda §A.

E' stato Frege, con l' Ideografia del 1879 (Frege, [22]), a inaugurare un concetto che diventerà un asse portante di tutta la logica e di gran parte della filosofia del linguaggio a lui successiva: quello di linguaggio formalizzato e con esso la tesi secondo cui ogni serio studio logico o linguistico presupponga la preliminare costruzione di una sintassi formale adeguata a generare tutti e soli i segni linguistici della lingua che si vuole analizzare.

Tornando alle TS, possiamo a questo punto accontentarci della seguente (generica) definizione, che si rifà essenzialmente a (Dummett, [17]):

> Una TS per un linguaggio $\mathcal{L}$ è una teoria che specifica:
>
> - cosa sia una *interpretazione* di $\mathcal{L}$, ossia specifica come si costruiscano associazioni tra elementi delle categorie sintattiche di $\mathcal{L}$ e opportune classi di *denotazioni* o *valori semantici*;
> - come avvenga, data una interpretazione di $\mathcal{L}$, l'assegnazione dei valori semantici agli elementi di $\mathcal{L}$.

Data una interpretazione di $\mathcal{L}$, si può pensare all'attribuzione di denotazioni come a una funzione non iniettiva da segni di $\mathcal{L}$ a valori semantici la quale induce un *quoziente* su ogni categoria sintattica: segni aventi la stessa denotazione apparterranno alla stessa classe. Vediamo un esempio: consideriamo il linguaggio generato dai seguenti insiemi di *termini* ($\mathcal{T}$) e *formule* ($\mathcal{F}$):

- $\mathcal{T} = \{5, 7, 3, 2, 3+2, 3+2+2, 5+2\}$
- $\mathcal{F} = \{\text{“}3+2=5\text{”}, \text{“}3+2+2=7\text{”}, \text{“}5+2=7\text{”}\}$

La nostra TS associa un valore semantico $val(t) \in \mathbb{N}$ a ogni termine di $\mathcal{T}$ seguendo la seguente regola: per ogni $t_1, t_2 \in \mathcal{T}$, $val(t_1) = val(t_2)$ se e solo se la formula “$t_1 = t_2$”$\in \mathcal{F}$. La funzione val è chiaramente non iniettiva e induce una relazione $\sim$ di equivalenza su $\mathcal{T}$ la quale a sua volta determina il quoziente $\frac{\mathcal{T}}{\sim} = \{[5], [7], [3], [2]\}$.

Consideriamo adesso un esempio un po' più interessante: vogliamo valutare le formule del linguaggio $\mathcal{L}_{LK}$ del calcolo dei sequenti per la logica classica LK (vd. §A); l'idea è quella di valutare ogni formula derivabile come vera e ogni formula la cui negazione è derivabile come falsa. Definiamo la funzione $val : \mathcal{L}_{LK} \to X$, dove X un qualunque insieme non vuoto, per casi (limitandoci ai connettivi $\wedge$ e $\vee$):

$$val(A) := \begin{cases} a \subset X \text{ qualunque} & \text{se } A \text{ è atomica} \\ \complement val(\neg B) & \text{se } A = \neg B \\ val(B) \cap val(C) & \text{se } A = B \wedge C \\ val(B) \cup val(C) & \text{se } A = B \vee C \end{cases} \tag{1.1.1}$$

Si verifica facilmente che, se A è derivabile logicamente, allora $val(A) = X$, mentre se $\neg A$ è derivabile logicamente, allora $val(A) = \emptyset$. Possiamo dunque considerare l'insieme $\{X, \emptyset\} \subset \wp(X)$ come l'insieme dei valori di verità $\{Vero, Falso\}$. Da queste osservazioni segue chiaramente che la funzione val non è iniettiva: in effetti, due formule logicamente equivalenti avranno lo stesso valore semantico, e in particolare val indurrà il seguente quoziente su $\mathcal{L}_{LK}$:

$$A \sim B \Leftrightarrow \vdash A \leftrightarrow B \text{ è derivabile in } LK \tag{1.1.2}$$

La funzione val ha come risultato quello di dotare l'insieme $\mathcal{F}$ delle formule di $\mathcal{L}_{LK}$, attraverso il quoziente, della struttura di Algebra di Boole ereditata dal reticolo dei sottoinsiemi di X. In questa struttura, nota sotto il nome di *algebra di Lindenbaum-Tarski*, le operazioni algebriche possono essere definite come $[A] \wedge [B] := [A \wedge B], [A] \vee [B] := [A \vee B], \neg[A] := [\neg A]$, e i valori di verità recuperati attraverso le costanti $\mathbf{V} := [A \wedge \neg A], \mathbf{F} := [A \vee \neg A]$, per $A \in \mathcal{F}$ qualsiasi. In tal modo, ci rendiamo conto che le TS riescono, in alcuni casi (come si vedrà nel paragrafo §1.2.3), a farci scoprire interessanti strutture matematiche alle spalle dell' apparentemente arida burocrazia di un linguaggio formale.

Un'altra proprietà molto importante delle TS è quella di essere *composizionali*: questo vuol dire che, se un elemento F di una data categoria sintattica $\mathcal{C}$ è costruito a partire da n elementi $t_1, \ldots, t_n$ di opportune categorie sintattiche $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$, cosa che possiamo scrivere come $F = f(t_1, \ldots, t_n)$, allora il valore semantico $val(F)$ di F, nella categoria semantica $\mathcal{D}$, sarà determinato a partire dai valori semantici, nelle categorie $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$, degli elementi costitutivi di F, in formule $val(F) = g(val(t_1), \ldots, val(t_n))$; prendiamo ad esempio la TS sviluppata da Frege a partire da (Frege, [24]), nella quale la categoria dei valori semantici per gli enunciati (ovvero le formule chiuse di $\mathcal{F}$) comprende il $Vero$ e il $Falso$; possiamo definire così i valori semantici degli enunciati composti:

$$\begin{aligned} val(A \wedge B) &= \begin{cases} Vero & \text{se } val(A) = Vero \text{ e } val(B) = Vero \\ Falso & \text{altrimenti} \end{cases} \\ val(A \vee B) &= \begin{cases} Falso & \text{se } val(A) = Falso \text{ e } val(B) = Falso \\ Vero & \text{altrimenti} \end{cases} \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

Possiamo vedere nella composizionalità una richiesta di commutazione tra le regole di formazione degli elementi delle categorie sintattiche e le regole di attribuzione delle denotazioni, che possiamo rappresentare con il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "val"'] & \mathcal{C} \arrow[d, "val"] \\ \mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n \arrow[r, "g"'] & \mathcal{D} \end{tikzcd} \tag{1.1.4}$$

Nella TS di Frege, sono proprio le regole per l'attribuzione composizionale dei valori semantici agli enunciati a determinare il *senso* non solo di tali enunciati, ma anche dei loro componenti: in breve, quella di Frege è una *semantica delle condizioni di verità*; si noti che termini o enunciati diversi possono avere la stessa denotazione pur differendo nel senso: ad esempio agli enunciati in cui occorrono le stracitate espressioni "stella del mattino" e "stella della sera", sebbene queste si riferiscano alla stessa stella, sono associate condizioni di verità distinte.

Il quoziente semantico Il PdC comporta, come abbiamo visto, una riduzione della questione dell'attribuzione di denotazione ai termini a quella dell'attribuzione di valori di verità agli asserti di identità in cui tali termini occorrono; questa scelta fregeana porta con sè precise conseguenze semantiche ed ontologiche, che possiamo riassumere in quello che, per ragioni che saranno chiare nel seguito, ho scelto di chiamare *principio del*

(quoziente semantico) *La proprietà che individua un oggetto è la possibilità che questo sia la denotazione di un segno (che occorre in opportuni asserti di identità)* (1.1.5)

In base a questo principio, le regole che determinano il senso (le condizioni di verità) delle espressioni del linguaggio, in aggiunta all'uso empirico di queste nella pratica dell'asserzione e del giudizio, sono tutto ciò che serve per stabilire l'insieme delle denotazioni (degli oggetti); tale denotazione è dunque costituita internamente al sistema delle condizioni di verità. In breve, è il gioco del senso a determinare le denotazioni, cosa che sintetizzeremo nella formula:

$$\text{Senso} \overset{\text{determina la}}{\Longrightarrow} \text{Denotazione} \tag{1.1.6}$$

Non si deve quindi pensare che la valutazione degli enunciati, per Frege, consista nel riconoscimento di una qualche corrispondenza, in quanto

> La corrispondenza è una relazione. Ma ciò è contraddetto dal modo d'uso della parola "vero", che non è un termine di relazione e non contiene alcun rimando ad alcunchè d'altro con cui qualcosa dovrebbe concordare. Se non so che una certa immagine deve rappresentare il Duomo di Colonia non so con che cosa dovrei confrontare l'immagine per decidere della sua verità. (Frege, [23])

Non si può parlare di oggetti nel mondo se non attraverso enunciati veri intorno ad essi e non ha senso considerare i fatti nel mondo indipendentemente dagli enunciati veri che li esprimono.

> Il fatto che il sole sia sorto non è un oggetto che emetta raggi che giungono ai miei occhi, non è una cosa visibile come lo è il sole stesso. (Frege, [23])

La componente extralinguistica che la dottrina del senso come dato da condizioni di verità sembra presupporre non è districabile dalla pratica assertoria. Vorrei qui sottolineare che il punto di Frege non è (almeno non direttamente) ontologico, sebbene abbia evidenti implicazioni ontologiche, ma riguarda le condizioni alle quali possiamo affermare di dire davvero qualcosa di sensato, di comunicabile e, in quanto tale, valutabile intersoggettivamente.

L'indispensabilità semantica del realismo E' in effetti caratteristico della *svolta linguistica*, come si è detto, di ricondurre i problemi metafisici a questioni di filosofia del linguaggio: è paradigmatica, in questo senso, la tesi che potremmo chiamare di *indispensabilità semantica del realismo* che Dummett propone, a partire proprio da una scrupolosa analisi del pensiero di Frege:

Realism cannot be characterised in purely metaphysical terms: it essentially involves the semantic notion of denotation, as well as the semantic notions of truth and falsity. (Dummett, [17]) (1.1.7)

Dummett osserva in primo luogo che il realismo di Frege sfugge a definizioni puramente metafisiche o ontologiche: il logico tedesco non si impegna affatto nell'esistenza di tutti gli oggetti attorno ai quali è possibile fornire enunciati dotati di senso, ma ammette ad esempio che esistano espressioni sensate prive di riferimento, o se si vuole, enunciati dotati di condizioni di verità ma privi di denotazione:

> Non potrebbe forse l'enunciato avere solo un senso, ma essere privo di significato [denotazione]? Naturalmente c'è da attendersi che vi siano enunciati privi di significato [denotazione], così come vi sono parti di enunciato che hanno un senso ma sono prive di significato [denotazione]. Quegli enunciati che contengono nomi privi di significato [denotazione] saranno di questo genere. L'enunciato "Odisseo approdò a Itaca immerso in un sonno profondo" ha evidentemente un senso, ma poichè è dubbio che il nome proprio "Odisseo" abbia un significato [denotazione], è anche dubbio che l'intero enunciato abbia un significato [denotazione]. E' certo però che colui che seriamente ritenesse l'enunciato vero o falso, riconoscerebbe anche un significato [denotazione] e non soltanto un senso al nome proprio "Odisseo". [...] Colui che volesse fermarsi al pensiero potrebbe accontentarsi del senso. (Frege, [24])

La strategia di Frege per delimitare il campo di ciò intorno a cui è lecito impegnarsi ontologicamente consiste nel delimitare il campo degli enunciati per i quali si considera valida la *legge di bivalenza*, ossia il principio semantico secondo cui ogni enunciato è determinatamente vero o falso. Questa legge, del resto, è una conseguenza dell'applicazione al dominio di interesse della TS delle condizioni di verità, la quale viene in definitiva a rappresentare il nucleo concettuale del *realismo semantico*, ossia della concezione filosofica della realtà che emerge dalle ricerche di Frege, e che sarà in larga parte influente in tutte le ricerche filosofico-linguistiche successive.

Riferimento e deduzione trascendentale Tornando alla questione del PdC e al conseguente principio 1.1.5 del quoziente semantico, osserviamo che non pare insensato provare a vedere l'idea fregeana di un riferimento determinato internamente in analogia con la dottrina kantiana della *deduzione trascendentale* (vd. (Kant, [46])): per il filosofo di Königsberg, infatti, non è affatto sufficiente affermare che i giudizi, gli enunciati assertori, corrispondano a fatti o stati di cose, in quanto tali giudizi sono possibili in quanto sono il prodotto di funzioni di sintesi, le categorie, le quali non sono e non possono essere direttamente esperite, ma sono piuttosto applicate dal soggetto (nel senso kantiano di "soggetto trascendentale") per rendere l'esperienza possibile: analogamente possiamo affermare che la sintassi di una lingua non è affatto un oggetto di esperienza, ma è quell'insieme di forme astratte che permettono una sintesi combinatoria dei segni, la quale dà luogo a una specifica apertura semantica, ossia a forme complesse e strutturate di riferimento:

> Tuttavia, la *congiunzione* (*conjunctio*) di un molteplice in generale non può mai entrare in noi attraverso i sensi [...] è un atto dell'intelletto, che designeremo con la denominazione generale di *sintesi* per fare così osservare, in pari tempo, che noi non possiamo rappresentarci alcunchè come congiunto nell'oggetto, senza averlo noi stessi congiunto in precedenza [...] (Kant, [46])

Il ruolo che viene dunque attribuito alla TS è quello di mostrare il modo in cui l'uso di una lingua dà luogo a una esperienza linguistica possibile, a un universo di denotazioni entro il quale la pratica assertoria si identifica con una richiesta di valutazioni dotata di senso. Alla TS è chiesto di fare luce sul mondo al quale si impegna di fare riferimento colui che accetta di servirsi di una certa lingua.

In parziale analogia con Jean-Yves Girard (vd. ad esempio Girard, [36]), dirò che qualcosa appartiene alla categoria dell' *implicito* se la possibilità di riferirvisi presuppone il ricorso a strumenti sintattici o, per dirla kantianamente, un'attività di sintesi dell'intelletto; un esempio tipico di implicito è l'infinito discreto, quello che siamo abituati a descrivere con espressioni come $\{1, 2, 3, \dots\}$ in cui la comprensione del senso dei puntini sta tutta in una competenza sintattico-manipolatoria, quella di scrivere cifre denotanti numeri arbitrariamente grandi. Si noti che possiamo descrivere l'infinito discreto in mille altri modi, anche senza il ricorso ai puntini di sospensione, ad esempio con il ricorso a funzioni come la funzione successore, applicabili iterativamente. Questo vuol dire che l'essere un qualcosa di implicito, l'essere legato a regole di manipolazione sintattica, non vuol dire essere legato a una sintassi in particolare.

D'altra parte, dirò che qualcosa appartiene alla categoria dell'*esplicito* se possiamo pensare ad essa senza fare ricorso a nozioni sintattico-combinatorie o più in generale se la sua esistenza è considerata indipendente dal ricorso alle sintassi via via adoperate per riferirvisi. Una pietra, plausibilmente, è esplicita, nel senso che sicuramente la possibilità concreta di riferirsi ad essa è legata a fattori connessi con la lingua che parliamo, il suo lessico e la sua sintassi, ma l'esistenza della pietra non sarebbe certo messa in discussione se la razza umana, le sue lingue, i suoi lessici e tutti i suoi rompicapi filosofici scomparissero improvvisamente o non fossero addirittura mai esistiti. Ci si può chiedere se l'infinità discreta sia, oltre che implicita, anche esplicita. *In un certo senso, questa domanda riassume il senso di tutta la presente tesi ed è legata, come vedremo, alla questione della* trasparenza (vd. §1.1.2).

Kant distingueva nettamente tra le *intuizioni sensibili*, necessariamente individuali, alle quali è garantito un accesso immediato, esplicito, e i *concetti*, sempre comuni, in quanto riproponibili, reiterabili, e sempre soggetti alla spontaneità dell'unità sintetica, ossia all'applicazione delle funzioni categoriali. D'altra parte osservava che

> In realtà, se io volessi pensare un intelletto, esso stesso intuente (per esempio, un intelletto divino, che non si rappresentasse oggetti dati, risultando piuttosto tale, che gli oggetti stessi fossero simultaneamente dati o prodotti della sua rappresentazione), le categorie non avrebbero allora alcun significato rispetto a una tale conoscenza. Esse sono soltanto regole per un intelletto, il cui potere consiste interamente nel pensiero, cioè nell'atto di portare all'unità dell'appercezione la sintesi del molteplice [...] (Kant, [46])

Questa tesi si pone, tra gli altri, l'obbiettivo di tessere una rete concettuale che faccia dialogare alcuni tratti della filosofia kantiana con le prospettive che la ricerca logica apre sul rapporto tra sintassi e semantica, cercando di sviluppare progressivamente il contenuto dell'analogia

$$\text{Sintassi} \approx \text{Unità sintetica}$$

Un tale proposito si ritroverà allora costretto ad affrontare la questione dell'appiattimento dell'implicito sull'esplicito, della sintesi sul suo risultato, dei concetti sulle intuizioni e, in definitiva, della fumosità della sintassi sulla apparente nitidezza del riferimento.

Ci accorgeremo infatti nelle prossime pagine di come non ogni TS è costruita in accordo con il principio 1.1.5 a pagina 9 e dunque con l'impostazione sopra accennata di una determinazione interna dell'universo dei riferimenti possibili, e vedremo come la stessa concezione fregeana vada incontro a seri problemi in virtù dell'esistenza di "modelli non standard".

Il quoziente semiotico Considerare una teoria come le TS che abbiamo descritto finora una teoria genuinamente semantica, nel senso etimologico di teoria riguardante il significato delle espressioni di una lingua, vuol dire considerare l'attribuzione di denotazioni, in una parola, la *valutazione*, una componente decisiva nel caratterizzare la possibilità, per un'espressione di una lingua, di fungere da segno: dietro l'apparente aridità di queste teorie formalizzate è celata una precisa concezione semiotica, che possiamo esprimere, in analogia con il quoziente semantico 1.1.5, così:

(principio del quoziente semiotico) *La proprietà che individua un segno è la possibilità che questo, in virtù del suo senso, sia valutato (nel contesto degli enunciati in cui occorre), ossia abbia una denotazione.*

(1.1.8)

Ciò che distingue la semplice emissione di suoni da un enunciato dotato di senso non può dunque essere alcuna proprietà psicologica, in quanto tanto la prima quanto il secondo possono produrre in noi sensazioni arbitrariamente specifiche e discriminanti, bensì il fatto che l'enunciato esprima un pensiero, il quale nel vocabolario fregeano (vd. (Frege, [23, 24])) indica proprio ciò che è descritto da condizioni di verità, ovvero il senso dell'enunciato; sono le condizioni di verità che fanno sì che, quando parliamo, parliamo di qualcosa.

A partire dal principio del quoziente semiotico, possiamo quindi considerare *soggettivo* tutto ciò che è irrilevante ai fini della valutazione semantica, in quanto questa deve essere concepita come immediatamente pubblica e condivisa, e *oggettivo* ciò che invece, dal punto di vista della valutazione, fa una differenza.

> Non fa differenza per il pensiero se utilizzo la parola "cavallo" o "destriero" o "brocco" o "corsiero". La forza assertoria non si estende a ciò per cui queste parole si differenziano. Quel che in una poesia si può chiamare il tono, la fragranza o gli effetti di luce e ombra, quel che viene reso con la cadenza e il ritmo non appartiene al pensiero. (Frege,[23])

Da una parte stanno dunque tutte le rappresentazioni che possiamo attribuire a un segno ed al suo uso, ma che non hanno nulla a che fare col fatto che quello sia effettivamente un segno (sono cioè soggettive), dall'altra il senso del segno, oggettivo in quanto determinato entro l'orizzonte valutativo e pubblico dell'uso, attraverso la pratica dell'asserzione, della nozione di verità. E' per questo che possiamo parlare di quoziente semiotico: possiamo immaginare di quozientare l'insieme di tutte le reazioni più o meno complesse (percezioni, associazioni, aspettative, emozioni, credenze, ecc.) che accompagnano le nostre pratiche quotidiane, sulla base dell' indistinguibilità relativamente al senso: "cavallo" e "destriero", così come "Luna" e l'immagine retinica che si forma nell'occhio dell'astronomo sono coppie di elementi che appartengono a una stessa classe d'equivalenza di segni, in quanto non c'è alcun modo di separarne le forme di valutazione esplicitabile in termini di condizioni di verità, e più in generale nei termini delle condizioni composizionali di attribuzione di denotazione. L'insieme dei segni è l'insieme di tutto ciò che ha un senso, di tutto ciò che può essere valutato, modulo l'identità delle condizioni di verità.

L'oggettività del senso La TS assume, in definitiva, il ruolo di selezionare, tanto nel disordine che accompagna la quotidianità di una lingua, quanto nella rigidità spesso arbitraria che caratterizza le sintassi formali, ciò che fa davvero una differenza nell'uso pubblico e referenziale del linguaggio. In breve, possiamo affermare quello che chiamerò l'*ideale di Frege*:

$$\text{(Ideale di Frege) } \textit{Il senso è oggettivo} \tag{1.1.9}$$

La nozione di oggettività cui fa riferimento Frege è evidentemente molto più forte di quella di Kant, per il quale la pensabilità stessa di un oggetto come possibile oggetto di esperienza richiede in maniera essenziale il riferimento all'orizzonte trascendentale del soggetto, ovvero all'insieme delle possibilità a cui dà accesso la natura a priori delle forme del pensiero.

> *Oggetto*, peraltro, è ciò nel cui concetto è *riunito* il molteplice di un'intuizione data. Ogni riunione delle rappresentazioni, tuttavia, esige l'unità della coscienza nella sintesi delle medesime. (Kant, [46])

D'altra parte l'oggettività cui aspira il logico tedesco, nel suo tentativo di giustificare le naturali credenze del matematico, viene presentata nella arida forma di una teoria formalizzata per il motivo esattamente opposto, ovvero per eliminare in essa, non solo ogni idiosincrasia di ordine psicologico, (del resto lo stesso Kant, come osserva Capozzi in (Capozzi, [6]), distingueva con cura le rappresentazioni che aspirano all'oggettività della conoscenza, quelle cioè che rispecchiano l'ideale della ragion pura, dai sentimenti i quali contengono esclusivamente la relazione della rappresentazione con il singolo soggetto), ma anche ogni componente che possa essere inclusa nell'a-priori della specificità della relazione tipicamente umana con il mondo.

> Così il pensiero che articoliamo nel teorema di Pitagora è vero atemporalmente, vero indipendentemente dal fatto che qualcuno lo ritenga vero. (Frege, [23])

Che questo ideale fregeano, del quale è stata accennata la portata ontologica e filosofica generale, quello cioè di un senso oggettivo che allo stesso tempo sia sottoposto ai canoni della sintassi, sia realizzabile, sarà il tema dei prossimi paragrafi. Sarà cioè discussa la coerenza interna e le possibili prospettive aperte dall'impostazione che possiamo così riassumere:

$$\textit{Il senso determina la denotazione e presuppone una sintassi} \tag{1.1.10}$$

1.1.2 Modelli e condizioni di verità

In questo paragrafo sarà brevemente richiamata la TS dei modelli, e saranno confrontati alcuni dei caratteri delle concezioni semantiche che si rifanno ad essa con gli aspetti discussi a partire dalla prospettiva di Frege.

La semantica modellistica La teoria semantica di gran lunga più sviluppata ed applicata in vari settori, dalla matematica alla linguistica, è la teoria dei modelli, che sarà ora brevemente richiamata (per i dettagli sulla definizione delle variabili speciali e di linguaggio si rimanda a §A). La definizione di linguaggio che seguiremo si discosta leggermente da quelle classiche nel ricorrere alle cosiddette variabili speciali, che prendono il ruolo di quelle che in genere sono chiamate le "costanti" del linguaggio: l'idea che sta dietro a questa impostazione è quella di far emergere il contenuto logico del ricorso alle "costanti", vale a dire le implicite assunzioni esistenziali e universali connesse con queste: come vedremo meglio in §1.1.3 e, in un quadro radicalmente diverso, in §4.1, le costanti del linguaggio non sono altro che componenti la cui strutturazione interna viene dichiaratamente lasciata nascosta: è solo con il ricorso alle chiusure al secondo ordine o, più astrattamente, con la Geometria dell'Interazione, che è possibile far emergere questi aspetti, i quali rendono le "costanti" piuttosto delle "variabili", seppur non proprio uguali alle altre variabili del linguaggio, e dunque "speciali".

Iniziamo con la prima parte della TS, ossia l'interpretazione:

Definizione 1.1.1 (modello o interpretazione di un linguaggio (del primo ordine) $\mathcal{L}$)**.** *Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio e V l'insieme delle variabili speciali di $\mathcal{L}$. Un* modello*, o* interpretazione*, $\mathcal{M}$ di $\mathcal{L}$ è un sistema di valori semantici per le variabili speciali di V dato da:*

- *un insieme non vuoto, denotato $|\mathcal{M}|$ o più semplicemente M e detto* supporto *di $\mathcal{M}$, il quale costituirà il valore della variabile $X \in \mathcal{V}$;*
- *per ogni variabile speciale individuale c di V, un elemento $c_{\mathcal{M}} \in M$;*
- *per ogni $n \in \mathbb{N}, n > 0$, e per ogni variabile speciale per funzioni n-aria f di $\mathcal{V}$, un'applicazione $f_{\mathcal{M}} : M^n \to M$;*
- *per ogni variabile speciale proposizionale $P \in V$, un elemento $P_{\mathcal{M}} \in Bool = \{0, 1\}$, tale che, se $Q = \neg P$, si ha che il valore $P_{\mathcal{M}} \neq Q_{\mathcal{M}}$;*
- *per ogni $n \in \mathbb{N}, n > 0$ e per ogni variabile speciale per predicati k-aria $R \in V$, un sottoinsieme $R_{\mathcal{M}} \subseteq M^n$ tale che, se $Q = \neg R$, si ha che $Q_{\mathcal{M}} = \complement R_{\mathcal{M}}$.*

Nel seguito adotteremo la seguente convenzione: dato $n \in \mathbb{N}, n > 0$, $t(x_1, \ldots, x_n)$ e $A(x_1, \ldots, x_n)$ rispettivamente termine e formula di un linguaggio $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ modello di $\mathcal{L}$ e $a_1, \ldots, a_n \in M$, le espressioni $t[a_1, \ldots, a_n]$ e $F[a_1, \ldots, a_n]$, ottenute sostituendo contemporaneamente le variabili x_i con gli elementi $a_i \in M$, saranno chiamate rispettivamente *termine* e *formula a parametri in* $\mathcal{M}$.

Passiamo alla seconda parte della TS, ovvero quella concernente la valutazione:

Definizione 1.1.2 (valutazione di termini e formule)**.** *Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio e $\mathcal{M}$ un modello di $\mathcal{L}$. Sia $n \in \mathbb{N}, n > 0$, $t(x_1, \ldots, x_n)$ un termine di $\mathcal{L}$, $A(x_1, \ldots, x_n)$ una formula di $\mathcal{L}$ e $a_1, \ldots, a_n \in M$. Definiamo induttivamente la valutazione $t_{\mathcal{M}}[a_1, \ldots, a_n]$ di $t(x_1, \ldots, x_n)$ e $A_{\mathcal{M}}[a_1, \ldots, a_n]$ di $A(x_1, \ldots, x_n)$:*

Termini
- *se $t = x_i$, con $1 \leq i \leq n$, allora $t_{\mathcal{M}}[a_1, \ldots, a_n] := a_i$;*
- *se $t = c$, con c variabile speciale individuale, allora $t_{\mathcal{M}}[a_1, \ldots, a_n] := c_{\mathcal{M}}$;*
- *se $t = f(t_1, \ldots, t_k)$, con f variabile speciale per funzione k-aria e $k \in \mathbb{N}, k > 0$, allora $t_{\mathcal{M}}[a_1, \ldots, a_n] := f_{\mathcal{M}}(t_{1_{\mathcal{M}}}[a_1, \ldots, a_n], \ldots, t_{k_{\mathcal{M}}}[a_1, \ldots, a_n])$.*

Formule *La valutazione $A_{\mathcal{M}}[a_1, \ldots, a_n]$ di $A(x_1, \ldots, x_n)$ sarà definita attraverso la nozione di soddisfazione di $A[a_1, \ldots, a_n]$ da parte di $\mathcal{M}$, che scriveremo $\mathcal{M} \vDash A[a_1, \ldots, a_n]$:*

- *se $A = \mathbf{V}$ ($A = \mathbf{F}$), allora $\mathcal{M} \vDash A[a_1, \ldots, a_n]$ ($\mathcal{M} \nvDash A[a_1, \ldots, a_n]$);*
- *se $A = P$ è una variabile speciale proposizionale, allora $\mathcal{M} \vDash A[a_1, \ldots, a_n]$ se e solo se $P_{\mathcal{M}} = 1$;*

- *se* $k \in \mathbb{N}, k > 0$ *e* $A = R(t_1, \ldots, t_k)$*, dove* R *è una variabile speciale per predicati* k*-aria e* $t_i = t_i(x_1, \ldots, x_n)$*, allora*
  $\mathcal{M} \vDash A[a_1, \ldots, a_n] \Leftrightarrow (t_{1_\mathcal{M}}[a_1, \ldots, a_n], \ldots, t_{k_\mathcal{M}}[a_1, \ldots, a_n]) \in R_\mathcal{M}$*;*
- *se* $A = B \wedge C$*, allora* $\mathcal{M} \vDash A[a_1, \ldots, a_n]$ *se e solo se* $\mathcal{M} \vDash B[a_1, \ldots, a_n]$ *e* $\mathcal{M} \vDash C[a_1, \ldots, a_n]$*;*
- *se* $A = B \vee C$*, allora* $\mathcal{M} \vDash A[a_1, \ldots, a_n]$ *se e solo se* $\mathcal{M} \vDash B[a_1, \ldots, a_n]$ *o* $\mathcal{M} \vDash C[a_1, \ldots, a_n]$*;*
- *se* $A = \forall x B$*, con* $x \notin \{x_1, \ldots, x_n\}$*, allora* $\mathcal{M} \vDash A[a_1, \ldots, a_n]$ *se e solo se per ogni* $a \in M$*,* $\mathcal{M} \vDash B[a, a_1, \ldots, a_n]$*;*
- *se* $A = \exists x B$*, con* $x \notin \{x_1, \ldots, x_n\}$*, allora* $\mathcal{M} \vDash A[a_1, \ldots, a_n]$ *se e solo se per un certo* $a \in M$*,* $\mathcal{M} \vDash B[a, a_1, \ldots, a_n]$*.*

Per *teoria* intenderemo un insieme di formule chiuse, ovvero di enunciati, di un dato linguaggio, e diremo che una teoria T di $\mathcal{L}$ è *soddisfacibile* se esiste un modello $\mathcal{M}$ di $\mathcal{L}$ tale che, per ogni $A \in T$, si ha $\mathcal{M} \vDash A$. Una teoria è detta *deduttivamente chiusa*, brevemente *d.c.*, se per ogni $A_1, \ldots, A_n \in T$, se $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ è derivabile in LK, allora $B \in T$. Si noti come la nozione molto generale di teoria d.c. che abbiamo dato non corrisponde affatto a quella di sistema deduttivo o sintassi formale cui abbiamo fatto riferimento nel paragrafo precedente. Possiamo quindi parlare, per le teorie così definite, di "teorie linguistiche", nel senso di definite facendo (esclusivamente, nel caso non d.c.) riferimento al linguaggio.

Definizione 1.1.3 (omomorfismo e isomorfismo di modelli)**.** *Siano* $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ *due modelli di un linguaggio* $\mathcal{L}$*. Un* omomorfismo *di* $\mathcal{M}$ *in* $\mathcal{N}$ *è una applicazione* $\varphi : M \to N$ *tale che:*

- $c \in \mathcal{L}$ *variabile speciale individuale* $\Rightarrow \varphi(c_\mathcal{M}) = c_\mathcal{N}$*;*
- $k \in \mathbb{N}, k > 0$*,* $f \in \mathcal{L}$ *variabile speciale per funzione* k*-aria e* $a_1, \ldots, a_k \in M$ $\Rightarrow \varphi(f_\mathcal{M}(a_1, \ldots, a_k)) = f_\mathcal{N}(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_k))$*;*
- X *variabile speciale proposizionale* $\Rightarrow \varphi(X_\mathcal{M}) = X_\mathcal{N}$*;*
- $k \in \mathbb{N}, k > 0$*,* $R \in \mathcal{L}$ *variabile speciale per predicati* n*-aria* $\Rightarrow ((a_1, \ldots, a_k) \in R_\mathcal{M} \Leftrightarrow (\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_k)) \in R_\mathcal{N})$*.*

Un isomorfismo *di* $\mathcal{M}$ *in* $\mathcal{N}$*, che verrà indicato* $\mathcal{M} \simeq \mathcal{N}$*, è un omomorfismo tale che* φ *sia bijettiva.*

Quella che è stata rapidamente descritta è una TS per il linguaggio di LK, anch'essa incentrata sulla descrizione di condizioni di verità, attraverso lo strumento delle condizioni di soddisfacibilità, la quale d'altra parte si discosta dall'impostazione fregeana nel considerare la denotazione come determinata a partire da strutture *esterne* al linguaggio: i modelli sono, per così dire, realtà già strutturate, dotate cioè di una propria combinatoria, quella insiemistica, che non a caso, attraverso le condizioni di verità, si rivela commutare con quella della sintassi di LK (si pensi all'algebra di Lindenbaum-Tarski come algebra di Boole). In effetti, il teorema fondamentale per questa TS è il seguente:

Teorema 1.1.1 (correttezza e completezza)**.** *La TS dei modelli è corretta e completa per LK, ovvero si ha che, dato un linguaggio $\mathcal{L}$ di LK e una formula chiusa $A \in \mathcal{L}$, $\vdash A$ è derivabile in LK se e solo se per ogni modello $\mathcal{M}$ di $\mathcal{L}$, $\mathcal{M} \vDash A$.*

La dimostrazione di questo teorema è, per la parte della correttezza, omessa (si tratta di una semplice verifica per induzione), mentre per la parte più rilevante, quella della completezza, sarà affrontata in §1.2.1.

Al teorema di correttezza e completezza si accosta il seguente:

Teorema 1.1.2 (completezza forte)**.** *Dato un linguaggio $\mathcal{L}$ e una teoria T d.c. di $\mathcal{L}$; allora si ha che, per ogni formula chiusa $A \in \mathcal{L}$, $A \in T$ se e solo se ogni modello di $\mathcal{L}$ che soddisfa T soddisfa A.*

Dimostrazione. vd. §B. □

La conseguenza più importante della completezza è la possibilità di usare i modelli come refutazioni, dal momento che, in virtù del teorema di correttezza, ogni volta che esiste un contromodello di una formula, la formula non sarà derivabile in LK e, per il teorema di completezza, ogni volta che una formula non è derivabile in LK, ammetterà un contromodello. Vale a dire, il teorema istituisce una sorta di *dualità* tra derivazioni di LK e contromodelli, ma questo aspetto sarà messo in luce più avanti (vd. §1.2.1).

La conseguenza del teorema 1.1.1 che più ci interesserà di qui a breve è quella che chiameremo *proprietà di separazione* dei modelli: date due teorie linguistiche distinte T e T' (non necessariamente d.c.), se sono entrambe coerenti, e dunque ammettono un modello, allora esiste un modello di T che non è modello di T' (a rigore, si dovrebbe dire che esiste un modello del linguaggio $\mathcal{L}$ di entrambe che soddisfa una ma non soddisfa l'altra). Esiste cioè almeno un modello che le separa. Più precisamente, date due teorie linguistiche T, T' di un linguaggio $\mathcal{L}$, entrambe coerenti, possiamo affermare che:

- $T = T'$ se e solo se per ogni modello $\mathcal{M}$ di $\mathcal{L}$, si ha $\mathcal{M} \vDash T \Leftrightarrow \mathcal{M} \vDash T'$;
- $T \neq T'$ se e solo se esiste un modello $\mathcal{M}$ di $\mathcal{L}$, tale che $\mathcal{M} \vDash T$ e $\mathcal{M} \nvDash T'$.

In questo modo la TS dei modelli, oltre a individuare le componenti rilevanti della sintassi logica, quelle cioè cui è associata una denotazione insiemistica, discrimina anche tra teorie linguistiche diverse: questo ci porta a postulare che

teorie diverse (in uno stesso linguaggio) sono oggettivamente *diverse* (1.1.11)

in quanto la differenza tra esse è rilevata al livello delle possibili interpretazioni e valutazioni della teoria. Ha senso dunque dire che una formula chiusa $A \in \mathcal{L}$ è una *conseguenza logica*, che scriveremo $T \vDash A$, di una teoria linguistica T quando ogni modello di T soddisfa A.

Una teoria T (in un dato linguaggio $\mathcal{L}$) è *completa* quando, per ogni formula A di $\mathcal{L}$, si ha $A \in T$ o $\neg A \in T$. Possiamo dimostrare la seguente (ovvia) proposizione:

Proposizione 1.1.3. *Una teoria T in un dato linguaggio $\mathcal{L}$ è completa se e solo se tutti i modelli $\mathcal{M}$ di $\mathcal{L}$ che soddisfano T sono* elementarmente equivalenti*, ossia soddisfano esattamente le stesso formule di $\mathcal{L}$.*

Dimostrazione. Se T è completa, e se $A \in \mathcal{L}$, allora una tra A e $\neg A$ è in T, e dunque ogni modello la soddisfa. Se invece i modelli sono tutti elementarmente equivalenti e T per assurdo non fosse completa, ci sarebbe una formula A tale che ogni modello di T soddisfa A e A non è in T, in contraddizione con il teorema di completezza forte. $\square$

Si noti anzitutto che l'elementare equivalenza di due modelli non corrisponde al ben più forte isomorfismo tra essi, in quanto la prima è una nozione *relativa* all'interpretazione di un linguaggio in tali modelli, mentre la seconda si rivolge piuttosto all'intera struttura del modello, intesa insiemisticamente. Attraverso i risultati appena esposti possiamo parlare di due diversi tipi di teorie: chiamiamo *strutturali* quelle teorie d.c. che identificano una classe di modelli aventi una certa struttura, come ad esempio la teoria dei gruppi, la teoria degli anelli, la teoria dei grafi ecc. Si tratta evidentemente di teorie incomplete, ma questo non è interessante perchè l'unica completezza che le riguarda è quella che sicuramente hanno in virtù del teorema di completezza forte: ogni loro conseguenza logica è in esse. D'altra parte chiamiamo *a pretesa categorica* quelle teorie d.c. nello studiare le quali siamo interessati a provare che sono complete (cioè che tutti i modelli sono elementarmente equivalenti) o che sono *categoriche*, ovvero che tutti i loro modelli sono isomorfi.

In realtà, come vedremo più avanti (vd. §1.1.4), non esistono teorie di un linguaggio del primo ordine categoriche, e questo risultato non banale sarà ricco di conseguenze.

Modelli e realtà L'idea di una teoria espressa nel *linguaggio della logica* (quello di LK) che caratterizzi un ben determinato modello si è rivelata molto seducente agli occhi dei filosofi del linguaggio e della matematica: lo sviluppo della teoria dei modelli è stato in effetti storicamente alla base della rinascita di un interesse genuinamente ontologico; del resto, laddove la semantica di ispirazione fregeana era ispirata dal principio

$$\text{Senso} \overset{\text{determina la}}{\Longrightarrow} \text{Denotazione} \tag{1.1.12}$$

questa TS sembra essere piuttosto ispirata al principio opposto

$$\text{Senso} \overset{\text{determina la}}{\Longleftarrow} \text{Denotazione} \tag{1.1.13}$$

ovvero al tentativo di ricostruire e giustificare l'oggettività del senso a partire dalle condizioni che permettono a una lingua di avere un riferimento oggettivo. Secondo questa prospettiva, che ha avuto notevoli sviluppi e applicazioni anche nel campo della semantica dei linguaggi naturali (si vedano ad esempio (Lewis, [50]) e (Montague, [67])), il senso di un'espressione linguistica è determinato dalle condizioni che fanno sì che tale espressione si riferisca a fatti o stati di cose; scrive ad esempio Lewis:

> Distinguo due cose: la prima è la descrizione di possibili lingue o grammatiche come sistemi astratti grazie a cui i simboli vengono associati ad aspetti del mondo; la seconda è la descrizione dei fatti psicologici e sociologici per cui uno in particolare fra questi sistemi semantici astratti è quello usato da una persona o da una popolazione. Mescolando queste due cose si ottiene solo confusione. (Lewis, [50], traduzione di Ugo Volli)

Il richiamo a Frege è evidente, anche se in queste teorie il modello adottato per l'interpretazione viene ad assumere il ruolo del "mondo esterno", costituito di oggetti, proprietà e fatti cui gli enunciati veri corrispondono: siamo in piena teoria corrispondentista della verità, ossia in pieno disaccordo col principio del quoziente semantico di Frege (1.1.5, pag. 9). Si tratta di una prospettiva cosiddetta esternalista, ovvero secondo la quale il modo in cui al mondo capita (contingentemente) di essere contribuisce a determinare il senso dei termini del linguaggio, in quanto questo è caratterizzato da come si riferisce alla realtà, compatibilmente con la sua struttura sintattica (composizionalità); in breve, è la denotazione (contingente) che determina il senso. Si noti che questa posizione non è in contrasto col fregeano principio (1.1.8, pag. 12) del quoziente semiotico: un segno è individuato dal fatto di riferirsi ad un "aspetto del mondo", e dunque dalla possibilità di valutare la corretta assegnazione ad esso della sua denotazione. Anche per il sostenitore dell'indirizzo modellistico ha senso dunque considerare soggettivo ciò che è escluso dalla valutazione semantica e oggettivo ciò che invece un ruolo in essa ce l'ha. Se si considera inoltre che, per come è definito un modello, è facile far vedere che in esso vale la *legge di bivalenza*, ossia che per ogni $A \in \mathcal{L}$ formula chiusa, si ha $\mathcal{M} \models A$ oppure $\mathcal{M} \models \neg A$, si può osservare che il programma di ricerca della semantica modellistica risulta in fondo anch'esso motivato dalla svolta linguistica di Frege e da quello che abbiamo chiamato l' *ideale di Frege* (1.1.9, pag. 13), ossia la caratterizzazione di un senso oggettivo.

Secondo questa linea, le nozioni semantiche della teoria dei modelli costituiscono una rappresentazione matematica astratta del riferimento delle espressioni linguistiche alla realtà: ad esempio, si potrebbe pensare che la nozione di soddisfacimento *sopravvenga* a una relazione causale che lega un oggetto o un fatto all'uso che una comunità fa di un certo enunciato, cosicchè conoscere il senso di tali espressioni viene a coincidere con il sapere il modo con cui queste sono legate ai fatti del mondo. E' questo il contenuto delle cosiddette *teorie causali del riferimento* (si veda, ad esempio, (Kripke, [48])).

Va osservato come queste concezioni del significato sono caratterizzate da una sorta di immunità rispetto ad ogni argomento di tipo epistemologico; ad esempio, come osserva Dummett, noto per la sua posizione fortemente critica nei confronti di queste prospettive:

> An adherent of a truth-conditional meaning-theory may, indeed, claim that it is possible for someone to know the meaning of a sentence without knowing how we are able to recognise it as true [...]. What makes this possible is that our means of recognising the statement as true is not for him a *part* of its meaning; the meaning is not given to us in terms of that. (Dummett, [17])

Il senso di un espressione è determinato indipendentemente dalle possibilità concrete che un parlante ha di avere accesso alle condizioni che lo caratterizzano, in quanto tali condizioni sono determinate dalla storia collettiva che lega gli individui di una comunità all'ambiente che li ospita. In tal modo si può dire che ciò che costituisce questa concezione è la tesi che il senso comprenda in ogni caso una irriducibile componente *indessicale* (vd. (Putnam, [61])), ossia di riferimento "puro", o *esplicito* a condizioni che non sono cognitivamente disponibili, ma che sono idealmente ricostruibili attraverso la nozione di soddisfacibilità in un modello. Si noti la netta impostazione anti-kantiana insita nell'idea di un riferimento il quale, sebbene richieda il ricorso alla sintassi dei modelli e, in ultima analisi, a quella di LK per essere formulato, viene concepito come riducibile a condizioni indipendenti da questa, ossia ad esempio alla storia del rapporto tra una comunità ed il suo ambiente. E' questa una delle forme di quella che, sempre in analogia con Girard (Girard, [42]), chiamerò *tesi della trasparenza*, ossia la tesi secondo cui ciò che appare implicito, in quanto descrivibile solo con l'ausilio di una sintassi, è riducibile a condizioni indipendenti da essa: schematizzando,

$$\text{Implicito} \overset{\text{indessicalità}}{\subseteq} \text{Esplicito} \tag{1.1.14}$$

L'esistenza di una teoria matematica del riferimento a un entità indipendente dal linguaggio quale il modello di una teoria a pretesa categorica, in virtù del teorema 1.1.1, è dunque eretta a fondamento di una connessione tra la giustificazione della credenza in una realtà in sè strutturata e una teoria logica che esprime esattamente, *nei termini di una sintassi oggettiva* (quella di LK) la struttura di tale realtà.

1.1.3 Senso e sintassi

In questo paragrafo, a partire da un noto argomento di Dummett rivolto agli approcci vero-condizionali al senso linguistico, sarà delineato un percorso il cui punto di partenza è il riconoscimento che i requisiti posti dallo stesso Dummett per la "non circolarità" della descrizione del senso corrispondono a quelli necessari per una traduzione formale di tale descrizione in un sistema deduttivo. Mediante lo strumento noto come "aritmetizzazione" o anche "gödelizzazione", presenteremo una traduzione aritmetica di tali criteri e infine, ricorrendo ai "teoremi di Dedekind", una traduzione nel vocabolario della pura logica. In particolare, questi risultati indurranno una interessante caratterizzazione logica del primo teorema di incompletezza di Gödel e della proprietà "essere descrivibile all'interno di una sintassi formale". In definitiva, molte delle nozioni "meta-logiche" sin qui adoperate saranno descritte all'interno della logica stessa.

L'argomento della trascendenza Si è detto di come la concezione del senso che emerge dalla teoria dei modelli sia costruita in maniera tale da godere di una "immunità epistemologica": nel momento in cui il senso è considerato indipendente dalla *comprensione*, ossia dalla conoscenza che (anche in condizioni idealizzate) è possibile formarsi di esso, nessun argomento volto a mostrare la trascendenza del senso rispetto alle possibilità idealizzate di comprensione dovrebbe essere preso in seria considerazione.

In più luoghi (Dummett, [15, 17]), tuttavia, Dummett presenta un argomento generale volto a mostrare la problematicità di tale trascendenza del senso rispetto alla comprensione richiesta dall'approccio vero-condizionale; il suo argomento si rivolge tanto alla concezione modellistica, quanto alla concezione di Frege: il logico tedesco in più luoghi (Frege, [21, 23]) parla del senso come di un qualcosa che può essere *afferrato*, pur rispettando i requisiti di oggettività che gli sono imposti. La tesi di Dummett è che l'approccio basato sulle condizioni di verità sia incompatibile con questa trascendenza e che quest'ultima, d'altra parte, sia incompatibile con i requisiti minimi di una teoria semantica; ecco come il filosofo britannico riassume il suo argomento:

> If the principle of bivalence holds, there will be sentences of our language that will be true even though we are not capable of knowing them to be true. It is impossible that, for every such sentence, a knowledge of the condition which must obtain for it to be true can be explained as explicit knowledge, that is, as an ability to *state* that condition in other words. But, since a knowledge of the condition for the truth of the sentence will trascend the capacities we have for recognising it as true in special cases, it follows that we cannot, without circularity, exhaustively explain, in terms of its actual manifestations, in what a knowledge of that condition consists. (Dummett, [17])

Due importanti premesse di una corretta teoria del senso, a parere di Dummett, sono quelle che potremmo chiamare *principio della comprensione* e *requisito di manifestabilità*: il primo asserisce che, se il senso di un enunciato costituisce ciò che caratterizza la comprensione che un parlante, attraverso la sua partecipazione alle pratiche di una comunità linguistica, può formarsi di quell'enunciato, tale senso deve, almeno in linea di principio, essere conoscibile; il punto qui non è tanto la questione epistemologica che il senso deve essere conoscibile perchè altrimenti non potremmo giustificarne l'esistenza, quanto il problema genuinamente linguistico che, se il senso fosse inconoscibile, non potremmo in alcun modo giustificare il fatto che dei parlanti di una data lingua possano comprendersi l'un l'altro, dal momento che le condizioni che assicurano che essi attribuiscano alle loro parole il medesimo senso sono a priori considerate inaccessibili. Ciò che la trascendenza minaccia è la la pubblicità e intersoggettività del senso stesso, e con esse la tesi secondo cui esso possa essere determinato dalle procedure di reciproco riconoscimento che si attuano tra i parlanti di una comunità linguistica.

Una teoria del senso deve essere dunque intesa, secondo Dummett, come una teoria della conoscenza di una lingua che un parlante può arrivare a padroneggiare. Il *requisito di manifestabilità* richiede che, se il senso deve essere conoscibile e, se questo deve essere concepito come pubblico, allora un essere umano (un neonato, uno straniero), che venga introdotto nella comunità dei parlanti nativi di una certa lingua, deve essere messo in condizione di acquisire la padronanza della lingua attraverso le sue manifestazioni nelle pratiche osservabili dei parlanti. Si possono distinguere essenzialmente due tipologie di manifestazioni:

(*i*) Manifestazioni esplicite*: riguardano l'uso di espressioni come nomi propri o predicati il cui insegnamento è generalmente fornito in forma ostensiva.*

(*ii*) Manifestazioni implicite*: riguardano l'uso di espressioni per imparare a usare le quali è necessario saper produrre e riconoscere opportune* procedure.

L'aspetto decisivo del requisito di manifestabilità riguarda le (*ii*): è rispetto a queste che si pone il vero problema intorno all'acquisibilità della conoscenza del senso delle espressioni coinvolte, in quanto non c'è a priori la garanzia che la padronanza del linguaggio necessaria per essere introdotti all'uso di una data procedura non presupponga già quella conoscenza che tale introduzione dovrebbe produrre nell'individuo che sta imparando la lingua:

> As a very general formulation, to which everybody could agree, one might say that a circular explanation is any that invokes a capacity on the part of the speaker which cannot intelligibly be ascribed to him in advance of his knowing the language. (Dummett, [17])

La descrizione delle procedure ammesse da una certa lingua come manifestazioni del senso dei suoi enunciati deve poter essere fornita in modo da non produrre circolarità come quella accennata che renderebbero, a parere di Dummett, impossibile un apprendimento cumulativo della lingua stessa da parte di un neonato o di uno straniero.

Se andiamo a vedere le condizioni di verità della TS modellistica, questo tratto della circolarità cui fa riferimento Dummett emerge con chiarezza: la condizione perchè un enunciato della forma $\forall xA$ sia vero in un modello $\mathcal{M}$ è che *per ogni* $a \in M$, valga $\mathcal{M} \vDash A[a]$, e dunque la procedura che permette di verificare se una formula universale è vera presuppone la capacità di verificare la verità di formule universali. Si può vedere come questo esempio sia estendibile alle condizioni di verità associate a tutte le costanti logiche. Prawitz fa delle osservazioni analoghe riguardo al trattamento riservato dalla TS dei modelli alla nozione di conseguenza logica:

> Che per esempio un enunciato $\exists x \neg P(x)$ segua logicamente da un enunciato $\neg \forall x P(x)$, secondo questa definizione, dipende dal fatto che $\exists x \neg P(x)$ sia vero in ogni modello (D, S) nel quale è vero $\neg \forall x P(x)$. E ancora questa è la medesima cosa che chiedersi se esiste un elemento e in D che non appartiene a S ogniqualvolta non si ha che ogni e in D appartenga a S, ossia ritorniamo al problema se $\exists x \neg P(x)$ segue da $\neg \forall x P(x)$. (Prawitz, [58])

Non si deve del resto confondere la circolarità di cui parla Dummett con la circolarità viziosa, nel senso dell'inclusione del *definiens* nel *definiendum*, e si deve inoltre osservare (vd. Tarski, [66]) che colui che propose per primo la teoria modellistica, ossia Alfred Tarski, non era affatto interessato a considerare questa una teoria del senso degli enunciati di un linguaggio.

Manifestabilità e aritmetizzazione D'altra parte, nella sintassi di LK, in virtù del teorema 1.2.1 di *eliminazione del taglio* (vd §1.2.1), un enunciato universale della forma $\forall xA$ è derivabile *senza tagli* esattamente quando è derivabile un enunciato *non universale* della forma A nel quale la variabile x non occorre legata. Due aspetti sono qui rilevanti:

- Il teorema 1.2.1 assicura che ci si possa restringere a derivazioni senza tagli;

- tali derivazioni soddisfano la cosiddetta *proprietà della sottoformula*, in virtù della quale, in una derivazione senza tagli di LK, le occorrrenze di formula in ogni sequente premessa (di una regola di LK) sono sottoformule (al più banali nel caso dell'indebolimento) delle occorrenze di formula nel sequente conclusione (di quella regola): in breve, rileggendo la derivazione dal basso verso l'alto, la complessità delle formule diminuisce strettamente.

In realtà questi due aspetti sono direttamente connessi, nel senso che il secondo è una condizione necessaria per il primo: in effetti ciò che rende possibile la dimostrazione del teorema di eliminazione del taglio per LK è il fatto che si possa assegnare a ogni derivazione π una grandezza $g(\pi)$, ossia essenzialmente un ordinale tale che, se $\pi \rightsquigarrow \pi'$ tramite eliminazione del taglio, allora si ha $g(\pi') < g(\pi)$. In tal modo la dimostrazione del teorema assume la forma di un'*induzione transfinita*. In (Schwichtenberg, Troelstra, [68]), ad esempio, la dimostrazione del teorema è basata su un argomento induttivo costruito a partire dalle sulle seguenti definizioni:

Definizione 1.1.4 (rango di una formula). *Sia A una formula di un linguaggio $\mathcal{L}$ per LK. Il* rango $rg(A) \in \mathbb{N}$ *di A è definito induttivamente come segue:*

- *se A è atomica o è una costante logica* 0*-aria,* $rg(A) = 0$*;*
- *se* $A = B \wedge C, B \vee C$*, allora* $rg(A) = max\{rg(B), rg(C)\} + 1$*;*
- *se* $A = \forall xB, \exists xB$*, allora* $rg(A) = rg(B) + 1$.

Definizione 1.1.5 (profondità di una derivazione). *Sia π una derivazione di LK; la profondità* $pr(\pi) \in \mathbb{N}$ *è definita induttivamente come segue:*

se π è costituita da una regola 0*-aria (regola assioma), allora* $pr(\pi) = 0$*;*

se π è costituita dall'applicazione di una regola 1*-aria a una sottoderivazione π', allora* $pr(\pi) = pr(\pi') + 1$*;*

se π è costituita dall'applicazione di una regola binaria a due sottoderivazioni π_1, π_2, allora $pr(\pi) = pr(\pi_1) + pr(\pi_2) + 1$.

Consideriamo la coppia $(cr(\pi), lev(\pi))$ ordinata lessicograficamente, in cui $cr(\pi) \in \mathbb{N}$ detto *rango di taglio* della derivazione π è il massimo dei ranghi delle formule di taglio che occorrono in π, mentre $lev(\pi) \in \mathbb{N}$, detto *livello delle formule di taglio di π*, è definito come il massimo delle profondità delle sottoderivazioni di π che hanno conclusione un sequente in cui occorre una formula di taglio. L'ordine lessicografico $\prec$ induce un isomorfismo $\{(n, m) | n, m \in \mathbb{N}\} \simeq \omega + \omega$, e dunque possiamo parlare di induzione su ordinali: in effetti la dimostrazione del teorema consiste nel mostrare che, se $\pi \rightsquigarrow \pi'$, allora $(cr(\pi), lev(\pi)) \prec (cr(\pi'), lev(\pi'))$. Nel caso 1.1.15, ad esempio, supponendo che la sottoderivazione π' che ha conclusione $A \wedge B$ sia tale che $pr(\pi') = lev(\pi)$, si vede che $(cr(\pi), lev(\pi)) \prec (cr(\pi) - 1, lev(\pi)) = (cr(\pi'), lev(\pi'))$, ossia diminuisce il rango di taglio:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots\ \pi_1^0}{\vdash \Gamma_0, A} \quad \dfrac{\vdots\ \pi_1^1}{\vdash \Gamma_1, B}}{\vdash \Gamma, A \wedge B} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots\ \pi_2}{\vdash \neg A, \neg B, \Delta}}{\vdash \neg A \vee \neg B, \Delta}}{\vdash \Gamma, \Delta}\, cut \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\dfrac{\vdots\ \pi_1^1}{\vdash \Gamma_1, B} \quad \dfrac{\dfrac{\vdots\ \pi_1^0}{\vdash \Gamma_0, A} \quad \dfrac{\vdots\ \pi_2}{\vdash \neg A, \neg B, \Delta}}{\vdash \Gamma_0, \neg B, \Delta}\, cut}{\vdash \Gamma, \Delta}\, cut \tag{1.1.15}$$

Nel caso 1.1.16, invece, supponendo che la sottoderivazione π' che ha conclusione A sia tale che $pr(\pi') = lev(\pi)$,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots\ \pi_1}{\vdash \Gamma', A}}{\vdash \Gamma, A}\,(\vee) \quad \dfrac{\vdots\ \pi_2}{\vdash \Delta, \neg A}}{\vdash \Gamma, \Delta}\, cut \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots\ \pi_1}{\vdash \Gamma', A} \quad \dfrac{\vdots\ \pi_2}{\vdash \Delta, \neg A}}{\vdash \Gamma', \Delta}\, cut}{\vdash \Gamma, \Delta}\,(\vee) \tag{1.1.16}$$

abbiamo $(cr(\pi), lev(\pi)) \prec (cr(\pi), lev(\pi) - 1) = (cr(\pi'), lev(\pi'))$, ossia diminuisce il livello.

Possiamo pensare alle grandezze del tipo della $(cr(\pi), lev(\pi))$ come ad una misura ordinale della complessità delle derivazioni; la proprietà della sottoformula, che è un corollario del teorema di eliminazione del taglio, diviene così il semplice riconoscimento del fatto che una derivazione senza tagli di un sequente è, relativamente alla complessità misurata dalla nostra grandezza ordinale, la più semplice possibile. E' facile immaginare come un calcolo dei sequenti in cui non sia possibile introdurre alcuna nozione di "derivazione il più semplice possibile", ossia in cui non valga niente di simile alla sottoformula, non possa ammettere una procedura convergente di eliminazione del taglio.

In generale possiamo dunque dire che le condizioni di derivabilità nel calcolo dei sequenti, che per quanto necessario a questa discussione possiamo considerare un formalismo sufficientemente potente per esprimere ogni sintassi formale (non necessariamente nel linguaggio di LK come vedremo!), soddisfano il requisito dummettiano di non-circolarità quando è possibile mostrare che le regole inducono una nozione di "derivazione canonica", ossia quando è possibile immaginare di buon ordinare le derivazioni che si susseguono durante l'eliminazione del taglio. Stiamo cioè proponendo, nell'ambito della logica, l'identificazione

$$\text{manifestabilità} \approx \text{normalizzazione (forte)} \tag{1.1.17}$$

dal momento che la proprietà della normalizzazione forte corrisponde proprio alla terminazione delle procedure di eliminazione del taglio.

D'altra parte, se $\mathcal{S}$ è un sistema deduttivo nel calcolo dei sequenti (vd. §A) che soddisfa la normalizzazione forte, allora sarà in generale possibile *aritmetizzarlo*: consideriamo infatti $\alpha_k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, k > 0$, $\beta_k^i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, 0 < i \leq k$ funzioni ricorsive tali che $\beta_k^i(\alpha_k(n_1, \ldots, n_k)) = n_i$ (le α_k sono cioè invertibili). Non è difficile convincersi che tali funzioni esistano: ad esempio, definendo $\alpha_2(n, m) = 1/2(n + m)(n + m + 1) + m$, si costruisce una enumerazione di $\mathbb{N}^2$ basata sulle diagonali del piano cartesiano, ossia le rette $n+m = costante$. $\beta_2^i(n)$ può essere definita con una minimalizzazione limitata ed una quantificazione esistenziale limitata (che sono sicuramente ricorsive primitive) come $\beta_2^1(n) = \mu z \le n(\exists t \le x(\alpha_2(t,z) = x))$ e $\beta_2^2(n) = \mu z \le n(\exists t \le x(\alpha_2(z,t) = x))$. A questo punto si pone $\alpha_{k+1} = \alpha_2(n, \alpha_k(n_1, \dots, n_k))$ e si ricostruiscono di conseguenza le β_{k+1}^i.

Le funzioni α_k e β_k^i permettono di costruire una *codifica* dei termini, delle formule, dei sequenti e delle derivazioni di $\mathcal{S}$.Con le notazioni di §A, mostriamo come sia possibile (modulo alcune assunzioni utilizzate per semplificare la presentazione) costruire una tale codifica:

Definizione 1.1.6 (codifica dei termini)**.** *Sia $\mathcal{L}_V$ un linguaggio di insieme di variabili speciali V e supponiamo, per semplicità, che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'insieme $\mathbf{Fun}_V^n = \{f^n \in V | f^n$ è di tipo $X^{X^n}\}$ ($\mathbf{Fun}_V^0$ non è altro che l'insieme delle variabili speciali individuali) sia numerabile, ed inoltre che esista un $N \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \ge N$, $\mathbf{Fun}_V^n = \emptyset$ (queste assunzioni sono soddisfatte da tutti i linguaggi adoperati concretamente nella logica).*

Fissiamo dunque, per ogni n, un'enumerazione $(f_i^n)_{i\in\mathbb{N}}$ degli elementi di $\mathbf{Fun}_V^n$. La codifica $\sharp t$ dei termini $t \in \mathcal{L}_V$ è allora definita come segue:

- *se $t = f_i^0 = x_i \in \mathbf{Fun}_V^0$, allora definiamo*

$$\sharp t := \alpha_{N+2}(\underbrace{0, \dots, 0}_{N}, 0, i) \tag{1.1.18}$$

- *se $t = f_i^n(t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{Fun}_V^n, n \le N$, allora*

$$\sharp t := \alpha_{N+2}(\underbrace{\sharp t_1, \dots, \sharp t_n}_{n}, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-n}, n, i) \tag{1.1.19}$$

Definizione 1.1.7 (codifica delle formule)**.** *Sia $\mathcal{L}_V$ un linguaggio di insieme di variabili speciali V e supponiamo, per semplicità, che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'insieme $\mathbf{Pred}_V^n = \{P^n \in V | f^n$ è di tipo $Bool^{X^n}\}$ ($\mathbf{Pred}_V^0$ non è altro che l'insieme delle variabili speciali proposizionali) sia numerabile. Supponiamo inoltre che, per ogni $m \in \mathbb{N}$, l'insieme dei connettivi in $\mathcal{L}_V$ di arità m sia numerabile e che esista un $N \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \ge N$, $\mathbf{Pred}_V^n = \emptyset$ e un $M \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $m \ge M$, non esistono in $\mathcal{L}_V$ connettivi di arità m (queste assunzioni sono soddisfatte da tutti i linguaggi adoperati concretamente nella logica).*

L'ulteriore ipotesi semplificatrice, la cui unica necessità è quella di abbreviare la presente definizione, è che $\mathcal{L}_V$ non contiene quantificatori.

Fissiamo dunque, per ogni n, un'enumerazione $(P_i^n)_{i\in\mathbb{N}}$ degli elementi di $\mathbf{Pred}_V^n$, ed una enumerazione $(\odot_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dei connettivi di arità n. La codifica $\sharp A$ delle formule $A \in \mathcal{L}_V$ è allora definita come segue:

- *se $A = P_i^n(t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{Pred}_V^n, n \le N$, definiamo*

$$\sharp A := \alpha_{N+M+3}(\underbrace{0, \dots, 0}_{M}, 0, i, \underbrace{\sharp t_1, \dots, \sharp t_n}_{n}, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-n}, n) \tag{1.1.20}$$

- *se* $A = \odot_j A_1, \dots, A_m, m \leq M$, *con* $\odot_j$ *connettivo* m*-ario, allora*

$$\sharp A := \alpha_{N+M+3}(\underbrace{\sharp A_1, \dots, \sharp A_m}_{m}, \underbrace{0, \dots, 0}_{M-m}, m, j, \underbrace{0, \dots, 0}_{N}, 0) \tag{1.1.21}$$

Definizione 1.1.8 (codifica delle derivazioni)**.** *Sia* $\mathcal{S}$ *un sistema deduttivo nel calcolo dei sequenti di linguaggio* $\mathcal{L}_V$ *e supponiamo fissata una codifica dei termini e delle formule di* $\mathcal{L}_V$*. Supponiamo inoltre che, per ogni* $n \in \mathbb{N}$*, l'insieme* $\mathcal{R}_n$ *delle regole* n*-arie di* $\mathcal{S}$ *sia numerabile e che esista un* $N \in \mathbb{N}$ *tale che, per ogni* $n \geq N$*,* $\mathcal{R}_n = \emptyset$ *(queste assunzioni sono soddisfatte da tutti i sistemi deduttivi adoperati concretamente nella logica).*

Data una presentazione di sequente $\vdash \Gamma = \vdash A_1, \dots, A_n$*, definiamo anzitutto* $\sharp \vdash \Gamma := \sharp(A_1 \vee \dots \vee A_n)$*.*

Fissiamo ora, per ogni $n \leq N$*, una enumerazione* $(R_i^n)_{i\in\mathbb{N}}$ *delle regole* n*-arie di* $\mathcal{S}$*. La codifica* $\sharp\pi$ *delle derivazioni di* $\mathcal{S}$ *è definita come segue:*

- *se* π *è la derivazione*

$$\frac{}{\vdash \Gamma}\ (R_i^0)$$

allora definiamo

$$\sharp\pi := \alpha_{N+3}(\underbrace{0, \dots, 0}_{N}, 0, i, \sharp \vdash \Gamma) \tag{1.1.22}$$

- *se* $n \leq N$*,* $\pi_1, \dots, \pi_n$ *sono derivazioni di sequenti, rispettivamente* $\vdash \Gamma_1, \dots, \vdash \Gamma_n$*, e* π *è la derivazione*

$$\frac{\begin{array}{ccc} \vdots\ \pi_1 & & \vdots\ \pi_n \\ \vdash \Gamma_1 & \dots & \vdash \Gamma_n \end{array}}{\vdash \Gamma}\ (R_i^n) \tag{1.1.23}$$

allora

$$\sharp\pi := \alpha_{N+3}(\underbrace{\sharp\pi_1, \dots, \sharp\pi_n}_{n}, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-n}, n, i, \sharp \vdash \Gamma) \tag{1.1.24}$$

Possiamo osservare, da queste definizioni, che il fatto che $\mathcal{S}$ possieda una nozione di sottoformula, e più in generale che soddisfi la normalizzazione (forte), è condizione sufficiente perchè la codifica, di natura induttiva, permetta di rappresentare *tutte* le derivazioni di $\mathcal{S}$. In tal caso riusciamo in effetti a costruire una funzione ricorsiva primitiva $der_{\mathcal{S}} : \mathbb{N}^2 \to \{0, 1\}$ tale che $der_{\mathcal{S}}(n, m) = 1$ se e solo se $n = \sharp\pi, m = \sharp \vdash \Gamma$ e π è una derivazione in $\mathcal{S}$ di $\vdash \Gamma$ (si tratta infatti solo di "giocare" un po' con le funzioni β_i^k). A partire da questo risultato possiamo definire la funzione *ricorsiva parziale* $teor_{\mathcal{S}}(n) : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ data da $teor_{\mathcal{D}}(n) := sgn(\mu y(der_{\mathcal{D}}(y, n)))$ (dove sgn è la funzione definita come 0 per $n = 0$ e 1 altrimenti) e verificare che, se $n = \sharp \vdash \Gamma$, allora si ha $teor(n) = 1$ se e solo se $\vdash \Gamma$ è derivabile in $\mathcal{S}$.

D'altra parte, nel caso in cui $\mathcal{S}$ non possieda una nozione di sottoformula, o più in generale che non soddisfi la normalizzazione, non c'è garanzia che la codifica delle derivazioni rappresenti *tutte* le derivazioni di $\mathcal{S}$, in quanto l'insieme delle derivazioni di $\mathcal{S}$ non ammette una descrizione induttiva, e dunque non-circolare. Vedremo nelle prossime pagine un esempio in merito.

In definitiva, i requisiti di Dummett per una teoria del senso corrispondono, secondo questa lettura, a richiedere una teoria T d.c. tale che l'insieme delle formule di T sia ricorsivamente enumerabile, ossia in definitiva una teoria T generata da un calcolo dei sequenti che soddisfi l'eliminazione del taglio: è questa la conseguenza dell'identificazione delle condizioni per la normalizzazione forte con quelle necessarie per l'aritmetizzazione:

$$\text{normalizzazione forte} \approx \text{aritmetizzazione} \tag{1.1.25}$$

La terminazione dell'eliminazione del taglio in $\mathcal{S}$ costituisce dunque, si potrebbe dire, la *condizione di possibilità* di una descrizione induttiva, non circolare, e dunque in accordo col requisito di manifestabilità, dell'insieme delle formule derivabili in $\mathcal{S}$. Su questo tema avremo molto da dire nei prossimi capitoli.

Corollario delle conclusioni cui siamo giunti, è la tesi secondo cui, *se le condizioni di verità devono essere espresse in maniera non circolare, allora queste devono non solo presupporre, ma anzi costituire esse stesse una sintassi formale.*

Aritmetica e logica: una questione di gerarchie Da qui in seguito ci serviremo della teoria PA, l'*aritmetica di Peano* (vd. §A), nel linguaggio $\mathcal{L}_{PA}$ di LK che ha come uniche variabili speciali la variabile speciale individuale $\underline{0}$, la variabile speciale per funzione unaria $\underline{S}$, le variabili speciali per funzioni binarie $\underline{+}, \underline{\times}$ e per predicati binaria $\simeq$.

L'interesse per PA è dovuto esclusivamente al seguente teorema, la cui dimostrazione è omessa:

Teorema 1.1.4. *Ogni funzione ricorsiva generale è* rappresentabile *in PA, ovvero, se $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}, k > 0$ è una funzione ricorsiva generale, allora esiste una formula $F(v_0, v_1, \dots, v_k) \in \mathcal{L}_{PA}$ tale che, per ogni $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ si ha che $f(n_1, \dots, n_k) \downarrow = n$ se e solo se $PA \vdash F(\underline{n}, \underline{n_1}, \dots, \underline{n_k})$.*

Dal momento che ogni sintassi aritmetizzabile è codificata da una funzione ricorsiva generale, possiamo servirci di PA come del "computer" su cui far "girare" le sintassi formali (compresa quella di PA!). Si osservi d'altra parte l'arbitrarietà della scelta di PA: è noto infatti che esistono infinite altre teorie, *in linguaggi diversi*, che godono di proprietà analoghe a quella espressa dal teorema 1.1.4. Il "computer" PA, in particolare, poggia su un certo insieme V di variabili speciali, quello descritto sopra, e dovremo chiederci quanto la scelta di questo specifico insieme possa essere rilevante per una caratterizzazione genuinamente logica del rapporto tra sistemi deduttivi, aritmetizzazione ed eliminazione del taglio.

In effetti, c'è una bella differenza tra parlare di codifiche aritmetiche e di codifiche in una certa "teoria per l'aritmetica", scritta in un qualche "linguaggio per l'aritmetica". Uno degli obbiettivi che, nella seconda metà dell'Ottocento, accomunavano, seppur con le dovute differenze, le ricerche di matematici del calibro di Frege e Dedekind era del resto proprio quello di pervenire a una "costruzione puramente logica della scienza dei numeri" (Dedekind, [13]). Al di là delle pretese "logiciste" più o meno vigorosamente difese da questi personaggi, vale la pena ancora oggi di chiedersi quanto, nella "scienza dei numeri", possa essere stabilito attraverso formulazioni puramente logiche, nel senso di indipendenti dal ricorso a uno specifico insieme di variabili speciali (o di "costanti" - vd. §1.1.2) e di assiomi non logici. E' solo attraverso un tale proposito che potremo arrivare ad attribuire un contenuto logico ai risultati che otterremo dal nostro "computer di Peano".

Enunciamo anzitutto due risultati molto noti riguardo PA, che utilizzeremo nell'ambito di questa discussione generale del rapporto tra sintassi e semantica. Introduciamo il *modello standard* $\mathbb{N}$ di PA: quest'ultima è infatti unanimemente considerata una teoria "a pretesa categorica", in virtù del fatto che possediamo una nozione chiara di quale debba essere il suo preteso unico modello. $\mathbb{N}$ infatti non è altro che l'usuale insieme dei numeri naturali. La definizione dell'interpretazione di PA è assolutamente immediata: avremo $\underline{0}_{\mathbb{N}} = 0$, $\underline{S}_{\mathbb{N}} = succ$, $\underline{\simeq}_{\mathbb{N}} ==$, $\underline{+}_{\mathbb{N}} = +$ e $\underline{\times}_{\mathbb{N}} = \times$. Anche la valutazione è definita in modo immediato. Si verifica facilmente che $\underline{n+m} = \underline{n}\underline{+}\underline{m}$, $\underline{succ^k(0)} = \underline{S}^k(\underline{0})$, ecc. . Passiamo dunque subito ai teoremi:

Teorema 1.1.5 (Σ^0_1-completezza)**.** *Se $A \in \mathcal{L}_{PA}$ è una formula chiusa Σ^0_1, ovvero è della forma $\exists v_1, \dots, \exists v_k(A')$, con $k \in \mathbb{N}$ e A' priva di quantificatori, allora $\mathbb{N} \vDash A \Rightarrow PA \vdash A$.*

Dimostrazione. Nel caso in cui A è priva di quantificatori (caso $\Sigma^0_0 = \Pi^0_0$), si dimostra facilmente per induzione sulla complessità di A che vale $\mathbb{N} \vDash A \Leftrightarrow PA \vdash A$. Sia ora $A = \exists v_1, \dots, \exists v_k A'$, con A' Σ^0_0. Supponiamo $\mathbb{N} \vDash A$; allora esistono $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ tali che $\mathbb{N} \vDash A'[n_1, \dots, n_k]$, e quest'ultima è una formula Σ^0_0, da cui otteniamo $PA \vdash A'[\underline{n_1}/v_1] \dots [\underline{n_k}/v_k]$, e dunque $PA \vdash A$.

□

Teorema 1.1.6 (Π^0_1-incompletezza)**.** *Supponiamo che PA sia coerente. Allora esiste $A \in \mathcal{L}_{PA}$ formula chiusa Π^0_1, ovvero della forma $\forall v_1, \dots, \forall v_k(A)$, con $k \in \mathbb{N}$ e A priva di quantificatori, tale che $\mathbb{N} \vDash A$ e $PA \nvdash A$ nè $PA \nvdash \neg A$.*

Dimostrazione. (cenni) Si tratta del celebre primo teorema di incompletezza di Gödel, formulato nella variante dovuta a Rosser. L'idea originale della dimostrazione, che qui omettiamo nei dettagli, è quella di utilizzare un argomento diagonale per costruire una formula chiusa G tale che $PA \vdash G \leftrightarrow \neg teor_{PA}(\ulcorner G \urcorner)$. Si vede allora che G è esattamente la formula richiesta dal teorema. □

E' utile provare a leggere questi risultati dal punto di vista della logica del secondo ordine LK^2 (vd. §A): in essa possiamo in effetti costruire una teoria d.c. con un numero finito di assiomi che contiene PA: è la cosiddetta *aritmetica di Peano del secondo ordine* PA^2, nel linguaggio $\mathcal{L}_{PA^2}$ che è il linguaggio di LK^2 che ha le stesse variabili per predicati e costanti di $\mathcal{L}_{PA}$. PA^2 è data dai primi sette assiomi di peano ($PA1-7$) e dalla chiusura universale (al secondo ordine) di una qualunque occorrenza dello schema di assioma (SI).

Estendiamo le nozioni di interpretazione e valutazione per i linguaggi di LK^2 come segue:

Definizione 1.1.9 (modello di un linguaggio di LK^2)**.** *Un* modello*, o* interpretazione *di un linguaggio del secondo ordine $\mathcal{L}$ di LK^2 è una coppia $(\mathcal{M}, \{\mathcal{R}_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ è dato da:*

- *un modello $\mathcal{M}$ nel senso della definizione 1.1.1;*
- *per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme $\mathcal{R}_n$ delle relazioni n-arie su M.*

Definizione 1.1.10 (valutazione di un linguaggio di LK^2)**.** *Sia $(\mathcal{M}, \{\mathcal{R}_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ un* modello*, o* interpretazione *di un linguaggio del secondo ordine $\mathcal{L}$ di LK^2. La valutazione dei termini e delle formule in $(\mathcal{M}, \{\mathcal{R}_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ è definita come segue:*

- *la valutazione dei termini e delle formule senza quantificatori del secondo ordine o variabili vincolabili del secondo ordine è come nella definizione 1.1.2;*
- *X^n variabile vincolabile per predicati n-aria ($n \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow X_{\mathcal{M}} \in \mathcal{R}_n$ e $(\neg X)_{\mathcal{M}} = \complement X_{\mathcal{M}}$;*
- *se $A = \forall X^m B$, con $X^n \neq R_1^m, \dots, R_n^m$, e R_i^m relazioni m-arie su M, allora $\mathcal{M} \vDash A[R_1^m, \dots, R_n^m]$ se e solo se per ogni $R^m \in \mathcal{R}^m$, $\mathcal{M} \vDash B[R^m, R_1^m, \dots, R_n^m]$;*
- *se $A = \exists X^m B$, con $X^n \neq R_1^m, \dots, R_n^m$, e R_i^m relazioni m-arie su M, allora $\mathcal{M} \vDash A[R_1^m, \dots, R_n^m]$ se e solo se per una certa $R^m \in \mathcal{R}^m$, $\mathcal{M} \vDash B[R^m, R_1^m, \dots, R_n^m]$.*

Le nozioni di omomorfismo e isomorfismo di modelli di un linguaggio del secondo ordine sono identiche a quelle date nella definizione 1.1.3. In quanto segue, per semplicità, faremo riferimento esclusivamente a *modelli egualitari*, ovvero modelli nei quali la relazione $\simeq$ è interpretata come l'identità sul supporto del modello. Inoltre, considereremo gli assiomi $ID1-3$ e lo schema di assioma SId (vd. §A) come assiomi logici di LK, indipendenti dalla teoria di riferimento, e l'assioma Id come un assioma logico di LK^2. Considereremo cioè l'assiomatizzazione dell'identità come facente parte della pura logica.

Tornando, per un momento, al logicismo ottocentesco, nell'articolo (Dedekind, [13]), il matematico tedesco presentava una definizione dei numeri naturali a partire dai concetti, da lui considerati puramente logici, di insieme vuoto, di appartenenza e di successore di un insieme, definito, per ogni insieme x, come $x+1 = x \cup \{x\}$. Possiamo rappresentare (come fatto in (Abrusci, [1])) l'idea di Dedekind definendo esplicitamente il predicato

$$\mathbf{IND}(X, x) := \emptyset \in X \wedge \forall y(y \in X \to y+1 \in X) \to x \in X \tag{1.1.26}$$

così da arrivare a:

$$x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \forall X\ \mathbf{IND}(X, x) \tag{1.1.27}$$

Del resto, senza impegnarci sulla natura puramente logica dei concetti insiemistici adoperati da Dedekind, possiamo considerare gli assiomi $PA1-7$ e la seguente formula nel linguaggio $\mathcal{L}_{PA^2}$:

$$\mathbf{IND}^*(X, x) := PA1 \wedge \cdots \wedge PA7 \wedge \mathbf{IND}_{\underline{0},\underline{S}}(X, x) \tag{1.1.28}$$

dove $\mathbf{IND}_{z,f}(X,x)$ è definita come

$$\mathbf{IND}_{z,f}(X,x) := X(z) \wedge \forall y(X(y) \to X(f(y))) \to X(x) \tag{1.1.29}$$

E' immediato che in PA^2, per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia derivabile $\vdash \forall X\ \mathbf{IND}_{\underline{0},\underline{S}}(X,\underline{n})$. Per capire al meglio la natura delle formule appena definite introduciamo la cosiddetta *gerarchia logica*:

Definizione 1.1.11 (gerarchia logica)**.** *Sia A una formula in un linguaggio di LK^2.*

- *A è detta una formula Σ^0 o, equivalentemente, Π^0, se è logicamente equivalente a una formula B priva di quantificatori del secondo ordine;*
- *A è detta una formula Σ^1 se è logicamente equivalente a una formula della forma $\exists X_1,\dots,\exists X_n\ B$, con B priva di quantificatori del secondo ordine ;*
- *A è detta una formula Π^1 se è logicamente equivalente a una formula della forma $\forall X_1,\dots,\forall X_n\ B$, con B priva di quantificatori del secondo ordine;*
- *A è detta una formula Σ^{n+1} se è logicamente equivalente a una formula della forma $\exists X_1,\dots,\exists X_n\ B$, con B formula Π^n;*
- *A è detta una formula Π^{n+1} se è logicamente equivalente a una formula della forma $\forall X_1,\dots,\forall X_n\ B$, con B formula Σ^n.*

Le formule $\mathbf{IND}_{z,f}, \mathbf{IND}^*_{z,f}$ sono tutte $\Sigma^0 = \Pi^0$. D'altra parte, è possibile far vedere come, modulo una qualche forma dell'assioma di scelta (necessario a giustificare le commutazioni della forma $A \wedge (\forall X\ B) \leftrightarrow \forall X\ (A \wedge B)$), le chiusure universali $\forall X\ \mathbf{IND}_{z,f}, \forall X\ \mathbf{IND}^*_{z,f}$ sono tutte formule Π^1.

L'analogo della 1.1.27 è costituito dal seguente risultato:

Proposizione 1.1.7. *Sia t un termine di $\mathcal{L}_{PA^2}$. Allora il sequente $\vdash \forall X\ \mathbf{IND}_{\underline{0},\underline{S}}(X,t)$ è derivabile logicamente se e solo se esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che sia derivabile logicamente $\vdash t \simeq \underline{n}$.*

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) Supponiamo che sia derivabile $\vdash t \simeq \underline{n}$. Allora, in particolare, è derivabile logicamente $\vdash t \simeq \underline{S}^n(\underline{0})$. Ora, supponiamo siano derivabili $\vdash X(\underline{0})$ e $\vdash \forall y(X(y) \to X(\underline{S}(y)))$. Allora n applicazioni della seconda derivazione alla prima producono una derivazione di $\mathbf{IND}_{\underline{0},\underline{S}}(X, \underline{S}^n(\underline{0}))$; applicando l'assioma dell'identità Id (vd. §A) e successivamente una generalizzazione universale si ottiene la tesi.

($\Rightarrow$) Sia ora derivabile $\vdash \forall X\ \mathbf{IND}_{\underline{0},\underline{S}}(X,t)$, chiamiamo C la formula che occorre in questo sequente e sia $\mathcal{M}$ un modello di $\mathcal{L}_{PA^2}$ che soddisfa C. Definiamo una funzione, non necessariamente iniettiva, $\varphi : \mathbb{N} \to M$ data da:

$$\begin{cases} \varphi(0) = \underline{0}_{\mathcal{M}} \\ \varphi(n+1) = \underline{S}_{\mathcal{M}}(\varphi(n)) \end{cases} \tag{1.1.30}$$

Consideriamo adesso $Im\varphi$: sicuramente $\underline{0}_{\mathcal{M}} \in Im\varphi$; inoltre, se $a \in Im\varphi$, si ha senz'altro $\underline{S}_{\mathcal{M}}(a) \in Im\varphi$. D'altra parte, per ogni $M' \subset M$, $\mathcal{M}$ soddisfa che, se $\underline{0}_{\mathcal{M}} \in M'$ e, se $a \in M'$ implica $\underline{S}_{\mathcal{M}}(a) \in M'$, allora $t \in M'$. Ne segue che $t \in Im\varphi$ e dunque esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $\mathcal{M} \vDash t \simeq \underline{n}$. Per il teorema di completezza, ne segue che è logicamente derivabile $\vdash t \simeq \underline{n}$.

□

Adoperando un'espressione che sarà introdotta nel prossimo paragrafo, possiamo dire che la formula $\forall X\ \mathbf{IND}_{\underline{0},\underline{S}}(X,t)$ corrisponde all'enunciato "t è un intero *standard*". Ma un dominio costituito esclusivamente da interi *standard* sarà isomorfo a $\mathbb{N}$ e dunque, generalizzando l'argomento della proposizione1.1.7, ed osservando che la teoria PA^2 è logicamente equivalente alla teoria che ha come unico assioma $\forall x \forall X\ \mathbf{IND}^*_{\underline{0},\underline{S}}(X,x)$, si ha il seguente teorema (una versione del quale era stata già dimostrata in (Dedekind, [13])):

Teorema 1.1.8 (categoricità di PA^2). *Ogni modello di $\mathcal{L}_{PA^2}$ che soddisfa PA^2 è isomorfo a* $(\mathbb{N}, \{\wp(\mathbb{N}^n)\}_{n\in\mathbb{N}})$.

Dimostrazione. Sia $(\mathcal{M}, \{\mathcal{R}_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ un modello di $\mathcal{L}_{PA^2}$ che soddisfa PA^2. Si ha che, per ogni $a, b \in M$ e $P \subseteq M$ valgono:

1. $\underline{0}_{\mathcal{M}} \neq \underline{S}_{\mathcal{M}}(a)$;
2. $\underline{S}_{\mathcal{M}}(a) = \underline{S}_{\mathcal{M}}(b) \Rightarrow a = b$;
3. se $\underline{0}_{\mathcal{M}} \in P$ e $c \in P \Rightarrow \underline{S}_{\mathcal{M}}(c) \in P$, allora $P = M$.

Consideriamo la funzione φ della proposizione 1.1.7 e mostriamo che, in questo caso, non solo è iniettiva, ma si tratta di un isomorfismo:

- φ è iniettiva: supponiamo che esistano $n, m \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi(n) = \varphi(m)$ e $n \neq m$. Se $n > m$, allora applicando ripetutamente il punto 2. si trova $\varphi(n-m) = \varphi(0)$, ossia $\underline{0}_{\mathcal{M}} = \underline{S}_{\mathcal{M}}(\varphi(n-m-1))$. Ma, per 1., questo è assurdo. Il caso $m > n$ è del tutto analogo.

- φ è suriettiva: sia $P = \varphi(\mathbb{N})$; si ha $\underline{0}_{\mathcal{M}} \in P$ e per ogni $c \in P$, si ha $\underline{S}_{\mathcal{M}}(c) \in P$; allora, per 3. si ha $P = M$.

- che $\varphi(0) = \underline{0}_{\mathcal{M}}$ vale per definizione. Inoltre si ha $\varphi(n+1) = \underline{S}_{\mathcal{M}}(\varphi(n))$ e dunque φ è un isomorfismo.

□

In definitiva, come versione "non insiemistica" della 1.1.27 possiamo considerare la seguente:

$$x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \forall X\ \mathbf{IND}^*_{\underline{0},\underline{S}}(X,x) \tag{1.1.31}$$

Si osservi, a questo punto, che, se si volesse fare astrazione anche dal linguaggio $\mathcal{L}_{PA^2}$, allora dovremmo considerare, al posto della formula $\forall x \forall X\ \mathbf{IND}^*_{\underline{0},\underline{S}}(X,x)$, la sua chiusura esistenziale $\exists f \exists z \forall x \forall X\ \mathbf{IND}^*_{z,f}(X,x)$. Tuttavia, la non reversibilità (vd. §1.2.4) del quantificatore esistenziale dovrebbe lasciarci immaginare che questa astrazione produca qualcosa di essenzialmente diverso da quanto avevamo prima: in effetti, la formula chiusa esistenzialmente è Σ^2 e dunque non si presta affatto ai risultati che stiamo per provare. Del resto, tutte le volte che ci si chiede se un certo elemento è un numero naturale lo si fa relativamente a una definizione dei numeri naturali (ad esempio quella adottata da Dedekind e dalla teoria assiomatica degli insiemi adoperante $\emptyset$, la relazione $\in$ e l'operazione di unione col singoletto). Provare che ogni elemento soddisfa la formula esistenzialmente chiusa corrisponde invece a provare che questi elementi appartengono a un insieme che è *isomorfo* a $\mathbb{N}$, e provare, che un certo termine t soddisfa la formula $\exists f \exists z \forall X\ \mathbf{IND}^*_{z,f}(X,t)$ vuol dire provare che t appartiene a un insieme che è isomorfo a un segmento iniziale di $\mathbb{N}$. In questo senso, limitarsi al linguaggio $\mathcal{L}_{PA^2}$ significa dare per assodate le assunzioni esistenziali che sono esplicitate dalla formula $\exists f \exists z \forall X\ \mathbf{IND}^*_{z,f}(X,t)$, indipendente da $\mathcal{L}_{PA^2}$.

In virtù di queste osservazioni, possiamo generalizzare ulteriormente la 1.1.31, sostituendo il requisito costituito dal linguaggio $\mathcal{L}_{PA^2}$ e sostituendolo con la richiesta di un arbitrario linguaggio $\mathcal{L}_{z,f}$ che contenga due variabili speciali z, f, di tipo, rispettivamente, X e X^X, arrivando alla seguente formulazione:

$$x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \forall X\ \mathbf{IND}^*_{z,f}(X,x) \tag{1.1.32}$$

Tornando alla discussione della "costruzione puramente logica della scienza dei numeri", mostreremo come pervenire a una caratterizzazione logica della proprietà "essere un numero *standard*". In accordo con (Abrusci, [1]), chiamiamo il primo risultato *teorema di Dedekind*:

Teorema 1.1.9 (primo teorema di Dedekind). $\Sigma^0_1 \subseteq \Pi^1$*, vale a dire, ogni formula* Σ^0_1 *del linguaggio* $\mathcal{L}_{PA^2}$ *è equivalente a una formula* Π^1 *di un qualunque linguaggio* $\mathcal{L}_{z,f}$.

Dimostrazione. Ogni formula Σ^0_1 è della forma $A \equiv \exists n_1 \dots \exists n_k(B(n_1,\dots,n_k))$, con $B(x_1,\dots,x_k)$ formula senza quantificatori. La formula A è equivalente alla formula $A' \equiv \exists x_1 \dots \exists x_k(x_1 \in \mathbb{N} \wedge \dots \wedge x_k \in \mathbb{N} \wedge B(x_1,\dots,x_k))$. Fissata una definizione di $\mathbb{N}$, ovvero i due valori z, f, la formula A', modulo una qualche forma dell'assioma di scelta, in virtù della 1.1.32, è equivalente a una formula Π^1 di $\mathcal{L}_{z,f}$. □

Consideriamo ora il seguente teorema logico, ovvero del tutto indipendente dall'aritmetica, che corrisponde alla reversibilità (vd. §1.2.4) del quantificatore universale:

Teorema 1.1.10 (Π^1-completezza). *Sia* A *una* Π^1 *formula chiusa in un linguaggio* $\mathcal{L}$ *di* LK^2. *Allora si ha che* $\vdash A$ *è derivabile in* LK^2 *se e solo se, per ogni modello* $(\mathcal{M}, \{\mathcal{R}_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ *di* $\mathcal{L}$*, si ha che* $\mathcal{M} \vDash A$.

Dimostrazione. La formula A è equivalente a una formula chiusa $A' \equiv \forall X_1 \dots \forall X_k B$, con B priva di quantificatori del secondo ordine.

($\Rightarrow$) Supponiamo che A sia derivabile in LK^2 e sia $\mathcal{M}$ un modello di $\mathcal{L}$. Data una qualunque scelta di variabili speciali $P_1, \ldots, P_k$ per $X_1, \ldots, X_k$, la formula, del primo ordine, $C \equiv B[P_1/X_1, \ldots, P_k/X_k]$ è derivabile e dunque, per il teorema di correttezza, $\mathcal{M} \vDash C$. Supponiamo ora che esista una interpretazione $\mathcal{M}'$, di supporto M tale che, in essa, alle variabili speciali $P_i, 1 \leq i \leq k$, siano assegnati sottoinsiemi del (la n-esima potenza di) M tali che, $\mathcal{M}' \nvDash C$. Questa possibilità è esclusa dal teorema di correttezza, e dunque per ogni attribuzione a $X_1, \ldots, X_k$ di sottoinsiemi $R_1, \ldots, R_k$ del(la n-esima potenza del) supporto di $\mathcal{M}$, il modello soddisfa la formula $B[R_1, \ldots, R_k]$; ora, questa è esattamente la definizione di soddisfazione da parte di $\mathcal{M}$ della formula A', e dunque $\mathcal{M} \vDash A$.

($\Leftarrow$) Sia A soddisfatta da ogni modello. Allora ogni modello soddisfa la formula $B[R_1, \ldots, R_k]$ per ogni possibile scelta di parametri $R_1, \ldots, R_k$. Ora, ad ogni scelta di possibili parametri di un modello del secondo ordine corrisponde un'interpretazione del primo ordine in un modello che soddisfa B. Dunque, per il teorema di completezza, $\vdash B$ è derivabile e dunque lo è la sua chiusura universale.

□

Una conseguenza di questo risultato e dell'aritmetizzazione della logica del primo ordine, è allora il viceversa del teorema di Dedekind 1.1.9:

Teorema 1.1.11. $\Pi^1 \subseteq \Sigma^0_1$

Dimostrazione. Dal teorema 1.1.10 segue che ogni formula A Π^1 è derivabile se e solo se è derivabile una formula A' del primo ordine. Ora l'aritmetizzazione permette di rappresentare la derivabilità nella logica del primo ordine per mezzo di un predicato ricorsivo primitivo (e dunque $\Sigma^0_0 = \Pi^0_0$) $\vdash der_{LK}(n, m)$ tale che $der_{LK}(n, m)$ è derivabile se e solo se n è il codice di una derivazione della formula di cui m è il codice. La derivabilità di A' corrisponde dunque alla formula Σ^0_1 $\exists n(der_{LK}(n, \sharp \vdash A))$. □

Mettendo insieme il teorema di Π^1-completezza 1.1.10 con l'identificazione $\Sigma^0_1 = \Pi^1$, scopriamo che il teorema "aritmetico" 1.1.5 di Σ^0_1-completezza non è altro che l'immediato corollario di un teorema "logico", ovvero quello di Π^1-completezza, e che dunque il contenuto del teorema 1.1.5 non va attribuito nè alla specifica teoria PA nè più in generale all'aritmetica: si tratta di una questione genuinamente logica.

Partendo dal requisito dummettiano di non-circolarità nella spiegazione del senso siamo giunti a richiedere le condizioni che garantiscono l'eliminabilità del taglio e con esse la possibilità di aritmetizzare, ossia di "far girare" la nostra TS, ormai pienamente identificata con una sintassi espressa nel calcolo dei sequenti, su un computer ideale. Abbiamo poi identificato la nozione di computabilità, o ricorsività generale, con quella di Σ^0_1-formula nel linguaggio dell'aritmetica di Peano PA e infine scoperto che questa nozione corrisponde esattamente alla nozione di Π^1-formula della gerarchia logica. In effetti, le formule Π^1 sono quelle formule della logica del secondo ordine per le quali è possibile fornire una nozione di derivazione canonica, in quanto per esse e, come vedremo tra breve, *solo per esse*, ha senso una nozione di sottoformula e con questa una nozione di rango: ha senso infatti definire $rg(\forall X A) = rg(A[Y/X]) + 1$, in quanto la seconda è una formula di complessità strettamente minore. Ci ritroviamo dunque in mano la seguente, molto potente, identificazione:

$$\text{Sintassi} \approx \text{Calcolo} \approx \text{Sottoformula} \approx \text{Completezza} \approx \Pi^1 \tag{1.1.33}$$

Veniamo ora al risvolto della medaglia:

Teorema 1.1.12 (secondo teorema di Dedekind)**.** $\Pi^0_1 \subseteq \Sigma^1$*, vale a dire, ogni formula* Π^0_1 *del linguaggio* $\mathcal{L}_{PA^2}$ *è equivalente a una formula* Σ^1 *di un qualunque linguaggio* $\mathcal{L}_{z,f}$*.*

Dimostrazione. Ogni formula Π^0_1 è della forma $A \equiv \forall n_1 \dots \forall n_k(B(n_1, \dots, n_k))$, con $B(x_1, \dots, x_k)$ formula senza quantificatori. La formula A è equivalente alla formula $A' \equiv \forall x_1 \dots \forall x_k(x_1 \notin \mathbb{N} \vee \dots \vee x_k \notin \mathbb{N} \vee B(x_1, \dots, x_k))$. Fissata una definizione di $\mathbb{N}$, ovvero i due valori z, f, la formula A', modulo una qualche forma dell'assioma di scelta, in virtù della 1.1.32, è equivalente a una formula Σ^1 di $\mathcal{L}_{z,f}$. □

Per provare il viceversa ci serviremo del seguente teorema logico:

Teorema 1.1.13. *Sia* $A \equiv \exists X_1 \dots \exists X_k(B)$ *una formula* Σ^1*. Allora, dato un insieme di variabili speciali* $\{P_1, \dots, P_k\}$*,* A *è vera se e solo se la formula* $B[P_1/X_1, \dots, P_k/X_k]$ *è soddisfacibile.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Sia $\mathcal{M}$ un modello di $\mathcal{L}_{LK^2}$. Sicuramente $\mathcal{M} \vDash A$, e dunque esistono $R_1, \dots, R_k$ sottoinsiemi del(l'n-esima potenza del) supporto M tali che $\mathcal{M} \vDash B[R_1, \dots, R_k]$. I parametri $R_1, \dots, R_k$ definiscono allora un'interpretazione in un modello $\mathcal{M}'$ di supporto ancora M tale che $\mathcal{M}' \vDash B[P_1/X_1, \dots, P_k/X_k]$.

($\Leftarrow$) Mostriamo, per induzione sulle formule D del primo ordine a parametri in un modello, che, se esiste un modello $\mathcal{M}$ che soddisfa $D[a_1, \dots, a_n]$, per opportuni $a_1, \dots, a_n \in M$, allora, per ogni modello $\mathcal{N}$ esistono $b_1, \dots, b_n \in N$ tali che $\mathcal{N}$ soddisfa $\exists X_1 \dots \exists X_k D[X_1/P_1, \dots, X_k/P_k][b_1, \dots, b_n]$, dove $P_1, \dots, P_k$ sono le variabili speciali proposizionali o per predicati m-ari che occorrono in D.

(D **atomica**) il supporto N è non vuoto per definizione. Sia dunque $b \in N$ e stabiliamo $b_i = b, 1 \leq i \leq n$. Allora $\mathcal{N} \vDash D[N/D][b, \dots, b]$, e dunque $\mathcal{N} \vDash \exists X\ D[b_1, \dots, b_n]$.

($D = F \wedge G$) segue immediatamente da $\mathcal{N} \vDash \exists X(F) \wedge \exists Y(G) \Rightarrow \mathcal{N} \vDash \exists X \exists Y(F \wedge G)$;

($D = F \vee G$) segue immediatamente da $\mathcal{N} \vDash \exists X(F) \vee \exists Y(G) \Rightarrow \mathcal{N} \vDash \exists X \exists Y(F \vee G)$;

($D = \forall x F$) sappiamo che, per ogni $b \in N$, $\mathcal{N} \vDash F[N/F][b, b_1, \dots, b_n]$. Allora senz'altro $\mathcal{N} \vDash \exists X D[X/F][b, b_1, \dots, b_n]$ e dunque, per ogni $b \in N$ e per un certo $N' \subset N$, $\mathcal{N} \vDash D[N'/F][b, b_1, \dots, b_n]$, da cui $\mathcal{N} \vDash \forall x D[N'/F][b_1, \dots, b_n]$, da cui $\mathcal{N} \vDash \exists X \forall x D[X/F][b_1, \dots, b_n]$.

$(D = \exists xF)$ sappiamo che, per un certo $b \in N$, $\mathcal{N} \vDash F[N/F][b, b_1, \ldots, b_n]$. Allora senz'altro $\mathcal{N} \vDash \exists XD[X/F][b, b_1, \ldots, b_n]$ e dunque, per un certo $b \in N$ e per un certo $N' \subset N$, $\mathcal{N} \vDash D[N'/F][b, b_1, \ldots, b_n]$, da cui $\mathcal{N} \vDash \exists xD[N'/F][b_1, \ldots, b_n]$, da cui $\mathcal{N} \vDash \exists X\exists xD[X/F][b_1, \ldots, b_n]$.

□

Presi insieme, i teoremi logici 1.1.5 e 1.1.13 ci danno la seguente situazione:

- *Ogni formula Π^1 è equivalente alla validità di una formula Σ^0;*
- *Ogni formula Σ^1 è equivalente alla soddisfacibilità di una formula Π^0.*

la quale costituisce una interessante traduzione del vocabolario "meta-logico" della teoria dei modelli in quello della logica (del secondo ordine).

Sfruttando ancora una volta l'aritmetizzazione, arriviamo così al seguente:

Teorema 1.1.14. $\Sigma^1 \subseteq \Pi^0_1$.

Dimostrazione. Sia $A \equiv \exists X_1 \ldots \exists X_k(B)$ una formula Σ^1 (e dunque B Σ^0). A è vera se e solo se è B è soddisfacibile. Applicando il teorema di completezza, abbiamo che B è soddisfacibile se e solo se non è derivabile il sequente $\vdash B \to \mathbf{F}$, e dunque se e solo se è vera la formula $\forall n \neg (der_{LK}(n, \sharp \vdash B \to \mathbf{F}))$, che è Π^0_1. □

Mettendo insieme il teorema 1.1.13 con l'identificazione $\Sigma^1 = \Pi^0_1$, scopriamo che anche il teorema "aritmetico" per eccellenza, il primo teorema di incompletezza di Gödel 1.1.6, corrisponde a un teorema genuinamente logico:

Teorema 1.1.15 (Σ^1-incompletezza). *Sia $\mathcal{L}_{z,f}$ un linguaggio di LK^2. Allora esiste $A \in \mathcal{L}_{z,f}$ formula Σ^1 chiusa vera tale che $\vdash A$ non è derivabile logicamente.*

Questa versione dell'incompletezza, se da una parte rivela il contenuto genuinamente logico del teorema di Gödel, dall'altra, mostrando la peculiare insufficienza della derivabilità puramente logica, refuta ogni pretesa logicista, ovvero di riduzione dell'aritmetica alla logica.

Si osservi che, se la logica delle formule Σ^1 fosse completa, allora, per quanto visto sopra, sfruttando l'aritmetizzazione di LK^2, potremmo dimostrare che per ogni Σ^1-formula $A \equiv \exists X_1 \ldots \exists X_k(B)$, A è soddisfatta da tutti i modelli, ossia è valida, se e solo se è derivabile in LK^2 se e solo se $PA \vdash \exists v_0(der_{LK^2}(v_0, \ulcorner A \urcorner))$, dove quest'ultima è una formula Σ^0_1: avremmo così provato che ogni formula Σ^1 è equivalente a una formula Π^1, facendo collassare la distinzione tra universale e esistenziale al secondo ordine!

D'altra parte, ricordiamo che la coerenza di una teoria, una volta aritmetizzata, corrisponde proprio a una formula Π^0_1, e dunque a una formula Σ^1 (il che è molto intuitivo, se si interpreta la formula Σ^1 come "esiste un modello tale che...") e il secondo teorema di incompletezza di Gödel mostra proprio che, se una teoria è coerente, allora, se può rappresentare la propria coerenza tramite aritmetizzazione, non può dimostrarla nè refutarla.

L'incompletezza quindi, piuttosto che minare, assicura la solidità dell'edificio della logica (del secondo ordine), evitando il collasso delle formule esistenziali sulle universali, ed evidenziando con ciò l'impossibilità di caratterizzare l'universo semantico nei termini di una sintassi scelta una volta per tutte. Del resto, è facile rendersi conto di questo se si osserva che le formule Σ^1 sono tali che per esse non è possibile fornire alcuna nozione di sottoformula, nè in generale alcuna nozione di derivazione canonica: in effetti la verità di una formula della forma $\exists XA$ può dipendere da quella di una formula della forma $A[B/X]$ in cui la complessità di B non è limitata da quella di $\exists XA$ nè in generale può essere limitata a priori. Il mondo delle formule Σ^1, che è il mondo della semantica per eccellenza, il mondo dei modelli e della coerenza, è così definitivamente sottratto al dominio di ciò che può essere descritto in accordo con il requisito dummettiano di non-circolarità. In breve:

$$\text{Denotazione} \approx \text{No sottoformula} \approx \text{Incompletezza} \approx \Sigma^1 \tag{1.1.34}$$

Accostando questi risultati alla tesi 1.1.10:

Il senso determina la denotazione e presuppone una sintassi (1.1.10)

ci rendiamo conto di come ogni resoconto del senso si ritrovi stretto tra presupposti Π^1 (la sintassi rigorosa) e conseguenze Σ^1 (le valutazioni oggettive).

L'incompatibilità reciproca, sancita dai teoremi di Π^1-completezza e Σ^1-incompletezza, di queste due categorie logiche manifesta così la contraddizione interna tanto al progetto di Frege di ricavare la denotazione da un senso descritto sintatticamente, quanto a quello della semantica modellistica di ricavare il senso, anch'esso descritto con gli strumenti di una sintassi, quella della teoria degli insiemi, dalla denotazione. Più in generale, come emergerà nei prossimi paragrafi, questa contraddizione costituisce un serio ostacolo per la realizzazione dell'ideale di Frege (1.1.9, pag. 13), nel momento in cui sancisce l'impossibilità, dovuta a motivi puramente logici, di dimostrare l'oggettività del senso senza accettare di scendere a patti con la *soggettività* della sintassi.

1.1.4 Un'aporia "non standard"

In questo paragrafo, dopo un breve richiamo di alcuni noti risultati sui "modelli non standard" dell'aritmetica, saranno discusse le difficoltà che l'esistenza di tali modelli produce per le concezioni che abbiamo raccolto sotto la denominazione di "realismo semantico". In particolare, interpretando i "modelli non standard" come il prodotto di una sorta di "interferenza" tra teoria e modelli, sintassi e semantica, emergerà per la prima volta il ruolo del contesto nel determinare la correttezza delle valutazioni semantiche.

I modelli "non standard" di PA Enunciamo qui di seguito il teorema di compattezza per la logica del primo ordine (che sarà dimostrato in §B), del quale discuteremo alcune fra le più note conseguenze, prima fra tutte l'esistenza di modelli "non standard" di PA:

Teorema 1.1.16 (compattezza). *Se una teoria T non è soddisfacibile, allora non è finitamente soddisfacibile, ossia esiste un insieme finito $T_f \subset_{fin} T$ di formule di T che non è soddisfacibile.*

A partire dal teorema di compattezza è possibile provare l'esistenza di modelli di PA non isomorfi a $\mathbb{N}$, ossia al suo modello "standard":

Proposizione 1.1.17 (esistenza di modelli "non standard" di PA). *Esistono modelli di $\mathcal{L}_{PA}$ che soddisfano PA e non sono isomorfi a $\mathbb{N}$.*

Dimostrazione. Consideriamo il seguente insieme di formule $T = \{\text{assiomi di } PA\} \cup \{\neg(c \simeq \underline{n} : n \in \mathbb{N}\}$, dove c è una nuova variabile speciale individuale (siamo cioè in $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c\}$). Sicuramente $\mathbb{N}$ soddisfa ogni $T_f \subset_{fin} T$, e dunque per compattezza T è soddisfacibile. Sia $\mathcal{M}$ il modello di $\mathcal{L}'$ che soddisfa T.

Evidentemente $\mathcal{M} \vDash PA$, in quanto è modello di ogni suo assioma. Sia ora per assurdo φ un isomorfismo di $\mathbb{N}$ in $\mathcal{M}$ e sia $b \in M$ tale che $b = c_{\mathcal{M}}$. Per suriettività di φ, esiste $a \in \mathbb{N}$ tale che $b = \varphi(a)$. Da $\mathbb{N} \vDash a \simeq \underline{a}$, $b = \varphi(a)$ e $b = c_{\mathcal{M}}$ segue $\mathcal{M} \vDash \varphi(a) \simeq c$ e quindi, per ogni $n \in \mathbb{N}$, varrà $\mathcal{M} \nvDash \varphi(a) \simeq \underline{n}$. In particolare si avrà $\mathcal{M} \nvDash \varphi(a) \simeq \underline{a}$. Essendo $\varphi(a) \simeq \underline{a}$ una formula di $\mathcal{L}$ a parametri in $\mathcal{M} \upharpoonright \mathcal{L}$, si avrà anche $\mathcal{M} \upharpoonright \mathcal{L} \nvDash \varphi(a) \simeq \underline{a}$. Ma allora da $\mathbb{N} \vDash a \simeq \underline{a}$ segue che φ non può essere un isomorfismo. $\square$

Del resto, l'esistenza di modelli "non standard" di PA può essere vista anche come una conseguenza del teorema 1.1.6 di Π^0_1-incompletezza (pag. 28), ossia del primo teorema di Gödel: se PA è coerente, esiste una formula A indecidibile in PA e vera in $\mathbb{N}$. Essendo dunque la teoria $PA \cup \{\neg A\}$ coerente, ha un modello $\mathcal{M}$. Evidentemente allora $\mathcal{M}$ non può essere isomorfo a $\mathbb{N}$. Si ricordi a questo punto che il nostro interesse per PA è limitato (vd. teorema 1.1.4 a pag. 27) al fatto che PA permette di rappresentare tutte le computazioni. E' bene osservare che tanto il teorema di compattezza quanto quello di incompletezza sono stati qui formulati in forma sufficientemente generale da fare sì che tutti i risultati che seguano, sebbene riguardino nello specifico PA, possano essere riadattati, mutatis mutandis, a una arbitraria teoria (persino una teoria completa!) con un linguaggio numerabile.

Essendo PA^2 una teoria categorica (teorema 1.1.8 a pag. 31), ed essendo l'assioma di induzione l'unica vera differenza tra PA e PA^2, è chiaro che la proprietà principale dei modelli "non standard" di PA sarà quella di soddisfare lo schema di assioma di induzione solo *relativamente all'interpretazione delle formule di* $\mathcal{L}_{PA}$: in questi modelli ci saranno cioè insieme non bene ordinati "invisibili" a PA (ma ben visibili a PA^2).

Diamo le seguente definizioni, che ci permetteranno di dare una prima caratterizzazione dei modelli "non standard":

Definizione 1.1.12 (sottostruttura). *Sia $\mathcal{M}$ un modello di un linguaggio di LK $\mathcal{L}$. Una* sottostruttura *$\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ è un modello $\mathcal{N}$ di $\mathcal{L}$ tale che:*

- $N \subseteq M$

- *per ogni* f *variabile speciale per funzione* n*-aria* $(n \in \mathbb{N}, n > 0)$ *di* $\mathcal{L}$*, per ogni* $a_1, \dots, a_n \in N$ *si ha* $f_{\mathcal{N}}(a_1, \dots, a_n) = f_{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n)$ *e per ogni variabile speciale individuale* $c \in \mathcal{L}$*,* $c_{\mathcal{M}} = c_{\mathcal{N}}$

- *per ogni variabile speciale per predicato* n*-aria* $(n \in \mathbb{N}, n > 0)$ $R^n \in \mathcal{L}$*, si ha* $R^n_{\mathcal{N}} = R^n_{\mathcal{M}} \cap N^n$*.*

Intuitivamente, una sottostruttura $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ è un modello di $\mathcal{L}$ che soddisfa le stesse formule non esistenziali di $\mathcal{M}$ a parametri in $\mathcal{N}$. Nella seguente definizione, il simbolo $\underline{\leq}$ indicherà l'interpretazione della relazione di $\mathcal{L}$ data da $x \underline{\leq} y \equiv \exists z(x \underline{+} z \simeq y)$

Definizione 1.1.13. *Siano* $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ *modelli di* $\mathcal{L}_{PA}$ *che soddisfano* PA *e tali che* $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$*.* $\mathcal{N}$ *è detto* segmento iniziale *di* $\mathcal{M}$ *e* $\mathcal{M}$ *è detto* estensione finale *di* $\mathcal{N}$ *quando, per ogni* $a \in N, b \in M$*, valgono:*

- $\mathcal{M} \vDash b \underline{\leq} a \Rightarrow b \in N$

- $b \notin N \Rightarrow \mathcal{M} \vdash a \underline{\leq} b$

Possiamo ora dare, senza dimostrare, una caratterizzazione dei modelli "non standard" di PA:

Teorema 1.1.18. *Sia* $\mathcal{M}$ *un arbitrario modello di* PA*. Allora il sottoinsieme* $M' \subseteq M$ *dato da* $M' = \{a \in M | \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \mathcal{M} \vdash a \simeq \underline{n}\}$*, induce una sottostruttura* $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ *tale che* $\mathcal{M}'$ *è un segmento iniziale di* $\mathcal{M}$ *e* $\mathcal{M}' \simeq \mathbb{N}$*.*

In generale, è possibile dimostrare che queste estensioni finali di $\mathbb{N}$ sono "piene" di insiemi non ben fondati: infatti, se $\mathcal{M}$ è un modello "non standard" e $a \in M$ un intero "non standard", ossia tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M} \nvDash a \simeq \underline{n}$, esiste una catena infinita discendente a partire da a. Se non ci fosse, infatti, risulterebbe che a è raggiungibile a partire da $\underline{0}_{\mathcal{M}}$,e dunque sarebbe standard. D'altra parte, dal momento che $PA \vdash \forall v_0 \exists v_1 (v_1 \simeq \underline{S}(v_0))$, da a parte anche una catena infinita ascendente. E' esattamente questo il senso secondo cui dicevamo in §1.1.3 che la formula $\forall X \mathbf{IND}^*_{\underline{0},\underline{S}}(X, t)$ equivale a "t è un intero standard".

Un diverso approccio (seguito ad esempio in (Boolos, Burgess, Jeffrey [25])) ai modelli "non standard" viene dal seguente teorema:

Teorema 1.1.19 (Löwenheim-Skolem discendente)**.** *Sia* $\mathcal{M}$ *un modello di un linguaggio* $\mathcal{L}$ *tale che* $\sharp M \geq \sharp \mathcal{L}$*. Allora esiste una sottostruttura* $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ *tale che* $\sharp \mathcal{N} = \sharp \mathcal{L}$ *e, per ogni formula chiusa* $A \in \mathcal{L}$*,* $\mathcal{M} \vDash A$ *se e solo se* $\mathcal{N} \vDash A$*.*

In base a questo teorema possiamo affermare che ogni modello "non standard" di PA ammette una sottostruttura il cui supporto è isomorfo a $\mathbb{N}$ e che soddisfa esattamente le stesse formule. Lo studio di tali modelli si riduce dunque allo studio degli ordini su $\mathbb{N}$ compatibili con gli assiomi di PA. Il risultato forse più interessante di questo approccio è il seguente:

Teorema 1.1.20 (Tennenbaum)**.** *Non esiste alcun modello "non standard" di PA di supporto $\mathbb{N}$ in cui le operazioni di addizione o di moltiplicazione siano computabili.*

Un modello "non-standard" di una teoria è in definitiva un modello che soddisfa, relativamente a una interpretazione, tutte le formule della teoria, ma lo fa "quasi per caso", se non addirittura per errore, in quanto quelle stesse formule che soddisfa, se interpretate in maniera "standard", ossia con i quantificatori che agiscono sull'intero supporto del modello o sull'intero insieme delle proprietà o relazioni di questo, non sono affatto soddisfatte.

Tornando a un esempio già visto, un modello "non-standard" $\mathcal{M}$ di PA soddisferà lo schema di induzione solo relativamente a un sottoinsieme proprio dell'insieme $\wp(M)$. Occorre chiedersi dunque cosa è e che importanza ha ciò che determina il sottoinsieme $a \subseteq \wp(M)$ dei sottoinsiemi ben-ordinati del supporto del modello.

L'argomento di Putnam Nel 1922 Thoralf Skolem (vd. (Skolem, [65])) mostrò che esistono modelli "non-standard" della teoria degli insiemi i quali soddisfano la non-numerabilità dei numeri reali relativamente alla interpretazione ma nei quali l'insieme che interpreta $\mathbb{R}$ è numerabile. Possiamo facilmente vedere come questo sia una conseguenza del teorema 1.1.19, dal momento che il linguaggio della teoria degli insiemi è numerabile. Questo mostrava, a suo parere, che la nozione di non-numerabilità è relativa (al dominio di interpretazione del range del quantificatore esistenzale in essa implicito).

Hilary Putnam, nell'articolo (Putnam, [60]), ha sostenuto che il cosiddetto "paradosso di Löwenhein-Skolem", quello appena citato, sebbene non sia una vera e propria antinomia in logica, in quanto ha perfettamente senso e non implica alcuna contraddizione,

> [...] it *is* an antinomy, or something close to it, in *philosophy of language* (Putnam, [60])

Il filosofo americano presenta diversi specifici argomenti basati su tale paradosso dei quali procede successivamente a delineare uno schema generale, talmente generale da permettergli di affermare che,

> In some way, it really seems that the Skolem Paradox underlies the *characteristic* problems of 20th century philosophy. (Putnam, [60])

In prima analisi, Putnam enuncia così la questione di rilevanza filosofica:

> If we are told, "axiomatic set theory does not capture the intuitive notion of a set", then it is natural to think that *something else* - our "understanding" - does capture it. But what can our "understanding" come to, at least for a naturalistically minded philosopher, which is more than *the way we use our language?* The Skolem argument can be extended, as we have just seen, to show that the *total use of the language* (operational plus theoretical constraints) does not "fix" a unique "intended interpretation" any more than axiomatic set theory by itself does. (Putnam, [60])

Il problema, nella sua forma più generale, ha questa forma: in primo luogo viene fornito un resoconto dell'uso del linguaggio nei termini di un insieme di procedure (es. le derivazioni associate a una qualche teoria per l'aritmetica) e successivamente ci si chiede quali siano i modelli di questo linguaggio,

> [...] thinking of them as existing "out there", *independent of any description.* (Putnam, [60])

Questo è il punto decisivo: il modello descrive un universo di oggetti, proprietà e relazioni le cui condizioni di identità non fanno alcun riferimento nè al linguaggio nè tanto meno alla teoria; ciò apre il campo alla possibilità che, data una interpretazione della teoria nel modello, un enunciato sia soddisfatto dal modello, *relativamente* alla interpretazione (*implicitamente*, potremmo dire), ma non lo sia "in realtà" (*esplicitamente*): in tal caso la teoria, attraverso l'interpretazione, può esprimere al più un *punto di vista* sul modello.

Mi sembra che la questione posta da Putnam possa essere adeguatamente inquadrata attraverso il classico problema delle illusioni: diciamo che una persona P, con una vista in buona salute, *in condizioni normali*, crede di avere di fronte a sè un bastone storto esattamente quando ha di fronte a sè un bastone storto. Tuttavia, se un bastone perfettamente diritto è parzialmente immerso nell'acqua, (e P non è a conoscenza di questa possibilità) P crederà di avere di fronte a sè un bastone storto quando ne ha invece di fronte uno diritto. Il punto è tutto racchiuso nell'espressione "in condizioni normali", o meglio, "in condizioni *standard*": supponiamo di spiegare la situazione appena descritta facendo ricorso a una relazione ρ che correla contesti in cui vale F_1 "C'è un bastone storto di fronte a P" con contesti in cui vale F_2 "P crede di avere un bastone storto di fronte a sè"; ogni volta che vale F_1, in virtù di ρ (che può essere pensata come una qualche relazione causale), se il contesto è "standard", in tale contesto varrà F_2.

Immaginiamo ora di assumere, come potrebbe fare il sostenitore della semantica modellistica come teoria del senso linguistico dato da condizioni di verità (ossia la versione "denotazione $\Rightarrow$ senso"), che il senso dell' enunciato A "C'è un bastone storto di fronte a me" che P crede vero sia spiegato dalla relazione ρ, alla quale il riferimento di A sopravviene; la possibilità di "contesti non standard", in cui cioè valgono contemporaneamente F_1 e $F_2^* =$"P crede di avere un bastone diritto di fronte a sè", mostrerebbe allora che in tali casi P, credendo vera A, stia in realtà credendo che il bastone di fronte a lui sia diritto, sebbene dica che crede sia storto! Ci troviamo in realtà di fronte a un dilemma: o il senso di A è determinato tramite la relazione di riferimento ρ, e allora le condizioni di verità di A saranno del tipo:

A è vero in contesti "standard" se e solo se c'è un bastone storto di fronte a P ed è vero in contesti "non standard" se e solo se c'è un bastone diritto di fronte a P (1.1.35)

e si ammette così il caso paradossale in cui P, nel credere che A, crede qualcosa di vero ma quello che crede di credere, ossia quello che lui crede sia il senso di A, è falso; oppure il senso di A non è determinato da ρ, ma è tale che valgano le condizioni di verità "standard":

A è vero (in ogni contesto) se e solo se c'è un bastone storto di fronte a P (1.1.36)

e dunque P, nel credere che A nel contesto “non standard”, conosce bene il contenuto di quello che dice, e ha semplicemente una credenza falsa, una illusione; ma in questo caso, apparentemente rassicurante, il realista semantico deve ammettere che la denotazione di A è determinata da fattori soggettivi (che siano rappresentazioni psicologiche, sense-data o semplicemente la comprensione che P ha del senso di A), ossia da fattori che non concorrono alla valutazione di A, in quanto colui che conosce il senso di A può credere che A sia vero in contesti in cui è falso.

Il realista semantico, nella versione “denotazione $\Rightarrow$ senso”, che mirava a escludere ogni fattore soggettivo dalla descrizione del linguaggio, è dunque costretto, per spiegare in modo non paradossale la denotazione, a rivolgere il suo sguardo ai limiti del soggetto parlante: avviene così che l'*ideale di Frege* (1.1.9) si rivela, entro questa concezione del senso, inattingibile.

Per il realista fregeano, ossia per la versione “senso $\Rightarrow$ denotazione” del realismo semantico, le cose non vanno molto meglio: egli infatti ritiene che sia il senso che P, in quanto parlante, attribuisce ad A a determinare il riferimento di A ai fatti del mondo; ma allora il caso paradossale è immediatamente escluso in quanto, in ogni contesto, il senso di A non potrà che essere quello che P attribuisce ad A. D'altra parte però, ciò che l'argomento precedente mostra, è che tale senso non sarà affatto sufficiente a determinare la “giusta” denotazione in ogni contesto, e questo non potrà che avvenire (per la definizione che abbiamo dato di “soggettivo”) per motivi soggettivi, inerenti i limiti del soggetto parlante P. Anche Frege dovrà quindi abbandonare il suo stesso ideale (1.1.9).

Una precisazione: l'argomento precedente funziona anche assumendo una concezione del linguaggio per cui il senso è identificato collettivamente e non con la conoscenza che un qualche parlante può farsi di esso, quale senz'altro è presupposta tanto da Frege quanto dal semantico esternalista, in quanto possiamo sempre immaginare contesti che siano “non standard” per ogni parlante; il punto è: la nozione di “non standard” non è relativa alle credenze di un singolo, ma a ciò che astrattamente si ritiene costituisca il senso e le condizioni di verità degli enunciati.

Rivolgiamoci adesso al mondo dei modelli “non standard” dell'aritmetica: come possiamo riformulare questo argomento?

Anche in questo caso, tanto nella linea “denotazione $\Rightarrow$ senso” quanto in quella opposta “senso $\Rightarrow$ denotazione”, si riproporrà il dilemma tra trascendenza del senso degli enunciati aritmetici rispetto all'uso del matematico e commistione nel senso di fattori soggettivi: basta considerare il fatto che, per ogni proprietà aritmetica, valga il principio di induzione [1].

Ci serviremo, a titolo esemplificativo, del seguente teorema, dovuto a Gentzen:

[1] A rigore, si dovrebbe dire che l'enunciato “Ogni proprietà aritmetica soddisfa il principio di induzione” non è esprimibile in un linguaggio del primo ordine. Tuttavia esso è esprimibile in un linguaggio del secondo ordine e, in particolare, in PA^2. Ricorrendo ai cosiddetti *modelli di Henkin* è allora possibile provare direttamente un analogo dell'argomento di Putnam, ossia è possibile trovare un modello “non standard” di PA^2 - nonostante la categoricità di questa - (vd. ad esempio (Cellucci, [8])).

Teorema 1.1.21 (Gentzen). *Sia TI_α la formula nel linguaggio dell'aritmetica che esprime il principio di induzione transfinita fino all'ordinale α, relativamente alla* rappresentazione di Cantor[2] $\underline{\alpha}$ *degli ordinali $< \epsilon_0$ in PA, allora $\forall \alpha < \epsilon_0$, $PA \vdash TI_\alpha$, mentre $PA \nvdash TI_{\lim_{\alpha<\epsilon_0}\alpha}$, vale a dire $PA \nvdash TI_{\epsilon_0}$.*

Questo teorema ci fornisce una interessante caratterizzazione della "forza ordinale" di PA; si noti che il concetto di "forza ordinale" permette di distinguere tra loro diverse teorie per l'aritmetica. Possiamo peraltro intuitivamente ricondurlo a quanto visto nel paragrafo precedente sull'assegnazione di grandezze ordinali per provare il teorema di eliminazione del taglio e considerarlo come una sorta di "misura" delle sintassi formali.

Se il senso è determinato dalla denotazione, allora l'esistenza dei "modelli non-standard" fa sì che il senso dell'enunciato "ogni proprietà aritmetica soddisfa l'induzione" sia dato da:

> *"ogni proprietà aritmetica soddisfa l'induzione" è vero se e solo se ogni proprietà aritmetica il cui buon ordinamento è derivabile a partire da TI_α, con $\alpha < \epsilon_0$, soddisfa l'induzione.*

Dunque o il matematico la cui comprensione del senso delle espressioni aritmetiche è determinato da PA (o da PA^2, in accordo con la nota sotto) crede di credere qualcosa (che è falso) che non è ciò che realmente crede (che è vero), oppure si ammette che le condizioni di verità devono includere l'aspetto "soggettivo" dell'induzione transfinita fino a ϵ_0.

D'altra parte, il realista fregeano, laddove credeva di avere in mano una teoria a pretesa categorica, si ritrova ad aver definito una teoria strutturale, che potremmo chiamare *teoria delle ϵ_0-strutture* (ossia la teoria delle strutture che soddisfano l'induzione transfinita fino ad ϵ_0) descrive cioè una classe di strutture caratterizzate da una proprietà del tutto inessenziale ed imprevista. Questo peraltro è incompatibile con il principio 1.1.5 del quoziente semantico (pag. 9): infatti, in virtù del teorema 1.1.19 di Löwenheim-Skolem discendente, esistono modelli "non standard" che soddisfano tutti gli asserti di identità del tipo $\underline{n} \simeq \underline{m}$, con $n, m \in \mathbb{N}$ ed il cui supporto è isomorfo a $\mathbb{N}$, ossia in accordo con il quoziente semantico, ma che, in quanto modelli, non sono isomorfi a $\mathbb{N}$. In breve, *la presunta oggettività del senso, se correlata con l'adozione di una sintassi, non produce alcuna oggettività della denotazione, in contrasto con il PdC e con il più generale tentativo di riduzione dell'ontologia alla semantica.*

L'argomento generale appena presentato mostra dunque come la ricostruzione sintattica delle condizioni di verità che identificano il senso delle espressioni linguistiche conduce direttamente a dei casi "non standard", i quali possono essere spiegati soltanto prendendo esplicitamente in considerazione gli aspetti "soggettivi", ovvero irrilevanti per la valutazione, introdotti dalla scelta di una specifica sintassi. In breve, possiamo così riassumere questo percorso:

$$\text{Senso} \overset{\text{Condizioni di verità}}{\longmapsto} \text{Sintassi} \overset{\text{modelli "non standard"}}{\longmapsto} \text{Soggetto} \tag{1.1.37}$$

[2] vd. (Schwichtenberg, Troelsta, [68]).

Immaginare che il riferimento delle espressioni linguistiche (implicite) consista in una relazione tra domini indipendenti (espliciti) e allo stesso tempo postulare una stretta relazione tra questo riferimento ed il senso di tali espressioni ci espone a possibili *interferenze*, situazioni "non standard", in cui le cose non vanno come ci aspettiamo in virtù *proprio di quel senso che vorremmo spiegare*: di conseguenza, o tale senso è a priori inspiegabile, in quanto trascende ogni assiomatizzazione, oppure deve contenere qualche elemento puramente soggettivo, irrilevante dal punto di vista della valutazione. La cifra della soggettività del senso, in questo secondo caso, è data dal fatto che non si potrà più parlare di *un* senso dal momento che ogni diversa teoria avrà un senso diverso, e sempre e solo per motivi apparentemente irrilevanti.

Si osservi la natura informale dell'argomento di questo paragrafo. Dovremo attendere il quarto capitolo per trovare una collocazione matematica rigorosa alla questione dell'interferenza e dei "modelli non standard".

1.1.5 Kant e la trasparenza

Possiamo ricostruire due distinte (ma convergenti) linee di argomentazione, perseguite nei precedenti paragrafi:

tante teorie - un modello E' la linea che muove a partire dalla discussione della tesi dummettiana di non-circolarità:

$$\text{Senso} \overset{\text{non-circolarità}}{\longmapsto} \text{Sintassi} \overset{\text{povertà semantica}}{\longmapsto} \text{Soggetto} \tag{1.1.38}$$

E' solo a partire da condizioni di verità esprimibili sintatticamente (e dunque aritmetizzabili) che è possibile un resoconto soddisfacente del senso linguistico. D'altra parte, per via dell'incompletezza, un tale resoconto non potrà che risultare parziale. Possiamo formulare anche una versione "modellistica" di questo argomento: per il teorema di completezza e per le osservazioni in §1.1.2, infatti, due distinte sintassi per l'aritmetica (ossia due sintassi che generano teorie distinte soddisfatte da $\mathbb{N}$) saranno separate da almeno un modello "non standard". Sembra tuttavia molto più sensato, piuttosto che ricercare in tali modelli una giustificazione della soggettività delle teorie (della sintassi), rivolgersi direttamente alle teorie, in quanto, come mostrato dal secondo teorema di incompletezza,

> [...] the only models distinguishing AP from $AP + Con(AP)$ are non-standard ones satisfying $\neg Con(AP)$. Such crazy models - obtained through a completion of $AP + Con(AP)$ - are nothing but an illegible rewriting of the second incompleteness theorem: the difference between AP and $AP+Con(AP)$ accounts for the model, not the other way around! (Girard, [44])

Questa osservazione ci avvicina alla originale lettura dell'incompletezza dell'aritmetica proposta da Girard: quello che il teorema di Gödel mostra non è la pluralità delle possibili realizzazioni di ogni teoria per l'aritmetica, bensì al contrario l'estrema *povertà* dell'universo dei modelli: l'unico modello davvero "aritmetico" dell'aritmetica è il modello "standard" e dunque la disciplina dei modelli non fornisce alcuna seria capacità di separazione tra le teorie:

> If these systems can only be separated through non-standard models, it is not because one of them is fishy: what is fishy here is the very notion of model! (Girard, [44])

una teoria - tanti modelli E' la linea mostrata a pagina 42:

$$\text{Senso} \overset{\text{Condizioni di verità}}{\longmapsto} \text{Sintassi} \overset{\epsilon_0\text{-strutture}}{\longmapsto} \text{Soggetto} \tag{1.1.37}$$

quella che più fa male al realista fregeano, perchè mette seriamente in dubbio la tesi che il senso possa determinare in modo non ambiguo la denotazione.

La componente ineliminabilmente soggettiva della teoria (si noti la piena contraddizione con quanto stabilito dal principio 1.1.11 a pag. 17), quella che caratterizza questa come un "punto di vista" sui modelli che ammette, si rivela nascosta nella formalizzazione della sintassi; si ricordi che considerare la mancata induzione transfinita fino a ϵ_0, o la non dimostrabilità della "formula G di Gödel", una componente soggettiva di PA significa ammettere implicitamente che, *dal punto di vista della valutazione*, TI_{ϵ_0} e G sono vere, in quanto vere nel modello "standard".

Questi argomenti, del resto, mostrando l'incompatibilità dell'ideale di Frege 1.1.9 di un senso oggettivo con la necessità di una sintassi per costruire una TS rigorosa, rivelata dall'assunzione che il senso debba essere dato da condizioni di verità, si rivelano niente altro che conseguenze di quell'identificazione di sintassi e computabilità da una parte, denotazione e incompletezza dall'altra, che ha il suo perno nei due *teoremi di Dedekind* (vd. §1.1.3) .

Lo schema generale che riassume gli argomenti affrontati può dunque essere così schematizzato:

$$\begin{tikzcd}
\text{sintassi} \arrow[d, "\text{è equivalente al}"'] & & \text{senso} \arrow[ll, "\text{presuppone una}"'] \arrow[rr, "\text{determina la}"] & & \text{denotazione} \arrow[d, "\text{è equivalente al}"] \\
\Pi^1 \arrow[r, "\text{indica il}"'] & \text{soggetto} & \neq & \text{oggetto} & \Sigma^1 \arrow[l, "\text{indica l'}"]
\end{tikzcd} \tag{1.1.39}$$

L'incompletezza, vale a dire l'irriducibilità del Σ^1 al Π^1, si manifesta ora come l'impossibilità di ricondurre l'*implicito*, la sintassi, all'*esplicito*, la denotazione, ossia come una refutazione della tesi 1.1.14 della *trasparenza* (pag. 20), e dunque come un recupero del messaggio di Kant (secondo l'analogia "soggetto-sintassi"): nel tentativo di porsi in relazione con l'universo oggettivo delle valutazioni si rivela inevitabile il riferimento all'apporto inessenziale eppure inderogabile delle categorie del soggetto; ogni sintassi rivela però la sua peculiare inadeguatezza, così che la realtà stabile e strutturata, ad esempio quella dei numeri naturali, può manifestarsi soltanto attraverso una collezione senza fine di teorie, attraverso l'applicazione di condizioni, ogni volta irriducibili, per parlare sensatamente di numeri. Mi sembra quanto mai opportuno qui il parallelo con Kant:

> Il concetto trascendentale della ragione, perciò, non è altro che il concetto della *totalità delle condizioni*, per un condizionato che sia dato. Ora, poichè è soltanto l'*incondizionato*, che rende possibile la totalità delle condizioni, e poichè viceversa la totalità delle condizioni è sempre essa stessa incondizionata, allora un concetto puro della ragione, in generale, può essere spiegato come concetto dell'incondizionato, in quanto contiene un fondamento per la sintesi del condizionato. (Kant, [46])

La ragione, per Kant, è la facoltà delle *idee trascendentali*, ossia è quella facoltà che si limita

> tutt'al più a *liberare il concetto dell'intelletto* dalle inevitabili limitazioni di un'esperienza possibile [...] e in tal modo trasforma la categoria nell'idea trascendentale, per dare una compiutezza assoluta alla sintesi empirica, continuando tale sintesi sino all'incondizionato (che non si ritrova mai nell'esperienza, ma soltanto nell'idea). (Kant, [46])

Nel linguaggio di Kant, potremmo dire, se l'idea della *totalità* delle condizioni che rendono un numero tale (Σ^1) fosse essa stessa oggetto di un'esperienza possibile, e dunque riconducibile entro una sintassi (Π^1), sarebbe essa stessa condizionata, e quindi, nella nostra analogia, codificabile (Σ^0_1), mostrando con ciò la incoerenza del pensiero della ragione, ossia il collasso della logica del secondo ordine. Quindi, se tale pensiero è realmente possibile, esso produrrà delle questioni che non posseggono una risposta nei limiti di un'esperienza possibile: le famose *antinomie della ragione* mostrano che, se questa è coerente, deve essere incompleta.

> Tali questioni in effetti, riguardano tutte quante un oggetto, che non può essere dato da nessuna parte se non nel nostro pensiero, ossia concernono la totalità assolutamente incondizionata della sintesi delle apparenze. Se al riguardo, partendo dai nostri propri concetti, non possiamo dire nè stabilire nulla di sicuro, non ci è davvero lecito gettare la colpa sulla cosa, che si cela a noi: una cosa consimile, in effetti, non può esserci data (perchè non si ritrova da nessuna parte se non nella nostra idea). (Kant, [46])

A questo punto appare quanto poco il soggetto (la sintassi) sia stato capace di vedere nei suoi modelli non una realtà lontana e paradossale bensì il riflesso, sullo specchio delle sue molteplici interpretazioni, dei suoi stessi limiti. Come rileva Girard,

> C'est l'idée-même d'évaluation, i.e., de *sémantique*, qui est en cause: on sait, en effet, depuis le paradoxes du siècle passé, que l'évaluation suppose un cadre *préformaté*. (Girard, [43])

E' dunque questo quadro preformato, che si presenta alla domanda semantica già assestato e rimosso, che deve esser fatto oggetto di indagine. Vediamo quindi nel fenomeno dell'incompletezza, riletto alla luce della dialettica trascendentale di Kant, i fondamenti per un mutamento dello sguardo dalla dimensione semantica, ovvero dall'universo delle valutazioni oggettive, talmente "fuori discussione" da rendere impossibile recuperarne concretamente il senso, verso una teoria generale delle sintassi che rendono tale universo possibile:

> Plutôt que d'*évaluer* le langage, on s'interroge alors sur ses *conditions de possibilité* (Girard, [43])

L'idea di caratterizzare l'oggettività attraverso la dimensione semantica della valutazione è stato il cardine di quell'analisi che ci ha portato a riconoscere la portata metafisica delle nozioni fregeane di senso e denotazione. Siamo così pervenuti alla tesi dummettiana (1.1.7, pag. 10) dell'indispensabilità di nozioni semantiche per la caratterizzazione del realismo. L'ideale fregeano, fatto proprio da tutto il realismo semantico, era quello di giustificare la credenza nell'esistenza di una realtà mente-indipendente eliminando ogni forma di soggettività ma senza per questo tralasciare il ruolo decisivo svolto dal linguaggio nel formulare ogni teoria rigorosa; la giustificazione del realismo ha indossato così i panni di teoria del significato.

D'altra parte si è rivelato come ogni singola sintassi nasconda la sua personale inadeguatezza la quale, una volta rivelata dalle codifiche gödeliane o dal riflesso distorcente dei modelli "non standard", ne limita l'accesso al mondo platonico delle verità aritmetiche. La domanda diventa dunque come sia possibile che le sintassi (e solo le sintassi) garantiscano un tale, seppur parziale, accesso.

Una siffatta ricerca, logica e filosofica allo stesso tempo, sui fondamenti sintattici della semantica, o sui fondamenti soggettivi della valutabilità del linguaggio, non potrà allora che andare sotto il nome di *sintassi trascendentale* (Girard, [43]), riproponendo l'analogia

$$\text{Sintassi} \approx \text{Unità sintetica}$$

e anzi estendendola alla ben più forte analogia

$$\text{Sintassi trascendentale} \approx \text{Soggetto trascendentale}$$

testimone di una rivincita del soggetto trascendentale di Kant, quel soggetto che Frege aveva cercato in ogni modo e senza successo di escludere dalla giustificazione dell'aritmetica, sull' ideale del logico tedesco e della tradizione semantica a lui posteriore.

1.2 La dualità

1.2.1 Il teorema di completezza e l'analisi canonica

In quanto segue[3] verrà data una dimostrazione del teorema di completezza per LK la quale, mettendo in luce alcune caratteristiche della sintassi della logica classica, ci permetterà di muovere i primi concreti passi verso quel ripensamento del rapporto tra sintassi e semantica la cui necessità è emersa dagli argomenti dei paragrafi precedenti.

Cominciamo con una definizione preliminare:

Definizione 1.2.1 (ordine ciclico)**.** *Un ordine totale ciclico è dato da una coppia* (X, ρ)*, con* X *insieme e* $\rho \subseteq X^3$ *relazione ternaria su* X *che soddisfa:*

[3] I testi di riferimento per gli argomenti di questo e dei successivi due paragrafi sono (Girard, [34, 30, 32, 36, 37]), (Girard, Lafont,[45]), (Tronçon,[70]), (Abrusci, Tortora de Falco, [2]).

i. (ciclicità) $a, b, c \in X$ *e* $\rho(a,b,c) \Rightarrow \rho(b,c,a)$

ii. (antiriflessività) non si dà il caso che $a, b, \in X$ *e* $\rho(a,a,b)$

iii. (transitività) $a, b, c, d \in X$, $\rho(a,b,c)$ *e* $\rho(c,d,a) \Rightarrow \rho(b,c,d)$

iv. (totalità) $a, b, c \in X \Rightarrow \rho(a,b,c)$ *o* $\rho(c,b,a)$.

Considerando X come un insieme finito di punti su una circonferenza, possiamo leggere $\rho(a,b,c)$ come "b è situato tra a e c" e verificare facilmente che l'ordine ciclico totale corrisponde esattamente all'ordine indotto sulla circonferenza da una orientazione. Possiamo definire una nozione di "distanza"[4] su (X, ρ) come segue:

$$d(a,b) := \begin{cases} 0 & \text{se } a = b \\ \sharp\{c \in X | (c \neq a \wedge \rho(a,c,b)) \vee c = b\} & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{1.2.1}$$

Fissiamo una volta per tutte un linguaggio numerabile $\mathcal{L}$ e una enumerazione $\{t_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ dei termini di $\mathcal{L}$. L'idea è che a ogni presentazione $\vdash \Gamma$ di un sequente su $\mathcal{L}$ venga associato l'ordine ciclico delle formule di Γ indotto dall'ordine in Γ e considerando l'ultima formula di Γ precedente la prima secondo tale ordine.

Introduciamo adesso il fondamentale concetto di analisi canonica: per fare questo utilizzeremo una nuova regola che aggiungeremo a quelle del calcolo dei sequenti LK, ovvero la regola ✠del *demone*, in base alla quale possiamo dimostrare quello che vogliamo:

$$\frac{}{\vdash \Gamma}\,✠$$

Chiameremo $LK_{✠}$ il calcolo dato dalle regole di LK più il demone, e *paraprova* ogni derivazione nel calcolo $LK_{✠}$. Chiameremo inoltre *ipotesi* ogni paraprova che ha come unica regola il demone.

Definizione 1.2.2 (n-esima approssimazione dell'analisi canonica)**.** *Sia A una formula chiusa di $\mathcal{L}$ e $n \in \mathbb{N}$; ad A e n è associata per induzione una coppia (Q_n, π_n), con Q_n un multinsieme di coppie (S_i, A_i) con gli S_i sequenti e $A_i \in S_i$ una formula di S_i detta* formula prescelta*, e π_n una* paraprova *senza tagli di $\vdash A$ avente come ipotesi esattamente i sequenti in Q_n tali che, se $n \neq 0$, $\pi_{n-1} \subseteq \pi_n$:*

i. $Q_0 = \{(\vdash A, A)\}$ *e la paraprova* π_0 *è la seguente:*

$$\frac{}{\vdash A}\,✠$$

ii. è data la coppia (Q_n, π_n) *con* $Q_n = \{(S_1, A_1), ..., (S_k, A_k)\}$ *e* π_n *la paraprova*

$$\begin{array}{c} \dfrac{}{\vdash S_1}\,✠ \quad \dots \quad \dfrac{}{\vdash S_k}\,✠ \\ \vdots\ \pi_n \\ \vdash A \end{array}$$

[4] In realtà, non si tratta di una vera e propria distanza in quanto in generale non si ha $d(a,b) = d(b,a)$.

Definiamo la paraprova π_{n+1} *a partire dalla definizione per casi delle paraprove* π_{S_i} *per ogni ipotesi di* π_n*:*

Se S_i *è una presentazione di sequente del tipo* $\vdash A, \neg A, \Gamma$ *o del tipo* $\vdash \mathbf{V}, \Gamma$*,* π_{S_i} *è rispettivamente una regola assioma o la regola* $\mathbf{V}$ *seguita da un numero opportuno di regole weakening; negli altri casi la definizione di* π_{S_i} *dipenderà dalla formula* B *prescelta in* S_i*:*

1. *se* B *è atomica e ho* $\vdash \Gamma, B, \Delta$*, allora* $\pi_{S_i} := \emptyset$ *e la nuova formula prescelta* A_i *è, tra quelle successive a* B *nell'ordine ciclico indotto da* S_i*, la prima a non essere atomica; se sono tutte atomiche, allora* π_{S_i} *è una regola demone di conclusione* Γ, B, Δ*, detta* ipotesi definitiva*;*
2. *se* $B = C \wedge D$ *e* $S_i = \vdash \Gamma, B, \Delta$*,* π_{S_i} *è data da*

$$\frac{\vdash \Gamma, C, \Delta \quad \vdash \Gamma, D, \Delta}{\vdash \Gamma, C \wedge D, \Delta}$$

   In Q_{n+1} *andranno le ipotesi di* π_{S_i}*, ognuna con, come formula prescelta, la formula che segue* B *nell'ordine ciclico indotto da* S_i*; se invece* $\Gamma = \Delta = \emptyset$*, la formula prescelta del sequente ipotesi è la sua unica formula.*

3. *se* $B = C \vee D$*, e* S_i *è* $\vdash \Gamma, C \vee D, \Delta$*,* π_{S_i} *è data da*

$$\frac{\vdash \Gamma, C, D, \Delta}{\vdash \Gamma, B, \Delta}$$

   In Q_{n+1} *andrà l'ipotesi di* π_{S_i} *con, come formula prescelta, la formula che segue* B *nell'ordine ciclico indotto da* S_i*; se invece* $\Gamma = \Delta = \emptyset$*, la formula prescelta del sequente ipotesi è la una tra* C *e* D*.*

4. *se* $B = \forall x C$*, e* S_i *è* $\vdash \Gamma, \forall x C, \Delta$*,* π_{S_i} *è data da*

$$\frac{\vdash \Gamma, C[y/x], \Delta}{\vdash \Gamma, B, \Delta}$$

   dove y *è il primo simbolo di variabile, nell'enumerazione* $\{t_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *che non occorre in* S_i*. La formula prescelta nel sequente ipotesi è la prima formula che segue* B *nell'ordine ciclico indotto da* S_i*; se invece* $\Gamma = \Delta = \emptyset$*, la formula prescelta è* $C[y/x]$*;*

5. *se* $B = \exists x C$*, e* S_i *è* $\vdash \Gamma, \exists x C, \Delta$*,* π_{S_i} *è data da*

$$\cfrac{\cfrac{\vdash \Gamma, C[t_0/x], \ldots, C[t_n/x], B, \Delta}{\vdash \Gamma, B, \ldots, B, \Delta}}{\vdash \Gamma, B, \Delta}$$

   dove $t_0, \ldots, t_n$ *sono i primi* $n+1$ *termini nell'enumerazione* $\{t_i\}_{i\in\mathbb{N}}$*. La formula prescelta è quella che segue* B *nell'ordine ciclico indotto dalla presentazione del sequente ipotesi di* π_{S_i}*.*

Due osservazioni sono di fondamentale importanza: in primo luogo si noti che, se la formula A è dimostrabile, allora qualunque sequente di (Q_n, π_n) è dimostrabile (è sufficiente guardare i casi della definizione per rendersene conto); in secondo luogo, se C non è una formula prescelta nella presentazione di un sequente ipotesi, allora in ogni premessa di π_{S_i} la distanza nell'ordine ciclico indotto tra la formula prescelta e C è strettamente minore.

Possiamo ora dare la definizione di analisi canonica:

Definizione 1.2.3 (Analisi canonica)**.** *L'analisi canonica di una formula A è la paraprova $\pi = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \pi_n$.*

π è un albero la cui radice è $\vdash A$ e le cui foglie sono regole 0-arie di LK oppure ipotesi definitive e le cui diramazioni sono finite e corrispondono a regole di LK. Si danno tre casi:

1. Tutte le foglie di π sono regole 0-arie di LK e non ci sono rami infiniti;
2. Tutti i rami sono finiti e c'è almeno una foglia che corrisponde a una ipotesi definitiva;
3. Esiste un ramo infinito.

Nel caso 1., adoperando il *Lemma di König*, in virtù del quale un albero a diramazione finita senza rami infiniti è finito, possiamo concludere che π è un albero finito ed è dunque una derivazione di $\vdash A$ in LK; nel caso 2., sempre per König, π è un albero finito che corrisponde a una derivazione in $LK_{✠}$, ossia presenta dei demoni sotto forma di ipotesi definitive; nel caso 3., invece, l'albero non è finito e non corrisponde ad alcuna derivazione. Vedremo tra poco come nei casi 2. e 3. è possibile costruire, a partire da π, un contromodello per A e provare il teorema di completezza.

Il demone Prima di proseguire, vale la pena di fare alcune osservazioni sul sistema $LK_{✠}$: ci si potrebbe chiedere quale sia la natura logica della regola ✠, dal momento che si tratta di una regola evidentemente scorretta. Per avere una risposta sarà necessario ricordare un fondamentale risultato riguardante LK dovuto a Gentzen:

Teorema 1.2.1. *(eliminazione del taglio) Esiste una procedura effettiva tale che, se π è una derivazione in LK del sequente $\vdash \Gamma$, essa trasforma π in una derivazione π' in LK di $\vdash \Gamma$ senza tagli.*

La dimostrazione, qui omessa, di questo celebre teorema, ha il merito di dare un contenuto procedurale alle dualità che caratterizzano la logica classica: per fare un esempio, si pensi alla *legge di De Morgan* $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$; date due derivazioni π_1 di $\vdash \Gamma, A \wedge B$ e π_2 di $\vdash \neg A \vee \neg B, \Delta$, in virtù di tale legge possiamo pensare di tagliarle l'una con l'altra:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi_1\\ \vdash \Gamma, A \wedge B\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\ \pi_2\\ \vdash \neg A \vee \neg B, \Delta\end{array}}{\vdash \Gamma, \Delta}\ cut \tag{1.2.2}$$

Per ipotesi induttiva possiamo allora assumere che esistano λ_1 e λ_2 senza tagli e con stessa conclusione, rispettivamente, di π_1 e π_2, da cui avremo:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\, \lambda_1^0 & \vdots\, \lambda_1^1\\ \vdash \Gamma_0, A & \vdash \Gamma_1, B\end{matrix}}{\vdash \Gamma, A \wedge B} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\, \lambda_2\\ \vdash \neg A, \neg B, \Delta\end{matrix}}{\vdash \neg A \vee \neg B, \Delta}}{\vdash \Gamma, \Delta}\,\mathit{cut} \tag{1.2.3}$$

in cui $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \Gamma$ e $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$. E' questo il caso in cui possiamo ben vedere all'opera la proceduralità della dualità di De Morgan attraverso una semplice modifica che "sposta in alto" il taglio, trasformandolo in una coppia di tagli su formule di complessità strettamente minore:

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\, \lambda_1^1\\ \vdash \Gamma_1, B\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\, \lambda_1^0 & \vdots\, \lambda_2\\ \vdash \Gamma_0, A & \vdash \neg A, \neg B, \Delta\end{matrix}}{\vdash \Gamma_0, \neg B, \Delta}\,\mathit{cut}}{\vdash \Gamma, \Delta}\,\mathit{cut} \tag{1.2.4}$$

Tornando alla questione del demone, l'osservazione da fare è che l'aggiunta di esso non altera affatto l'eliminabilità del taglio, come mostrato da questo esempio:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash A, \neg A}\,Ax}{\vdash A \vee \neg A} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\vdash \neg A}\,\maltese \quad \dfrac{}{\vdash A}\,\maltese}{\vdash \neg A \wedge A}}{\vdash}\,\mathit{cut} \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash A, \neg A}\,Ax \quad \dfrac{}{\vdash A}\,\maltese}{\vdash A}\,\mathit{cut} \qquad \dfrac{}{\vdash \neg A}\,\maltese}{\vdash}\,\mathit{cut}$$

$$\rightsquigarrow \quad \dfrac{\dfrac{}{\vdash A}\,\maltese \quad \dfrac{}{\vdash \neg A}\,\maltese}{\vdash}\,\mathit{cut} \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{}{\vdash}\,\maltese \tag{1.2.5}$$

L'esistenza di derivazioni scorrette (le paraprove) non rende il sistema logico inutilizzabile, in quanto l'eliminazione del taglio assicura che una derivazione *demon-free* proviene da una derivazione senza taglio, anch'essa *demon-free*; l'universo delle derivazioni ne risulta invece arricchito, dando luogo ad esempi come il precedente che possiamo iniziare a vedere come una specie di *disputa* tra il sostenitore (chiamiamolo P) di $\vdash \neg A \wedge A$ e il sostenitore O di $\vdash A \vee \neg A$; rimanendo ancora (per ora) al livello delle semplici intuizioni, possiamo leggere la procedura di eliminazione del taglio in 1.2.5 come l'alternarsi di mosse di P e di O: O mostra le due sottoformule della formula nel sequente conclusione della sua sottoderivazione, e P *sceglie* quale delle sue sottoderivazioni opporre per prima (si noti che la scelta può essere arbitraria); dopodichè O esce di scena e l'eliminazione del taglio va a riguardare soltanto regole $\maltese$; è facile immaginare il motivo di ciò: O ha già *vinto*, perchè nel momento in cui P "tira fuori" delle regole demone, ammette che la sua derivazione non può essere in LK; l'interpretazione procedurale del demone è quindi la regola "mi arrendo!". Una derivazione di una formula A in LK, un teorema per capirci, non è altro che una *strategia vincente*, ossia vincente con ogni strategia per $\neg A$; infatti, se A è un teorema, una paraprova per $\neg A$ non potrà essere demon-free e, d'altra parte, intuitivamente, se una paraprova di A vince tutte le dispute, vorrà dire che non usa mai il demone, quindi è demon-free, ossia un teorema.

La dimostrazione del teorema Dopo questa divagazione strategica, che rivedremo più tardi in una veste meno intuitiva, torniamo all'analisi canonica e al teorema di completezza. Per la dimostrazione del teorema servono ancora tre lemmi.

Lemma 1.2.2. *Sia φ un ramo infinito (caso 3.) dell'analisi canonica π di una formula A; se C è un'occorrenza di formula nella presentazione di un sequente S di φ, allora esiste una presentazione di sequente S' di φ che segue S e in cui C è prescelta.*

Dimostrazione. E' una conseguenza di una osservazione fatta in precedenza e del fatto che se C non è prescelta in S allora C occorre in tutte le premesse di π_S. □

Lemma 1.2.3. *Sia φ un ramo scorretto (casi 2. o 3.) dell'analisi canonica π di una formula A, ovvero φ è infinito oppure il suo ultimo nodo è un'ipotesi definitiva. Allora*

(*i*) *se $B \vee C$ occorre in un sequente di φ, allora B e D occorrono in un sequente di φ;*

(*ii*) *se $B \wedge C$ occorre in un sequente di φ, allora B oppure D occorre in un sequente di φ;*

(*iii*) *se $\forall x B$ occorre in un sequente di φ, allora esiste una variabile di $\mathcal{L}$ che non appare libera in $\forall x B$ tale che $B[y/x]$ occorre in un sequente di φ;*

(*iv*) *se $P(x_1, \ldots, x_n)$ è una formula atomica di $\mathcal{L}$, al più una tra $P(x_1, \ldots, x_n)$ e $\neg P(x_1, \ldots, x_n)$ occorre in un sequente di φ;*

(*v*) *se φ è infinito (caso 3.), e $\exists x B$ occorre in un sequente di φ, allora per ogni termine t di $\mathcal{L}$, $B[t/x]$ occorre in un sequente di φ.*

Dimostrazione. Gli unici casi non banali sono (*iv*) e (*v*):

(*iv*) se $P(x_1, \ldots, x_n)$ e $\neg P(x_1, \ldots, x_n)$ occorrono in due sequenti S_1 e S_2 di φ, osservando che una formula atomica è sempre preservata in ogni ramo dell'analisi canonica, avremo che in S_1 oppure in S_2 occorrono entrambe; allora, per costruzione ho che φ non è scorretto.

(*v*) si osservi innanzitutto che se $\exists x B$ occorre in un sequente S di φ, allora sarà formula prescelta di infiniti sequenti di φ, in quanto occorrerà anche nel sequente premessa di S in φ e per il lemma B.0.1 sarà prescelta in un sequente che segue S.

Sia ora t un termine di $\mathcal{L}$; esiste un $k \in \mathbb{N}$ tale che $t = t_k$, relativamente all'enumerazione $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$; se $\exists x B$ occorre in un sequente di φ, per quanto detto esiste un sequente S' di φ che "dista" più di k passi dal sequente iniziale $\vdash A$; per costruzione, allora, avremo che $B[t/x]$ occorre in S'.

□

Si noti che un ramo scorretto è infinito se e solo se una formula del tipo $\exists x B$ occorre in un suo sequente.

Il prossimo, e ultimo lemma, sposta l'attenzione sulla connessione tra analisi canonica e modelli di una formula:

Lemma 1.2.4. *Dato un linguaggio $\mathcal{L}$ ed un insieme AT non vuoto di formule chiuse atomiche di $\mathcal{L}$, se per ogni $A \in AT$ vale $\neg A \notin AT$ e se $\mathbf{F} \notin AT$, allora esiste un modello $\mathcal{M}$ di $\mathcal{L}$ il cui supporto consiste di termini chiusi di $\mathcal{L}$ e tale che $\mathcal{M} \models AT$.*

Dimostrazione. E' sufficiente prendere come supporto M di $\mathcal{M}$ l'insieme dei termini chiusi di $\mathcal{L}$ se in $\mathcal{L}$ ci sono predicati di arità ≥ 1 ed un insieme $M \neq \emptyset$ qualunque altrimenti. E' possibile e privo di difficoltà a questo punto costruire $\mathcal{M}$ in modo che attribuisca a ogni formula di AT il valore "vero". □

Siamo ora in condizione di dimostrare il seguente:

Teorema 1.2.5 (teorema di completezza)**.** *Se A, formula chiusa di $\mathcal{L}$, non è dimostrabile senza tagli, allora ammette un contromodello.*

Dimostrazione. Supponiamo dunque che l'analisi canonica π di A non produce una derivazione in LK. Fissiamo un ramo scorretto φ di π; sia AT l'insieme delle formule atomiche che occorrono in sequenti di φ. Per il lemma 1.2.3 AT soddisfa le ipotesi del lemma 1.2.4; estendiamo ora $\mathcal{L}$ in $\mathcal{L}_\mathcal{C}$ con un insieme numerabile $\mathcal{C}$ di nuovi simboli per costanti (ovvero variabili speciali individuali) e sia $AT_\mathcal{C}$ l'insieme delle formule di $\mathcal{L}_\mathcal{C}$ ottenute a partire dalle formule di AT sostituendo ogni occorrenza della variabile x_i con la costante c_i. Evidentemente anche $\neg AT_\mathcal{C}$, ovvero l'insieme delle negazioni delle formule di $AT_\mathcal{C}$ soddisfa le ipotesi del lemma 1.2.4 e dunque esiste un modello $\mathcal{M}$ di $\mathcal{L}_\mathcal{C}$ tale che $\mathcal{M} \models \neg AT_\mathcal{C}$.

Verifichiamo adesso che per ogni formula $B(x_1, \ldots, x_n)$ che occorre in un sequente di φ, $\mathcal{M} \not\models B(c_1, \ldots, c_n)$. Da questo seguirà che se B è chiusa, $\mathcal{M} \upharpoonright \mathcal{L} \not\models B$.

1. se $B(x_1, \ldots, x_n)$ è atomica, il risultato segue per definizione di $\mathcal{M}$;

2. se $B(x_1, \ldots, x_n) = C(x_1, \ldots, x_n) \wedge D(x_1, \ldots, x_n)$, allora per il lemma 1.2.2 una tra $C(x_1, \ldots, x_n)$ e $D(x_1, \ldots, x_n)$ occorre in φ e per ipotesi induttiva $\mathcal{M} \not\models C(c_1, \ldots, c_n)$ o $\mathcal{M} \not\models D(c_1, \ldots, c_n)$, da cui la tesi;

3. se $B(x_1, \ldots, x_n) = C(x_1, \ldots, x_n) \vee D(x_1, \ldots, x_n)$, allora per il lemma 1.2.2 entrambe $C(x_1, \ldots, x_n)$ e $D(x_1, \ldots, x_n)$ occorrono in φ e per ipotesi induttiva $\mathcal{M} \not\models C(c_1, \ldots, c_n)$ e $\mathcal{M} \not\models C(c_1, \ldots, c_n)$, da cui la tesi;

4. se $B(x_1, \ldots, x_n) = \forall x C(x, x_1, \ldots, x_n)$, allora per il lemma 1.2.2 $C(x, x_1, \ldots, x_n)[y/x]$ per una qualche variabile y di $\mathcal{L}$ occorre in φ e per ipotesi induttiva (con $y = x_k$), vale $\mathcal{M} \not\models C(c_k, c_1, \ldots, c_n)$ da cui la tesi;

5. se $B(x_1, \ldots, x_n) = \exists x C(x, x_1, \ldots, x_n)$, allora per il lemma 1.2.2 $C(t, x_1, \ldots, x_n)$ occorre in φ per ogni termine t di $\mathcal{L}$; per ipotesi induttiva, per ogni termine chiuso u di $\mathcal{L}_\mathcal{C}$, vale $\mathcal{M} \not\models C(u, c_1, \ldots, c_n)$, da cui $\mathcal{M} \not\models \exists x C(x, c_1, \ldots, c_n)$. Se per assurdo adesso si avesse che $\mathcal{M} \models C(\tau, c_1, \ldots, c_n)$ per un termine chiuso τ allora si avrebbe per definizione dei termini $\tau = t(c_{i_1}, \ldots, c_{i_k})$, con $t(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ termine di $\mathcal{L}$. Ma allora, per il lemma 1.2.2, avremmo che la formula $C(t(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}), x_1, \ldots, x_n)$ occorre in un sequente di φ e quindi, per ipotesi induttiva, $\mathcal{M} \not\models C(t(c_{i_1}, \ldots, c_{i_k}), c_1, \ldots, c_n)$, il che è assurdo.

□

L'aspetto più rilevante di questo teorema è quello che emerge rileggendo il lemma 1.2.3 alla luce della dimostrazione del teorema: il contromodello di A deriva da un ramo della paraprova di A rileggendo ogni formula occorrente in un sequente del ramo come la sua duale; è decisivo qui che l'appartenenza al ramo sia in accordo con questa dualità: in primo luogo non ci sono mai formule atomiche contraddittorie nel ramo, il che permette l'interpretazione di esso come contromodello; inoltre, se $A \wedge B$ è in φ allora una tra A e B è in φ; sia ad esempio A: nella rilettura duale il modello soddisferà $\neg A$, il che è sufficiente a refutare $A \wedge B$; nel caso di $A \vee B$, in φ saranno presenti entrambe A e B, e quindi il modello soddisferà tanto $\neg A$ quanto $\neg B$; similmente negli altri casi.

D'altra parte, però, il fatto che il ramo generi un contromodello può essere visto come la conseguenza del ben più importante fatto che esso in un certo senso corrisponda a una paraprova duale all'analisi canonica di A: basta infatti associare a ogni caso, nella costruzione dell'analisi canonica, un caso duale, come potrà facilmente vedersi dal seguente esempio

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \neg A, A}\,Ax}{\vdash \neg A, C, A}\,W \qquad \dfrac{}{\vdash \neg B, C, A}\,\maltese}{\vdash \neg A \wedge \neg B, C, A}\,(\wedge)}{\vdash \neg A \wedge \neg B, C \vee A}\,(\vee)}{\vdash (\neg A \wedge \neg B) \vee (C \vee A)}\,(\vee) \qquad \Rightarrow \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash B}\,\maltese}{\vdash A \vee B}\,(\vee) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\vdash \neg C}\,\maltese \quad \dfrac{}{\vdash \neg A}\,\maltese}{\vdash \neg C \wedge \neg A}\,(\wedge)}{\vdash (A \vee B) \wedge (\neg C \wedge \neg A)}\,(\wedge) \tag{1.2.6}$$

in cui la prima derivazione π di $LK_{\maltese}$ corrisponde all'analisi canonica di $(\neg A \wedge \neg B) \vee (C \vee A)$ e la seconda alla paraprova duale λ indotta dal ramo scorretto di π, ovvero $\varphi = \{(\vee), (\vee), (\wedge), (\maltese)\}$. Anche questa dualità ha un preciso contenuto procedurale, espresso dalla eliminazione del taglio nella paraprova seguente:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi \\ \vdash (\neg A \wedge \neg B) \vee (C \vee A)\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\,\lambda \\ \vdash (A \vee B) \wedge (\neg C \wedge \neg A)\end{array}}{\vdash}\,cut \tag{1.2.7}$$

In definitiva l'esistenza del modello, che caratterizza il teorema di completezza in termini puramente semantici, si manifesta adesso come la conseguenza di un fatto puramente interno alla sintassi di LK, o meglio di $LK_{\maltese}$, ovvero l'esistenza di opportune paraprove duali all'analisi canonica. L'approccio basato sulla dualità e sulla sua caratterizzazione procedurale mediante l'eliminazione del taglio appare dunque in linea con il proposito di una spiegazione delle condizioni di possibilità della semantica entro i confini della sintassi e vale quindi la pena di andare avanti su tale linea.

1.2.2 Il polo

In questo paragrafo, attraverso la nozione di "polo", cercheremo di ricostruire in termini un po' più rigorosi le intuizioni emerse dalle osservazioni sulla "dualità" nell'analisi canonica.

Cominciamo con una definizione:

Definizione 1.2.4 (polo)**.** *Data una operazione binaria $\langle\cdot|\cdot\rangle : A \times B \to C$ simmetrica, un* polo *per essa è dato da un sottoinsieme $P \subset C$; dato un $X \subset A$ (risp. un $Y \subset B$), è detto insieme* polare *di X (risp. di Y), e scritto X^p (risp. Y^p) il sottoinsieme di B (risp. di A) dato da:*

$$\begin{aligned} X^p &:= \{y \in B | \forall x \in X \langle x|y\rangle \in P\} \\ Y^p &:= \{x \in A | \forall y \in Y \langle y|x\rangle \in P\} \end{aligned} \tag{1.2.8}$$

Un insieme polare a un insieme X sarà chiamato anche *ortogonale* a X. Questa denominazione viene direttamente dall'algebra lineare, e risulterà ancor più naturale quando, nel capitolo quarto, faremo riferimento a operatori su spazi di Hilbert (vd. §4.1).

Proposizione 1.2.6 (proprietà del polo)**.** *Data una operazione binaria $\langle\cdot|\cdot\rangle : A\times B \to C$ e un* polo *$P \subset C$ per essa, valgono le seguenti proprietà:*

(i) *(controvarianza) $X \subset X' \Rightarrow X'^p \subset X^p$;*

(ii) *(chiusura) l'insieme $Pol(A) \subseteq \wp(A)$ (risp. $Pol(B) \subseteq \wp(B)$) dei polari di A (risp. di B), ovvero dei sottoinsiemi di A (B) della forma X^p è chiuso per intersezioni arbitrarie. In particolare, A (B) sono polari e X^{pp} è il più piccolo insieme polare contenente X;*

(iii) $X^{ppp} = X^p$.

Dimostrazione. (i) $X'^p = \{y \in B | \forall x \in X' \langle x|y\rangle \in P\}$ dunque se $y \in X'^p$ e $x \in X$, si ha che $\langle x|y\rangle \in P$, e dunque $y \in X^p$.

(ii) Sia $\{X_i^p\}_{i\in I}$ una famiglia di insiemi polari indiciata da I. Allora $\bigcap_{i\in I} X_i^p = \{y \in B | \forall i \in I, \forall x \in X_i \langle x|y\rangle \in P\} = (\bigcup_{i\in I} X_i)^p$. Si vede subito che $A = \emptyset^p$ ed inoltre sia $Y^p \neq X^{pp}$ tale che $X \subset Y^p$ (assumendo $X \neq X^{pp}$); dal punto (i) segue che $Y \subset X^p$; se $x \in X^{pp}$, allora per ogni $y \in X^p$ si avrà $\langle x|y\rangle \in P$ e dunque anche per ogni $z \in Y$ si avrà $\langle x|z\rangle \in P$, da cui segue $X^{pp} \subseteq Y^p$.

(iii) Che $X^p \subseteq X^{ppp}$ segue dal fatto che vale sempre $X \subseteq X^{pp}$: infatti, se $x \in X$ e $y \in X^p$, si ha sempre, per definizione di X^p, che $\langle x|y\rangle \in P$; d'altra parte questo vuol dire proprio che $x \in X^{pp}$; per l'altro senso, sia $x \in X^{ppp}$; allora, per ogni $y \in X^{pp}$, vale $\langle x|y\rangle \in P$; dato $z \in X$ si ha subito $z \in X^{pp}$, per il punto precedente, e dunque $\langle x|z\rangle \in P$, da cui $x \in X^p$.

□

Un esempio "insiemistico" di polo è dato dalla funzione $id(x,y) : a \times a \to \{0,1\}$ definita sul prodotto cartesiano con se stesso di un qualunque insieme a come segue:

$$\begin{cases} id(x,y) = 1 & \text{se } x = y \\ id(x,y) = 0 & \text{se } x \neq y \end{cases} \tag{1.2.9}$$

scegliendo come polo $\{0\}$, si verifica subito $Pol(a) = \wp(a)$ e, per ogni $b \subseteq a$, si ha $b^{\{0\}} = \complement b$.

Derivazioni vs contro-modelli Un secondo, ben più interessante, esempio è dato proprio dal teorema di completezza dimostrato al paragrafo precedente: questo infatti ci fa intravedere una dualità tra derivazioni di LK e modelli che potremmo descrivere attraverso una funzione $\langle\cdot|\cdot\rangle_C$: {derivazioni di LK} $\times$ {modelli di $\mathcal{L}$} $\to \{0,1\}$ definita come segue[5]:

$$\begin{cases} \langle\pi|\mathcal{M}\rangle_C = 0 & \text{se } \pi :\vdash A \text{ e } \mathcal{M} \vDash \neg A \\ \langle\pi|\mathcal{M}\rangle_C = 1 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{1.2.10}$$

con polo $\{0\}$; il teorema di completezza ci assicura infatti che $\emptyset^{\{0\}} \neq \emptyset$: se l'insieme $dim_A = \{\pi|\pi :\vdash A\}$ è vuoto, il suo polare $dim_A^{\{0\}} = \{\mathcal{M}|\mathcal{M} \vDash \neg A\}$ è non vuoto e viceversa, se $mod_A = \{\mathcal{M}|\mathcal{M} \vDash A\} = \emptyset$, allora $dim_{\neg A} \neq \emptyset$. D'altra parte il limite di questa interpretazione della completezza è dato proprio dal suo teorema cugino: la correttezza, ossia il teorema che afferma che se una formula non è soddisfatta da almeno un modello, allora non è derivabile in LK; questo teorema implica infatti che ogni volta che dim_A o mod_A sono non vuoti, i loro polari sono automaticamente vuoti! Come afferma Girard:

> Everything takes place in a universe where the subject (which will become a formal system) and the object (a model, therefore a set) answer to each other without ever meeting. (Girard, [36]).

Ovvero non c'è mai alcun contatto tra derivazione e modello, col risultato che, banalmente, le derivazioni (di una stessa formula) non sono separate dai modelli in quanto la semplice esistenza di una derivazione fa sì che non esistano i modelli opportuni e, d'altra parte, per lo stesso motivo, i modelli (di una stessa formula) non sono separati dalle derivazioni. Tutto questo riporta alla luce i problemi emersi nel paragrafo §1.1.5 circa il rapporto tra teoria e modello e ci spinge a trovare dei quadri alternativi in cui descrivere questa relazione.

Prove vs para-prove Un quadro alternativo è già stato in realtà suggerito nel paragrafo precedente e vale la pena di riconsiderarlo adesso: se ai modelli sostituiamo le paraprove e in generale alle derivazioni di LK le derivazioni di $LK_{\maltese}$, allora possiamo costruire una nuova polarità basata questa volta sull'eliminabilità dei tagli e nella quale non corriamo il rischio di incorrere in insiemi polari vuoti, dal momento che nessun insieme di derivazioni di una data formula è mai vuoto.

Definiamo allora una funzione $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\maltese} : DER_{\maltese} \times DER_{\maltese} \to \{0,1\}$, dove $DER_{\maltese}$ è l'insieme delle derivazioni di $LK_{\maltese}$, ossia delle paraprove, come segue:

$$\begin{cases} \langle\pi|\lambda\rangle_{\maltese} = 0 & \text{se è possibile tagliare le due derivazioni} \\ \langle\pi|\lambda\rangle_{\maltese} = 1 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{1.2.11}$$

[5] Con $\pi :\vdash \Gamma$ intendo dire che π è una derivazione in LK del sequente $\vdash \Gamma$.

con polo sempre uguale a $\{0\}$. Definendo $dim_{\neg A} := \{\pi\}^{\{0\}}$, dove π è una arbitraria paraprova di A, possiamo verificare l'identità $dim_A^{\{0\}} = dim_{\neg A}$, la quale certifica la natura *interattiva* di questa dualità: una paraprova π che si confronta con una paraprova λ, può "credersi" una dimostrazione (derivazione in LK) se vince nel confronto con λ, ovvero se ad esempio nella disputa λ è costretta a "estrarre" i demoni, ossia a cedere, prima che sia costretta anche π a farlo. D'altra parte λ, perdendo, riconosce la correttezza di π relativamente a se stessa: λ non è altro che un *test* per π. L'idea sarebbe dunque quella di trovare un quadro entro il quale valga che, se π non è una derivazione corretta, allora esiste una paraprova λ polare a π e vincente su π così che, affinchè π sia una dimostrazione, deve superare tutti i test (il viceversa è ovvio). Si noti che quello che stiamo cercando non è altro che una forma "interna" del teorema di completezza, perchè è del tipo:

> *Se π non è derivabile senza tagli e senza demoni, allora esiste una paraprova λ duale a π che vince nella disputa indotta.*

Nel caso riuscissimo a dimostrare qualcosa del genere (ci riusciremo in §2.2.3 con la ludica) potremmo pensare di sfruttare le dispute per definire una nozione tutta interna di test, da sostituire a quella di modello; tuttavia si noti che fintantochè restiamo in LK i test così definiti non andranno molto oltre i modelli, soprattutto per quanto riguarda le proprietà di separazione: se π_1 e π_2 sono paraprove distinte di $\vdash A$, si ha $\pi_1 \in \{\pi_2\}^{\{0\}\{0\}}$ e $\pi_2 \in \{\pi_1\}^{\{0\}\{0\}}$, il che certifica che nemmeno i test separano le paraprove e, a fortiori, le dimostrazioni di una stessa formula. Come si vedrà a partire da §1.2.3, questo limite non è tanto un limite dell'idea che stiamo seguendo, quanto un limite della sintassi stessa di LK, un limite che riusciremo a superare attraverso una analisi più fine delle procedure dell'eliminazione del taglio.

1.2.3 Strategie e spazi coerenti

Il paragrafo precedente ci ha impegnato, senza successo, nella ricerca di un'alternativa interna alla semantica dei modelli, ovvero di una interpretazione della logica che fosse compatibile con due requisiti: la dualità, espressa nel caso dei modelli dal teorema di completezza, e delle proprietà di separazione non banali, ovvero la capacità di discriminare tra diverse derivazioni di uno stesso sequente, un problema, questo, che ha a che fare con la "povertà semantica" di cui ci eravamo lamentati quando si discuteva di modelli "non standard" (vd. §1.1.5). In questo paragrafo adotteremo un approccio diverso: anzichè ricercare strutture che soddisfino i nostri requisiti, partiremo dai requisiti e costruiremo la nostra struttura. L'intuizione fondamentale che dovrà guidarci sarà quella dell'eliminazione del taglio tra una paraprova di A e una di $\neg A$ vista come una disputa tra due giocatori P e O.

Supponiamo allora che x e x' stiano per due *partite* già giocate tra P e O. Possiamo pensare ad esse come a delle sequenze di azioni alternate di P e O; supponiamo che sia in programma una terza partita x''; è naturale per O farsi delle aspettative su quelle che saranno le possibili *strategie* del suo avversario; evidentemente O dovrà studiare le partite già giocate da P e ricostruire in esse le strategie di P; quali sono i casi in cui, in due partite distinte (x e x') possiamo dire che P abbia adoperato la stessa strategia? Si tratterà dei casi in cui la differenza tra le due partite *non è ascrivibile a* P, ovvero in cui il primo ad aver fatto qualcosa di diverso in x' rispetto a x è stato O, costringendo P a delle mosse alternative. Del resto, in teoria dei giochi, una strategia è definita come un piano completo delle mosse che un giocatore è disposto a fare, data una qualunque strategia del suo avversario; questo, come sa bene chi gioca a scacchi, vuol dire che una partita è insufficiente per scoprire la strategia dei giocatori.

Le uniche proprietà che, a un livello così generale, possiamo attribuire alla relazione tra partite che rivelano una stessa strategia per P sono la *riflessività* e la *simmetria* e ci acconteremo di esse:

Definizione 1.2.5 (spazio coerente)**.** *Uno spazio coerente X è dato da una coppia $(|X|, \coh_X)$ con $|X|$ insieme e $\coh_X$ relazione su $|X|$ riflessiva e simmetrica.*

Intuitivamente, uno spazio coerente è un insieme di partite, se vogliamo è un gioco, con una relazione di coerenza che induce una nozione di strategia per un giocatore P:

Definizione 1.2.6 (cricca)**.** *Una cricca $a \sqsubset X$ di uno spazio coerente X è un insieme $a \subseteq |X|$ di punti di X a due a due coerenti.*

Considerando le cricche come le strategie dell'esempio da cui siamo partiti, diciamo che se x e x' sono partite in cui P adopera la stessa strategia, possiamo scrivere $x \coh_X x'$ e $\{x, x'\} \sqsubset X$. D'altra parte possiamo vedere che una strategia per O è rivelata da un insieme di partite distinte in cui il primo a cambiare mossa è P, di conseguenza, se x e x' denotano partite distinte, saranno coerenti per O se e solo se non lo sono per P: abbiamo così verificato una dualità tra P e O:

Definizione 1.2.7 (spazio coerente duale)**.** *Sia $X = (|X|, \coh_X$ uno spazio coerente. Il duale di X, che scrivo $X^\perp$, è dato dalla coppia $(|X|, \coh_{X^\perp})$ con, per ogni $x, y \in |X|$, $x \coh_{X^\perp} y \Leftrightarrow x \asymp_X y$, dove $x \asymp_X y$ sta per la* incoerenza larga *$x = y \vee \neg x \coh y$.*

Introduciamo la seguente notazione per la *coerenza stretta* $x \frown_X y \Leftrightarrow x \coh_X y \wedge x \neq y$ e per la *incoerenza stretta* $x \smile_X y \Leftrightarrow x \asymp y \wedge x \neq y$.

Una conseguenza immediata della definizione di spazio duale è la seguente:

$$a \sqsubset X, b \sqsubset X^\perp \Rightarrow \sharp(a \cap b) \leq 1 \tag{1.2.12}$$

Due avversari che adottino due strategie ben determinate incontrandosi danno luogo ad al più una partita distinta: intuitivamente, se le loro strategie non cambiano, la partita che giocano sarà sempre la stessa!

L'equazione 1.2.12 ci permette di definire un polo: dato uno spazio coerente X, definisco, per ogni $a, b \subseteq |X|$, $\langle a|b\rangle_X := \sharp(a \cap b)$ con polo $\{0, 1\}$. Come vedremo in seguito, gli insiemi polari $A^{\{0,1\}}$ (con $A \subseteq \wp(|X|)$) sono esattamente i sottospazi coerenti di X.

Le funzioni stabili Vediamo alcune proprietà delle cricche di uno spazio coerente:

Proposizione 1.2.7 (proprietà delle cricche). *Sia X uno spazio coerente.*

(*i*) $\emptyset \sqsubset X$;

(*ii*) $a, b \sqsubset X \Rightarrow a \cap b \sqsubset X$;

(*iii*) $a \sqsubset X, b \subseteq a \Rightarrow b \sqsubset X$;

(*iv*) *sia* $(a_i)_{i\in I}$ *una famiglia di cricche con* I *insieme* filtrante, *ossia dotato di una relazione binaria* $<_I$ *tale che* $i, j \in I \wedge i <_I j \Rightarrow a_i \subseteq a_j$ *e* $\forall i, j \in I \exists k \in I$ *t.c.* $a_i, a_j \subseteq a_k$; *allora* $\uparrow \bigcup_{i\in I} a_i \sqsubset X$.

Dimostrazione. Le proprietà (*i*) e (*iii*) sono immediate. La (*ii*) segue dalla (*iii*), in quanto $a \cap b \subseteq a$. Per quanto riguarda la (*iv*), siano $x, y \in \uparrow \bigcup_{i\in I} a_i$ tali che $x \smile_X y$. Esisteranno allora $i, j \in I$ tali che $x \in a_i$ e $y \in a_j$. D'altra parte esisterà anche $k \in I$ tale che $a_i, a_j \subseteq a_k$ e dunque $x, y \in a_k$. Ma allora, dal fatto che $a_k \sqsubset X$, segue un assurdo. □

Una proprietà molto interessante è proprio la (*i*), in quanto assicura che ogni spazio coerente, ogni gioco, abbia almeno una cricca, ossia una strategia per P. La (*iv*) invece ci permetterà di definire una sorta di continuità per le funzioni sugli spazi coerenti. Ma cosa sono tali funzioni? Possiamo anzitutto pensare che una "buona" funzione, una funzione continua se si vuole, manderà cricche in cricche, ossia preserverà le strategie. Possiamo però immaginare qualcosa di più: una tale funzione potrebbe essa stessa rappresentare una strategia in un gioco più complesso, il quale richieda appunto di applicare delle sottostrategie. Il requisito fondamentale, come stiamo per vedere, sarà che una strategia per il gioco complesso non possa applicare la sottostrategia al di fuori dei limiti imposti dalla metafora del gioco: finitezza e sequenzialità. Infatti una strategia può comprendere un numero infinito di partite; tuttavia, nel caso di una singola partita, un sottoinsieme finito della strategia (anch'esso una strategia per la proposizione precedente) è chiaramente sufficiente a determinare l'azione del giocatore, in analogia con il teorema di compattezza della logica, in cui ogni singola derivazione in una teoria richiede al più un numero finito di formule di questa. Per quanto riguarda la sequenzialità, essa è una diretta conseguenza dell'alternanza delle mosse dei due giocatori. Vediamo ora le cose in modo un po' più tecnico.

Definizione 1.2.8 (funzioni stabili). *Siano* X *e* Y *spazi coerenti. Una funzione* $F : X \to Y$ *è detta stabile se soddisfa:*

cricche $a \sqsubset X \Rightarrow F(a) \sqsubset Y$;

monotonia $a \subseteq b \sqsubset X \Rightarrow F(a) \subseteq F(b)$;

continuità $(a_i)_{i\in I}$ *famiglia di cricche, con* I *filtrante* $\Rightarrow F(\uparrow \bigcup_{i\in I} a_i) = \uparrow \bigcup_{i\in I} F(a_i)$;

stabilità $a \cup b \sqsubset X \Rightarrow F(a \cap b) = F(a) \cap F(b)$.

Teorema 1.2.8. *Siano X, Y spazi coerenti e $F : X \to Y$ stabile. Allora, dati $a \sqsubset X$ e $z \in F(a)$, esiste $b \subseteq_{fin} a$ tale che $z \in F(b)$ e, inoltre, se b è scelto come minimale, allora è unico.*

Dimostrazione. Sia $z \in F(a)$; si ha che $a =\uparrow \bigcup_{1 \leq i \leq \sharp\wp_{fin}(a)} a_i$, con $a_i \in \wp_{fin}(a)$ (si noti che $\wp_{fin}(a)$ è un ordine filtrante). Ma allora $z \in F(a) = F(\uparrow \bigcup_{1 \leq i \leq \sharp\wp_{fin}(a)} a_i) =\uparrow \bigcup_{1 \leq i \leq \sharp\wp_{fin}(a)} F(a_i)$, da cui $\exists k \in \sharp\wp_{fin}(a)$ tale che $z \in F(a_k)$, con $a_k \in \wp_{fin}(a)$.

Sia ora $z \in F(b)$ e $z \in F(b')$ con $b \neq b'$ entrambi minimali. Ne segue che $z \in F(b) \cap F(b') = F(b \cap b')$, in quanto sicuramente $b \cup b' \sqsubset X$. Ma allora $b \cap b' \subset b, b'$ e dunque b e b' non sono minimali, contraddizione.

$\square$

Possiamo vedere la rilevanza delle funzioni stabili, e la loro aderenza al requisito di sequenzialità, attraverso un semplice esempio, quello della cosiddetta *"o" parallela*, ma abbiamo prima bisogno di definire alcune operazioni sugli spazi coerenti:

Definizione 1.2.9 (operazioni moltiplicative)**.** *Siano X, Y spazi coerenti,*

- $X \otimes Y := (|X| \times |Y|, \overset{\frown}{\smile}_{X \otimes Y})$, *con* $(x_1, y_1) \overset{\frown}{\smile}_{X \otimes Y} (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \overset{\frown}{\smile}_X x_2 \wedge y_1 \overset{\frown}{\smile}_Y y_2$;
- $X \parr Y := (|X| \times |Y|, \overset{\frown}{\smile}_{X \otimes Y})$, *con* $(x_1, y_1) \frown_{X \parr Y} (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \frown_X x_2 \vee y_1 \frown_Y y_2$;
- $X \multimap Y := (|X| \times |Y|, \overset{\frown}{\smile}_{X \multimap Y})$, *con* $(x_1, y_1) \frown_{X \multimap Y} (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \frown_X x_2 \to y_1 \frown_Y y_2$.

Intuitivamente una strategia per il tensore $X \otimes Y$ di due giochi è data da una strategia per ognuno dei due. Per capire cosa sia una strategia per il par $X \parr Y$ di due giochi basta la seguente:

Proposizione 1.2.9 (dualità moltiplicativa)**.** $(X \otimes Y)^\perp = X^\perp \parr Y^\perp$.

Dimostrazione. E' sufficiente verificare la dualità delle definizioni di $\overset{\frown}{\smile}_{X \otimes Y}$ e $\frown_{X^\perp \parr Y^\perp}$ per concludere. $\square$

In altre parole una strategia per P per $X \parr Y$ non è altro che una strategia per O per $X^\perp \otimes Y^\perp$; vale a dire: la dualità degli spazi coerenti corrisponde allo scambio tra i giocatori. Infine si verifica immediatamente che $X \multimap Y = X^\perp \parr Y$:

Enunciamo senza dimostrare alcune proprietà delle operazioni moltiplicative:

$$\begin{aligned}
X \otimes Y \simeq Y \otimes X &\text{ commutatività di } \otimes\\
X \parr Y \simeq Y \parr X &\text{ commutatività del } \parr\\
X \multimap Y \simeq Y^{\perp} \multimap X^{\perp} &\text{ commutatività di } \multimap\\
X \otimes (Y \otimes Z) \simeq (X \otimes Y) \otimes Z &\text{ associatività di } \otimes\\
X \parr (Y \parr Z) \simeq (X \parr Y) \parr Z &\text{ associatività del } \parr\\
X \multimap (Y \multimap Z) \simeq (X \otimes Y) \multimap Z &\text{ associatività di } \multimap\\
X \multimap (Y \parr Z) \simeq (X \multimap Y) \parr Z &\text{ associatività di } \multimap\\
X \otimes \mathbf{1} \simeq X &\text{ elemento neutro di } \otimes\\
X \parr \perp \simeq X &\text{ elemento neutro di } \parr\\
\mathbf{1} \multimap X \simeq X, X \multimap \perp \simeq X^{\perp} &\text{ elementi neutri di } \multimap
\end{aligned} \tag{1.2.13}$$

dove gli spazi $\mathbf{1}$ e $\perp$ sono dati da $\mathbf{1} := \perp := (\{a\}, \{< a, a >\})$, con a insieme qualunque; si tratta di spazi autoduali che si differenziano solo in relazione al contesto.

Torniamo ora alla funzione *"o" parallela* $OR : Bool \times Bool \to Bool$ definita sullo spazio coerente $Bool \otimes Bool$, con $Bool = (\{0, 1\}, \{< 0, 0 >, < 1, 1 >\})$; $Bool \otimes Bool$ è uno spazio coerente con esattamente quattro punti $0, 0', 1, 1'$; OR è definita dalle seguenti clausole:

$$F(a) = \begin{cases} \{1\} & \text{se } 1 \in a \vee 1' \in a \\ \{0\} & \text{se } a = \{0, 0'\} \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{1.2.14}$$

Questa funzione non può essere sequenziale, in quanto la prima clausola ci dice che essa "osserva" contemporaneamente se ci sia un 1 nel primo o nel secondo fattore $Bool$. In effetti, OR non è stabile in quanto $\{1\}$ e $\{1'\}$ sono entrambi minimali per $a = \{1, 1'\}$.

Prima di completare la discussione delle funzioni stabili, introduciamo altre operazioni sugli spazi coerenti:

Definizione 1.2.10 (operazioni additive)**.** *Siano X_0, X_1 spazi coerenti.*

- $X_0 \oplus X_1 := (|X_0| + |X_1|, \frown_{X_0 \oplus X_1})$, *dove* $|X_0| + |X_1| = \{< x, i > | x \in |X_i|, i \in \{0, 1\}\}$ *e* $< x, i > \frown_{X_0 \oplus X_1} < y, j > \Leftrightarrow i = j \wedge x \frown_{X_i} y$*;*
- $X_0 \,\&\, X_1 := (|X_0| + |X_1|, \frown_{X_0 \& X_1})$ *dove* $< x, i > \frown_{X_0 \& X_1} < y, j > \Leftrightarrow (i = j \wedge x \frown_{X_i} y) \vee i \neq j$.

Una strategia per P per il "più" di due giochi $X \oplus Y$ è, intuitivamente, una strategia per l'uno o per l'altro gioco. Evidentemente, avendo P possibilità di scelta, una strategia per O sarà data da una strategia per entrambi i giochi, come rivelato dalla seguente proposizione:

Proposizione 1.2.10 (dualità additiva)**.** $(X \oplus Y)^{\perp} = X^{\perp} \,\&\, Y^{\perp}$.

Dimostrazione. $< x, i > \frown_{(X_0 \oplus X_1)^\perp} < y, j >$ se e solo se $< x, i > \asymp_{(X_0 \oplus X_1)} < y, j >$ se e solo se $i \neq j \vee (i = j \wedge x \asymp_{X_i} y)$ se e solo se $< x, i > \frown_{X_0^\perp \& X_1^\perp} < y, j >$. □

Enunciamo senza dimostrare alcune proprietà delle operazioni additive e moltiplicative:

$$\begin{aligned} X \oplus Y \simeq Y \oplus X & \text{ commutatività di } \oplus \\ X \,\&\, Y \simeq Y \,\&\, X & \text{ commutatività del } \& \\ X \oplus (Y \oplus Z) \simeq (X \oplus Y) \oplus Z & \text{ associatività di } \oplus \\ X \,\&\, (Y \,\&\, Z) \simeq (X \,\&\, Y) \,\&\, Z & \text{ associatività del } \& \\ X \otimes (Y \oplus Z) \simeq (X \otimes Y) \oplus (X \otimes Z) & \text{ distributività } \otimes/\oplus \\ X \parr (Y \,\&\, Z) \simeq (X \parr Y) \,\&\, (X \parr Z) & \text{ distributività } \parr/\& \\ X \multimap (Y \,\&\, Z) \simeq (X \multimap Y) \,\&\, (X \multimap Z) & \text{ distributività } \multimap/\& \\ (X \oplus Y) \multimap Z \simeq (X \multimap Y) \,\&\, (X \multimap Z) & \text{ distributività } \multimap/\oplus \\ X \oplus \mathbf{0} \simeq X & \text{ elemento neutro di } \oplus \\ X \,\&\, \top \simeq X & \text{ elemento neutro di } \& \end{aligned} \tag{1.2.15}$$

in cui $\top := \mathbf{0} := (\emptyset, \emptyset)$ sono spazi autoduali.

Vogliamo adesso dare un senso preciso all'intuizione secondo cui una funzione stabile corrisponde a una strategia in un gioco più complesso; per fare questo abbiamo prima bisogno di introdurre altre due operazioni sugli spazi coerenti:

Definizione 1.2.11 (operazioni esponenziali)**.** *Sia, per ogni spazio coerente* X*,* $X_{fin} := \{a | a \sqsubset X \wedge \sharp a < \infty\}$.

- $!X := (X_{fin}, \frown_{!X})$ *con* $a \frown_{!X} b \Leftrightarrow a \cup b \sqsubset X$*;*
- $?X := (X_{fin}, \smallfrown_{?X})$ *con* $a \smallfrown_{?X} b \Leftrightarrow \neg a \cup b \sqsubset X^\perp$*.*

Assolutamente immediata è la seguente:

Proposizione 1.2.11 (dualità esponenziale)**.** $(!X)^\perp = ?X^\perp$.

Possiamo vedere $!X$ come un gioco in cui ha un ruolo determinante la *memoria*: una partita infatti corrisponde, per P, a una sua strategia per il gioco X, ossia presuppone che egli tenga a mente come si è comportato in un certo numero finito di partite già giocate a quel gioco. Dualmente, per O, vale esattamente lo stesso discorso.

Enunciamo senza dimostrare le proprietà più importanti delle operazioni esponenziali (che giustificano, tralatro, l'intera nomenclatura):

$$\begin{aligned} !(X \,\&\, Y) &\simeq !X \otimes !Y \\ ?X \parr ?Y &\simeq ?(X \oplus Y) \\ !\top &\simeq \mathbf{1} \\ ?\mathbf{0} &\simeq \bot \end{aligned} \tag{1.2.16}$$

Sia ora $F : X \to Y$ una funzione stabile, definiamo anzitutto la sua *traccia*:

Definizione 1.2.12 (traccia di F)**.** *La traccia di F, scritta $tr(F)$, è definita come $tr(F) := \{< a, y >: y \in F(a) \wedge \forall b \subsetneq a \ y \notin F(b)\}$.*

Si noti che la traccia è ben definita in virtù della stabilità di F, che ci assicura l'esistenza di elementi finiti minimali $b \subseteq a$ tali che $y \in F(a) \Rightarrow y \in F(b)$.

Data la traccia possiamo sempre ricostruire la funzione stabile da cui proviene, attraverso l'*applicazione* $(tr(F))(a) := \{y \in |Y| | \exists b \subset a \ \ < b, y > \in tr(F)\}$, dato $a \sqsubset X$. Nel prossimo teorema non solo dimostreremo questo punto, ma caratterizzeremo le funzioni stabili come cricche (e dunque strategie) di un opportuno spazio coerente:

Teorema 1.2.12 (caratterizzazione delle funzioni stabili)**.** *Siano X, Y spazi coerenti. La traccia $tr(\cdot)$ induce una bijezione tra l'insieme delle funzioni stabili $F : X \to Y$ e l'insieme delle cricche dello spazio $!X \multimap Y$ tale che, se F è una funzione stabile, $tr(F) \sqsubset !X \multimap Y$ e se $f \sqsubset !X \multimap Y$, allora $(f)\cdot$ è una funzione stabile definita, per ogni $a \sqsubset X$, da $(f)(a) := \{y \in |Y| | \exists b \subset a \ \ < b, y > \in f\}$.*

Dimostrazione. Proviamo per prima cosa che $tr(F)$ è una cricca di $!X \multimap Y$: siano $< a, y >, < a', y' > \in tr(F)$ e valga $a \cup a' \sqsubset X$ (ossia $a \coh_{!X} a'$); allora $y, y' \in F(a \cup a')$, da cui $y \coh_Y y'$. Sia poi $a \neq a'$ e $y = y'$; allora avremmo due soluzioni minimali $y \in F(a), y \in F(a')$ per $y \in F(a \cup a')$, contraddizione.

Proviamo adesso la stabilità di $(f)\cdot$:

cricca se $b, b' \subset a$, allora $b \cup b' \sqsubset X$, e dunque $< b, y >, < b', y' > \in f \Rightarrow y \frown_Y y'$ per definizione di $\multimap$;

monotonia sia $b \subseteq a$; è immediato verificare che $(f)(b) \subseteq (f)(a)$;

continuità sia $a = \uparrow \bigcup_{i \in I} a_i$, con I filtrante; allora $(f)(a) = \{y | \exists k \in I \exists b \subset a \ b \subseteq a_k \wedge < b, y > \in f\}$; d'altra parte $z \in \uparrow \bigcup_{i \in I} \{y | \exists b \subseteq a_i \ \ < b, y > \in f\}$ se e solo se esiste un $k \in I$ tale che $z \in \{y | \exists b \subseteq a_k \ \ < b, y > \in f\}$, se e solo se $z \in (f)(a)$;

stabilità sia $a \cup b \sqsubset X$ e sia $y \in (f)(a) \cap (f)(b)$; allora $\exists a' \subseteq a, b' \subseteq b \ \ < a', y >, < b', y > \in f$; d'altra parte $a' \cup b' \subseteq a \cup b$ e dunque $a' \cup b' \sqsubset X$ e, per coerenza, si ha che $a' = b'$: ma allora $a' \subseteq a \cap b$ ed è tale che $< a', y > \in f$, ovvero $y \in (f)(a \cap b)$.

Resta da provare la bijettività: è sufficiente mostrare che $(tr(F))(a) = F(a)$ e che $tr((f)\cdot) = f$, il che è una semplice verifica. $\square$

Si osservi che è possibile definire, per ogni $F : X \to Y$ stabile, la sua aggiunta $F^{\perp}$, associando a ogni $y \in |Y|$ il minimo $a_0 \in X_{fin}$ tale che $< a_0, y > \in tr(F)$.

Fin qui abbiamo portato avanti la teoria degli spazi coerenti senza fare alcuna assunzione circa l'universo propriamente logico che vorremmo le venisse associato. Nel prossimo paragrafo scopriremo che le poche premesse, di ordine strategico, da cui siamo partiti sono sufficienti per trovare, a partire dagli spazi coerenti, un calcolo dei sequenti con le proprietà di separazione che cerchiamo.

1.2.4 La linearità

E' arrivato il momento di chiedersi se le funzioni stabili che, come abbiamo visto, caratterizzano i requisiti per cui una funzione sulle strategie può essere concepita come una strategia essa stessa, siano sufficienti a costruire la "logica dei test" di cui siamo alla ricerca. Data una cricca $a \sqsubset X$, ossia una strategia per P, possiamo pensare a una funzione stabile $F : X \to Y$ (ad esempio con $Y = \perp$) come un test per a, così che a corrisponde a una strategia vincente, intuitivamente una derivazione in un qualche calcolo dei sequenti soddisfacente l'eliminazione del taglio, se "vince" con ogni test. Tuttavia, per il teorema 1.2.8, se F è stabile da X in Y e $y \in F(a)$, con $a \sqsubset X$, allora esiste un sottoinsieme finito $b \subseteq_{fin} a$ tale che $y \in F(b)$: questo vuol dire che, se b è non vuoto, e posto $b = \{x_1, \ldots, x_n\}$, saremo al più in grado di dire che $F(\{x_1, \ldots, x_n\}) \supseteq F(\{x_1\}) \cup \cdots \cup F(\{x_n\})$, e dunque il test per a dipenderà da un numero finito $\neq 0$ di punti di $|X|$, ossia di partite, ma non direttamente da ogni partita di $|X|$: il test non distingue chiaramente ogni partita di P, ma va "a manciate finite", si potrebbe dire. D'altra parte nulla esclude che $b = \emptyset$, nel qual caso si avrebbe, per ogni $x \in |X|$, per monotonia, $F(a) = F(\emptyset) \subseteq F(\{x\})$, e dunque il test non sarebbe in grado di dire granchè sulla cricca a. In definitiva, per ogni cricca a di X, esisterebbe un $n \in \mathbb{N}$, possibilmente anche 0, che limita la sensibilità del test stesso. Sembra dunque che la stabilità sia un requisito troppo leggero per i nostri scopi. Del resto la dualità ci porta a richiedere che un test per una paraprova sia tale che la paraprova stessa sia un test per il test, ma un test stabile $F : X \to \perp$ per una cricca $a \sqsubset X$ corrisponde a una cricca $tr(F) \sqsubset !X \multimap \perp$, e dunque perchè anche a sia un test per $tr(F)$ sarebbe necessario l'improbabile isomorfismo di spazi coerenti $!(!X \multimap \perp) \multimap \perp \simeq X$.

Queste osservazioni ci portano immediatamente alla seguente definizione:

Definizione 1.2.13 (funzioni lineari)**.** *Siano X, Y spazi coerenti; una funzione $F : X \to Y$ è detta lineare se è stabile e soddisfa i seguenti:*

non indebolimento *$F(\emptyset) = \emptyset$;*

non contrazione *$a \cup b \sqsubset X \Rightarrow F(a \cup b) = F(a) \cup F(b)$.*

ed al seguente teorema:

Teorema 1.2.13. *Siano X, Y spazi coerenti, $F : X \to Y$ una funzione lineare e $a \sqsubset X$. Allora $z \in F(a) \Rightarrow \exists! x \in a$ t.c. $z \in F(\{x\})$.*

Dimostrazione. Essendo F stabile, esiste $b \subseteq_{fin} a$ unico e minimale t.c. $z \in F(b)$. Allora sicuramente, per non indebolimento, $b \neq \emptyset$. D'altra parte, sia $b \neq \{x\}$, per ogni $x \in |X|$; allora si può dividere b in due b_1, b_2 tali che $b_1 \cup b_2 = b$ e $b_1 \cap b_2 = \emptyset$; ma allora si ha, per non contrazione, $F(b) = F(b_1 \cup b_2) = F(b_1) \cup F(b_2)$, da cui si ha che $z \in F(b_1)$ o $z \in F(b_2)$, contro la minimalità di b. □

Possiamo definire la *traccia* $tr(F)$ di una funzione lineare F come $tr(F) := \{< x, y > |y \in F(\{x\})\}$, la quale induce il seguente:

Teorema 1.2.14. *Siano X, Y spazi coerenti. La traccia $tr(\cdot)$ induce una bijezione tra l'insieme delle funzioni lineari $F : X \to Y$ e l'insieme delle cricche dello spazio $X \multimap Y$ tale che, se F è una funzione stabile, $tr(F) \sqsubset X \multimap Y$ e se $f \sqsubset X \multimap Y$, allora $(f)\cdot$ è una funzione lineare definita, per ogni $a \sqsubset X$, da $(f)(a) := \{y \in |Y| | \exists x \in a \ \ < x, y > \in f\}$.*

Dimostrazione. **(⇒)** Siano $< x, y >, < x', y' > \in tr(F)$ con $x \frown_X x'$; allora $\{x, x'\} \sqsubset X$ e dunque $F(\{x, x'\}) \sqsubset Y$; d'altra parte $y \in F(\{x\}), y' \in F(\{x'\})$, e per monotonia $F(\{x\}), F(\{x'\}) \subseteq F(\{x, x'\})$, ossia $y, y' \in F(\{x, x'\}) \sqsubset Y$, da cui $y \frown_Y y'$. Sia ora per assurdo $y = y'$; allora $\{x\}$ e $\{x'\}$ sono entrambi dati minimali per $y \in F(\{x, x'\})$.

(⇐) **cricche** Sia $f \sqsubset X \multimap Y$; sia $a \sqsubset X$ e $y, y' \in (f)(a)$; allora, da $< x, y >, < x', y' > \in f$ e da $x \frown_X x'$ segue $y \frown_Y y'$, da cui proviamo che $(f)(a) \sqsubset Y$;

monotonia Sia $b \subseteq a \sqsubset X$, è immediato $\{y | \exists x \in b \ \ < x, y > \in f\} \subseteq \{y | \exists x \in a \ \ < x, y > \in f\}$;

continuità Sia $a = \uparrow \bigcup_{i \in I} a_i$, con I filtrante; allora $(f)(a) = \{y | \exists k \in I \exists x \in a \ x \in a_k \wedge < x, y > \in f\}$; d'altra parte $z \in \uparrow \bigcup_{i \in I} \{y | \exists x \in a_i \ \ < x, y > \in f\}$ se e solo se esiste un $k \in I$ tale che $z \in \{y | \exists x \in a_k \ \ < x, y > \in f\}$, se e solo se $z \in (f)(a)$;

stabilità Sia $a \cup b \sqsubset X$ e sia $y \in (f)(a) \cap (f)(b)$; allora $\exists x \in a, x' \in b \ \ < x, y >, < x', y > \in f$; d'altra parte $\{x, x'\} \subseteq a \cup b$ e dunque $\{x, x'\} \sqsubset X$ e, per coerenza, si ha che $x = x'$: ma allora $x \in a \cap b$ ed è tale che $< x, y > \in f$, ovvero $y \in (f)(a \cap b)$.

no indebolimento Sia $x \in (f)(\emptyset)$; allora esiste $z \in \emptyset$ t.c. $< z, x > \in f$, il che è assurdo;

no contrazione Sia $a \cup b \sqsubset X$ e sia $y \in (f)(a \cup b)$; allora $\exists x \in a \cup b$ t.c. $< x, y > \in f$, da cui $x \in a$ o $x \in b$; in entrambi i casi, segue allora $y \in (f)a \cup (f)b$.

□

Questo teorema ci assicura che abbiamo trovato quello che cerchiamo: infatti dall'isomorfismo $X \multimap \perp \simeq X^\perp$ segue $(X \multimap \perp) \multimap \perp \simeq X$, ossia che le cricche di X sono dei test sui loro test, ossia sulle cricche di $X^\perp$, ovvero sulle funzioni lineari $F : X \to \perp$.

Una proprietà importante delle funzioni lineari ci è data in maniera "interna" alla dualità, ossia facendo esclusivamente riferimento al polo definito nel paragrafo precedente:

Teorema 1.2.15. *Siano X, Y spazi coerenti e $F : X \to Y$ lineare. Allora, per ogni $a \sqsubset X, b \sqsubset Y^\perp$, vale la seguente equazione:*

$$\sharp(F(a) \cap b) = \sharp(tr(F) \cap a \times b) \tag{1.2.17}$$

Dimostrazione. Sia $y \in (F(a) \cap b)$, allora $\exists! x \in a$ t.c. $y \in F(\{x\})$; si avrà allora $< x, y > \in a \cap b$ e $< x, y > \in tr(F)$. L'iniettività è immediata. Per l'altro verso, sia $z = < x, y > \in (tr(F) \cap a \times b)$; ne segue che $y \in F(\{x\})$, che $x \in a$ e che $y \in b$; allora, per monotonia, $y \in F(a)$ e possiamo iniettivamente associare y a z.

□

Questo teorema ci permette di definire l'*aggiunta* $F^{\perp}$, anch'essa lineare, di una funzione lineare attraverso l'equazione:

$$\sharp(F(a) \cap b) = \sharp(a \cap F^{\perp}(b)) \ (a \sqsubset X, b \sqsubset Y^{\perp}) \tag{1.2.18}$$

Le equazioni 1.2.17 e 1.2.18 riassumono concisamente il contenuto procedurale delle funzioni lineari: se $F : X \to Y$, si ha $F(a) \sqsubset Y$ e dunque $\sharp(F(a) \cap b) \leq 1$, da cui $\sharp(tr(F) \cap a \times b)$, il che corrisponde all'identità $(X \multimap Y)^{\perp} = X \otimes Y^{\perp}$. D'altra parte, si avrà anche $\sharp(a \cap F^{\perp}(b)) \leq 1$, che corrisponde proprio al fatto che $F^{\perp} \sqsubset X \otimes Y^{\perp}$.

Il positivo e il negativo Tornando al teorema 1.2.14, osserviamo che avere una strategia per $X \multimap Y$ (o equivalentemente per $X^{\perp} \parr Y$) è la stessa cosa che avere una funzione lineare da strategie per X a strategie per Y: il giocatore O, nell'affrontare P, sa già cosa aspettarsi dal suo avversario, ossia una funzione lineare tra due giochi. E' a questo punto che emerge una importante "rottura di simmetria", poichè lo stesso discorso non vale affatto per le strategie di O: non ogni cricca $c \sqsubset X \otimes Y$ è infatti il prodotto cartesiano $a \times b$ di due cricche, $a \sqsubset X$, $b \sqsubset Y$, dal momento che non è affatto necessario che un insieme di coppie coerenti in $X \otimes Y$ ospiti tutte le combinazioni dei punti di X e di Y che occorrono in esse. Il caso tipico è quello di una funzione lineare $F : Z \to X \otimes Y$: come dividere la parte di Z che porta a X da quella che porta a Y? Non c'è alcuna soluzione a priori, il che vuol dire che l'avversario in un gioco tensore non sa molto di come il suo avversario si comporterà, una volta che sappia che ha una strategia per quel gioco.

Un discorso analogo vale per le operazioni additive, per gli elementi neutri e in parte per le operazioni esponenziali; questo rivela che siamo di fronte a una proprietà importante: ogni volta che un'operazione è *reversibile*, come $\multimap$ e $\parr$, il suo giocatore è passivo, nel delocalizzazioni che l'avversario ha già un'idea di cosa farà prima che egli agisca; d'altra parte l'operazione duale sarà *irreversibile* e il suo giocatore, l'avversario del primo, sarà attivo, nel senso che l'avversario non potrà prevedere le sue mosse e dovrà aspettare una sua scelta sul da farsi. Possiamo dunque immaginare le partite negli spazi coerenti sostanzialmente come l'alternarsi di mosse attive e passive, in cui ogni mossa passiva comporta il passaggio del turno all'avversario: tocca a te scegliere! Il passivo domanda, l'attivo risponde, e continua a farlo fintantochè non è costretto a una domanda e quindi a passare il turno.

Si osservi infatti, dagli isomorfismi in 1.2.15 (proprietà distributive) che le mosse attive *commutano* tra di loro: questo vuol dire intuitivamente che è sempre lo stesso giocatore a giocare, ovvero che possiamo considerare un *cluster* di mosse attive come una unica mossa; analogamente commutano le mosse passive, e dunque un cluster di mosse passive è una mossa passiva. Rimane dunque da capire se questa caratteristica degli spazi coerenti, la *polarità* reversibile-irreversibile, passivo-attivo, domanda-risposta o più semplicemente *negativo-positivo*, del tutto assente dalle arene della logica classica, possa avere una spiegazione puramente logica. Come vedremo, la polarità risulterà determinante nella ludica (vd. §2.2.1).

Si noti che possiamo riformulare la coerenza tra le partite per un giocatore attraverso le polarità: due partite x, x' di un gioco negativo per P sono coerenti se, come sequenze di mosse, iniziano a differire a partire da una mossa positiva, ossia da una diversa scelta di O e sono in quel caso invece incoerenti per O.

La scoperta della logica lineare Siamo così, finalmente, giunti al punto di doverci chiedere dove ci porta tutta questa divagazione su dispute, strategie e spazi coerenti: l'idea sarà quella di associare a ogni spazio coerente X una formula $\tilde{X}$, alle cricche $a \sqsubset X$, una derivazione del sequente $\vdash \tilde{X}$ e, più in generale, alle funzioni lineare (a più variabili) $F : X_1 \times \cdots \times X_n \to Y$ una derivazione del sequente $\vdash \tilde{X_1^\perp}, \dots, \tilde{X_n^\perp}, \tilde{Y}$. Sappiamo già alcune cose importanti sul calcolo dei sequenti che verrà:

- la clausola "no indebolimento" ci impedisce di costruire funzioni lineari $F : X \to X \parr Y$, a meno che $Y = ?Z$, per un certo Z: in quel caso infatti, e solo in quel caso, possiamo considerare la cricca vuota $\emptyset \sqsubset ?Z$. Questo ci dice una cosa importante: nel nostro calcolo dei sequenti l'indebolimento (la regola (W)) dovrà essere ristretta a una specifica classe di formule.

- la clausola "no contrazione" ci impedisce di costruire funzioni lineari $F : X \parr X \to X$, a meno che $X = ?Z$, per un certo Z: in quel caso infatti, e solo in quel caso, possiamo sfruttare l'isomorfismo esponenziale $?Z \parr ?Z \simeq ?(Z \oplus Z)$. Il nostro calcolo dei sequenti restringerà dunque anche la contrazione (la regola (C)) a una specifica classe di formule.

In realtà, una volta eliminate le regole (C) e (W), sono possibili definizioni *non più equivalenti* per ogni connettivo della logica classica; ad esempio per $\wedge$ e $\vee$ abbiamo i casi:

$$\begin{array}{cc}
\dfrac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Delta, B}{\vdash \Gamma, \Delta, A \wedge B} \wedge_1 & \dfrac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \wedge B} \wedge_2 \\
\dfrac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \vee B} \vee_1 & \dfrac{\vdash \Gamma, A_i}{\vdash \Gamma, A_0 \vee A_1} \vee_2 \ (i \in \{0,1\})
\end{array} \tag{1.2.19}$$

Attraverso l'eliminazione del taglio scopriamo che queste regole sono organizzate come coppie duali:

$$\dfrac{\dfrac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Delta, B}{\vdash \Gamma, \Delta, A \wedge B} \wedge_1 \quad \dfrac{\vdash \Gamma', \neg A, \neg B}{\vdash \Gamma', \neg A \vee \neg B} \vee_1}{\vdash \Gamma, \Delta, \Gamma'} cut \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\vdash \Gamma, A \quad \dfrac{\vdash \Delta, B \quad \vdash \Gamma', \neg A, \neg B}{\vdash \Delta, A, \Gamma'} cut}{\vdash \Gamma, \Delta, \Gamma'} cut \tag{1.2.20}$$

$$\dfrac{\dfrac{\vdash \Gamma, A_0 \quad \vdash \Gamma, A_1}{\vdash \Gamma, A_0 \wedge A_1} \wedge_2 \quad \dfrac{\vdash \Gamma, \neg A_i}{\vdash \Gamma, \neg A_0 \vee \neg A_1} \vee_2}{\vdash \Gamma, \Gamma'} cut \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\vdash \Gamma, A_i \quad \vdash \Gamma, \neg A_i}{\vdash \Gamma, \Gamma'} cut \tag{1.2.21}$$

Una rapida verifica delle operazioni sugli spazi coerenti indurrà quindi le seguenti definizioni:

Definizione 1.2.14 ($MALL$)**.** *La* logica lineare moltiplicativo-additiva $MALL$ *è il calcolo dei sequenti, nel linguaggio* $\mathcal{L}_{MALL}$ *che ha come costanti logiche* 0*-arie i simboli* $\perp, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \top$ *e come costanti binarie i simboli* $\otimes, ⅋, \oplus, \&$*, generato dalle seguenti regole:*

moltiplicativi

$$\frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Delta, B}{\vdash \Gamma, \Delta, A \otimes B}\,(\otimes) \qquad \frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A ⅋ B}\,(⅋)$$
$$\frac{}{\vdash \mathbf{1}}\,(\mathbf{1}) \qquad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, \perp}\,(\perp) \tag{1.2.22}$$

additivi

$$\frac{\vdash \Gamma, A_i}{\vdash \Gamma, A_0 \oplus A_1}\,(\oplus)\ (i \in \{0,1\}) \qquad \frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \,\&\, B}\,(\&)$$
$$\frac{}{\vdash \Gamma, \top}\,(\top) \tag{1.2.23}$$

cut

$$\frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Delta, A^{\perp}}{\vdash \Gamma, \Delta}\, cut \tag{1.2.24}$$

strutturali

$$\frac{\vdash A_1, \ldots, A_n}{\vdash A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(n)}}\, cambio \ (\sigma \in S_n) \tag{1.2.25}$$

Le regole moltiplicative 1.2.22 sono giustificate, rispettivamente, dalle funzioni lineari $F_{\otimes} : (X ⅋ Z) \otimes (Y ⅋ T) \to (X ⅋ Y ⅋ (Z \otimes T))$ data da $F_{\otimes}(<< x, z >, < y, t >>) =< x, y, < z, t >>$, $F_{⅋} : X ⅋ Y ⅋ Z \to X ⅋ (Y ⅋ Z)$ data da $F_{⅋}(< x, y, z >=< x, < y, z >>)$, $F_{\mathbf{1}} : \emptyset \to \mathbf{1}$ data da $F_{\mathbf{1}}(\emptyset) = a$, con $|\mathbf{1}| = \{a\}$, $F_{\perp} : X \to X ⅋ \perp$ data da $F_{\perp}(x) =< x, a >$, con $|\perp| = \{a\}$.

Le regole additive 1.2.23 sono giustificate, rispettivamente, dalle funzioni lineari $F^i_{\oplus} : (X ⅋ Y) \to X ⅋ (Y \oplus Z)$ data da $F^i_{\oplus}(< x, y >) =< x, < y, 1 >>$, $F^i_{\&} : (X ⅋ Y) \otimes (X ⅋ Z) \to X ⅋ (Y \,\&\, Z)$, data da $F^i_{\&}(<< x_0, y_0 >, < x_1, y_1 >>) =< x_i, < y_i, i >>$, sempre con $i \in \{0,1\}$, $F_{\top} : X \to \top$, data da $F_{\top}(x) = \emptyset$.

La regola *cambio* segue dalla commutatività del ⅋, mentre la regola *cut* sarà giustificata fra poche righe.

$MALL$ soddisfa l'eliminazione del taglio (gli unici casi non analizzati sono quelli degli elementi neutri e delle cosiddette commutazioni). Il merito degli spazi coerenti è di aver dato un contenuto funzionale alle regole sintattiche di contrazione e indebolimento, rivelando così il ricco universo dei connettivi lineari.

Guardando attentamente le regole, inoltre, emerge in maniera molto chiara il ruolo di quella proprietà che avevamo chiamato *polarità*: i connettivi negativi sono davvero reversibili, nel senso che, data la conclusione, sappiamo ricavare la premessa, mentre i positivi sono irreversibili. La dinamica dell'eliminazione del taglio, inoltre, dà un contenuto procedurale a questa nomenclatura: è sempre il positivo a stabilire come proseguire l'interazione. D'altra parte, dal momento che tutti gli isomorfismi in 1.2.13 e 1.2.15 diventano sequenti derivabili (provare per credere), sono derivabili in $MALL$ le forme di distributività in 1.2.15

$$\begin{array}{l} \vdash A \otimes (B \oplus C) \multimap (A \otimes B) \oplus (A \otimes C) \\ \vdash (A \otimes B) \oplus (A \otimes C) \multimap A \otimes (B \oplus C) \\ \vdash A \parr (B \& C) \multimap (A \parr B) \& (A \parr C) \\ \vdash (A \parr B) \& (A \parr C) \multimap A \parr (B \& C) \end{array} \tag{1.2.26}$$

Attraverso esse, possiamo introdurre nel calcolo dei sequenti, e più nello specifico, nel processo di eliminazione del taglio, quell'immagine della partita come alternanza di mosse positive e negative che avevamo introdotto negli spazi coerenti.

Resta ancora da chiarire la posizione delle regole di contrazione e indebolimento:

Definizione 1.2.15 (LL)**.** *La* logica lineare *LL è il calcolo dei sequenti, nel linguaggio $\mathcal{L}_{LL}$ costruito aggiungendo a $\mathcal{L}_{MALL}$ le costanti unarie $!, ?$, generato da $MALL$ più le seguenti regole:*

esponenziali

$$\begin{array}{cc} \dfrac{\vdash ?\Gamma, A}{\vdash ?\Gamma, !A}\ (!) & \dfrac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, ?A}\ (?) \\ \dfrac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, ?A}\ (W) & \dfrac{\vdash \Gamma, ?A, ?A}{\vdash \Gamma, ?A}\ (C) \end{array} \tag{1.2.27}$$

La regola (?) è giustificata dalla funzione lineare $F_? : (X \multimap Y) \to (X \multimap ?Y)$ determinata da $(F_?(g))(a) = \{(g)(a)\} \sqsubset ?Y$, con $g \sqsubset X \multimap Y, a \sqsubset X$ mentre la (!) è derivata come la duale di (?) attraverso i vari casi di eliminazione del taglio. Possiamo del resto derivarla dalla funzione lineare $F_! : (?X \parr Y) \to (?X \parr !Y)$ data da $F_!(< a, y >) =< a, \{y\} >$.

La regola (W) è giustificata dalla funzione lineare $F_W : X \to X \parr ?Y$ data da $F_W(x) =< x, \emptyset >$, mentre la regola (C) è giustificata dalla funzione lineare $F_C : ?X \parr ?X \to ?X$ determinata da $tr(F_C) = \{< a, b, < a \cup b >> | a \cup b \sqsubset X^\perp\}$.

La semantica delle dimostrazioni Il teorema che segue, oltre ad essere un teorema di correttezza della logica lineare rispetto agli spazi coerenti, il che non dovrebbe sorprenderci molto visto che è pur sempre dagli spazi coerenti che abbiamo tirato fuori la logica lineare, ci permetterà di comprendere con precisione il rapporto tra derivazioni di LL e spazi coerenti:

Teorema 1.2.16. *Sia $\vdash \Gamma$ un sequente di LL, con $\Gamma = A_1, \ldots, A_n$ e π una derivazione di $\vdash \Gamma$ in LL. Allora è possibile associare a π una cricca $[\![\pi]\!] \sqsubset [\![A_1]\!] \parr \cdots \parr [\![A_n]\!]$ tale che, se $\pi \rightsquigarrow \pi'$ tramite un passo di eliminazione del taglio, allora $[\![\pi']\!] = [\![\pi]\!]$.*

Dimostrazione. L'esistenza delle cricche è una conseguenza dell'esistenza delle funzioni lineari definite per giustificare le regole di LL; la verifica della correttezza di quelle definizioni è una verifica lunga e priva di sorprese, che sarà qui omessa. Passiamo invece subito alla verifica dell'invarianza per eliminazione del taglio, della quale saranno presentati solo i casi più interessanti.

($\otimes/\parr$) Consideriamo la seguente derivazione μ costituita da un taglio tra due derivazioni π e λ rispettivamente di $\vdash \Gamma, \Delta, A \otimes B$ e $\vdash \Gamma', A^{\perp} \parr B^{\perp}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots\ \pi_1}{\vdash \Gamma, A} \quad \dfrac{\vdots\ \pi_2}{\vdash \Delta, B}}{\vdash \Gamma, \Delta, A \otimes B}\,(\otimes) \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots\ \lambda_1}{\vdash \Gamma', A^{\perp}, B^{\perp}}}{\vdash \Gamma', A^{\perp} \parr B^{\perp}}\,(\parr)}{\vdash \Gamma, \Delta, \Gamma'}\,cut \tag{1.2.28}$$

Per ipotesi sappiamo che esistono $[\![\pi_1]\!] \sqsubset [\![\Gamma]\!] \parr [\![A]\!]$, $[\![\pi_2]\!] \sqsubset [\![\Delta]\!] \parr [\![B]\!]$ e $[\![\lambda_1]\!] \sqsubset [\![\Gamma']\!] \parr [\![A^{\perp}]\!] \parr [\![B^{\perp}]\!]$; costruiamo innanzitutto $[\![\pi]\!] := \{< \underline{c}, \underline{d}, < z_1, z_2 >> \mid < \underline{c}, z_1 >\in [\![\pi_1]\!] \wedge < \underline{d}, z_2 >\in [\![\pi_2]\!]\}$ e $[\![\lambda]\!] := \{< \underline{f}, < x_1, x_2 >> \mid < \underline{f}, x_1, x_2 >\in [\![\lambda_1]\!]\}$ ed infine $[\![\mu]\!] := \{< \underline{c}, \underline{d}, \underline{f} > \mid \exists z \in |[\![A \otimes B]\!]| \ < \underline{c}, \underline{d}, z >\in [\![\pi]\!] \wedge < \underline{f}, z >\in [\![\lambda]\!]\}$

La derivazione μ si riduce alla derivazione μ' (indicheremo con ν la sottoderivazione corrispondente al taglio di π_2 e λ_1):

$$\dfrac{\dfrac{\vdots\ \pi_1}{\vdash \Gamma, A} \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots\ \pi_2}{\vdash \Delta, B} \quad \dfrac{\vdots\ \lambda_1}{\vdash \Gamma', A^{\perp}, B^{\perp}}}{\vdash \Delta, A^{\perp}, \Gamma'}\,cut}{\vdash \Gamma, \Delta, \Gamma'}\,cut \tag{1.2.29}$$

Costruiamo $[\![\nu]\!] := \{< \underline{d}, x_1, \underline{f} > \mid \exists x \in |[\![B^{\perp}]\!]| \ < \underline{d}, x >\in \pi_2 \wedge < \underline{f}, x_1, x >\in \lambda_1\}$ ed infine $[\![\mu']\!] := \{< \underline{c}, \underline{d}, \underline{f} > \mid \exists z \in |[\![A]\!]| \ < \underline{c}, z >\in \pi_1 \wedge < \underline{d}, z, \underline{f} >\in [\![\nu]\!]\}$. Si vede allora facilmente che $[\![\mu']\!] = [\![\mu]\!]$.

($\oplus/\&$) Consideriamo la seguente derivazione μ costituita da un taglio tra due derivazioni π e λ rispettivamente di $\vdash \Gamma, A_0 \,\&\, A_1$ e $\vdash \Delta, A_0^{\perp} \oplus A_1^{\perp}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots\ \pi_0}{\vdash \Gamma, A_0} \quad \dfrac{\vdots\ \pi_1}{\vdash \Gamma, A_1}}{\vdash \Gamma, A_0 \,\&\, A_1}\,(\&) \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots\ \lambda_1}{\vdash \Delta, A_i^{\perp}}}{\vdash \Delta, A_0^{\perp} \vee A_1^{\perp}}\,(\oplus)}{\vdash \Gamma, \Delta}\,cut \tag{1.2.30}$$

Sono date $[\![\pi_i]\!] \sqsubset [\![\Gamma]\!] \parr [\![A_i]\!]$, con $i \in \{0,1\}$ e $[\![\lambda_1]\!] \sqsubset [\![\Delta]\!] \parr [\![A_j]\!]$, con $j \in \{0,1\}$. Costruiamo $[\![\pi]\!] := \{< \underline{c_i}, < x_i, i >> \mid i \in \{0,1\} \wedge < \underline{c_i}, x_i >\in [\![\pi_i]\!]\}$, $[\![\lambda]\!] := \{< \underline{d}, < z_i, i >> \mid i \in \{0,1\} \wedge < \underline{d}, x_i >\in [\![\lambda_1]\!]\}$ e $[\![\mu]\!] := \{< \underline{c_1}, \underline{d} > \mid \exists x_i \in |[\![A_i]\!]|, i \in \{0,1\} \ < \underline{c_i}, x_i >\in [\![\pi_1]\!] \wedge < \underline{d}, x_i >\in [\![\lambda_1]\!]\}$.

La derivazione μ si riduce a μ':

$$\dfrac{\dfrac{\vdots\ \pi_i}{\vdash \Gamma, A_i} \quad \dfrac{\vdots\ \lambda_1}{\vdash \Delta, A_i^\perp}}{\vdash \Gamma, \Delta}\ cut \tag{1.2.31}$$

Costruiamo $[\![\mu']\!] := \{< \underline{c_i}, \underline{d} > | \exists x_i \in |[\![A_i]\!]|, i \in \{0,1\} \ \ < \underline{c_i}, x_i > \in [\![\pi_1]\!] \wedge < \underline{d}, x_i > \in [\![\lambda_1]\!]\}$, che è esattamente la definizione di $[\![\mu]\!]$.

(?/!) Consideriamo soltanto il seguente caso di una derivazione μ costituita da un taglio tra due derivazioni: una π, derivazione del sequente $\vdash \Gamma, ?A$ con sottoderivazioni π' di $\vdash \Gamma, ?A, ?A$ e π'' di $\vdash \Gamma, A, A$; l'altra λ, derivazione di $\vdash ?\Delta, !A^\perp$, con sottoderivazione λ' di $\vdash ?\Delta, A^\perp$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots\ \pi''}{\vdash \Gamma, A, A}}{\vdash \Gamma, ?A, ?A}\,(?)}{\vdash \Gamma, ?A}\,(C) \quad \dfrac{\dfrac{\vdots\ \lambda'}{\vdash ?\Delta, A^\perp}}{\vdash ?\Delta, !A^\perp}\,(!)}{\vdash \Gamma, ?\Delta}\ cut \tag{1.2.32}$$

Sono date $[\![\pi'']\!] \sqsubset [\![\Gamma]\!] \parr [\![A]\!] \parr [\![A]\!]$, $[\![\lambda']\!] \sqsubset [\![?\Delta]\!] \parr [\![A^\perp]\!]$. Costruiamo $[\![\pi']\!] := \{< \underline{c}, \{x_1\}, \{x_2\} > | < \underline{c}, x_1, x_2 > \in [\![\pi'']\!]\}$ e $[\![\pi]\!] := \{< \underline{c}, \{x_1, x_2\} > | < \underline{c}, \{x_1\}, \{x_2\} > \in [\![\pi']\!]$ e $x_1 \frown_A x_2\}$, $[\![\lambda]\!] := \{< \underline{d}, \{y\} > | < \underline{d}, y > \in [\![\lambda']\!]\}$ ed infine $[\![\mu]\!] := \{< \underline{c}, \underline{d} > | \exists a \in |[\![?A]\!]| \ \ < \underline{c}, a > \in [\![\pi]\!] \wedge < \underline{d}, a > \in [\![\lambda]\!]\}$.

La derivazione μ si riduce a μ', costruita a partire da ν derivazione del sequente $\vdash \Gamma, ?\Delta, ?\Delta$, costruita a sua volta a partire da un taglio tra una copia di λ' e la derivazione ν' del sequente $\vdash \Gamma, ?\Delta, A^\perp$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots\ \lambda'}{\vdash ?\Delta, A^\perp} \quad \dfrac{\dfrac{\vdots\ \lambda'}{\vdash ?\Delta, A^\perp} \quad \dfrac{\vdots\ \pi''}{\vdash \Gamma, A, A}}{\vdash \Gamma, ?\Delta, A}\ cut}{\vdash \Gamma, ?\Delta, ?\Delta}\ cut}{\vdash \Gamma, ?\Delta}\,(C) \tag{1.2.33}$$

Costruiamo $[\![\nu']\!] := \{< \underline{c}, \underline{d}, x > | \exists y \in |[\![A]\!]| \ \ < \underline{c}, x, y > \in [\![\pi'']\!] \wedge < \underline{d}, y > \in [\![\lambda]\!]\}$, $[\![\nu']\!] := \{< \underline{c}, \underline{d_1}, \underline{d_2} > | \exists x \in |[\![A]\!] \ \ < \underline{d_1}, x > \in [\![\lambda]\!] \wedge < \underline{c}, \underline{d_2}, x > \in [\![\nu']\!]\}$, e infine $[\![\mu']\!] := \{< \underline{c}, \underline{d_1} \cup \underline{d_2} > | < \underline{c}, \underline{d_1}, \underline{d_2} > \in [\![\nu']\!]\}$; una rapida verifica mostra allora che $[\![\mu]\!] = [\![\mu']\!]$.

□

Ci sono almeno due modi di interpretare, seguendo questo teorema, il rapporto tra logica (lineare) e spazi coerenti, a seconda che si scelga la linea fregeana “Senso⇒ Denotazione” o quella opposta “Denotazione ⇒ Senso”: parleremo, rispettivamente, di una *semantica delle dimostrazioni* e di una *teoria delle interazioni*.

semantica delle dimostrazioni Quella di Frege è una semantica degli enunciati, caratterizzata dalla distinzione tra senso e denotazione e da quello che abbiamo chiamato principio del quoziente semantico (1.1.5, pag. 9), in virtù del quale le denotazioni dei termini di una lingua sono determinate da un quoziente sui termini stessi indotto dagli enunciati di identità veri. Le cricche di uno spazio coerente sono in questo senso analoghe alle denotazioni di Frege, ma all'interno di una semantica delle dimostrazioni, incentrata, attraverso la nozione di coerenza, sulla discriminazione delle derivazioni di uno stesso sequente. L'analogia è data dal fatto che gli spazi coerenti quozientano l'insieme delle dimostrazioni di un sequente modulo la chiusura transitiva e riflessiva della relazione di riduzione tramite un passo di eliminazione del taglio (si ricordi che l'eliminazione del taglio non è altro che la rappresentazione procedurale, dinamica, della dualità interna alla struttura di LL o LK). In definitiva, alla coppia fregeana senso-denotazione viene ad associarsi quella "con tagli-senza tagli": laddove il senso di una derivazione è costituito dall'insieme delle regole sintattiche adoperate per costruirla, la sua denotazione non è altro che la classe di derivazioni indotta dalla sua forma normale.

$$\begin{aligned} \text{Senso} &\longmapsto \text{Regole sintattiche} \\ \text{Denotazione} &\longmapsto \text{Forma normale} \end{aligned} \tag{1.2.34}$$

Nel prossimo capitolo discuteremo una interessante proposta per una seria ricostruzione filosofica dei contenuti di questa "svolta proof-teoretica" del paradigma fregeano, vale a dire il cosiddetto giustificazionismo (i cui protagonisti, tuttavia, come vedremo, hanno come riferimento il formalismo della deduzione naturale intuizionista piuttosto che la semantica degli spazi coerenti).

Possiamo subito rilevare due caratteristiche essenziali dell'impostazione che stiamo considerando, che, come vedremo, non sono affatto condivise dalla posizione giustificazionista: in primo luogo gli spazi coerenti non rappresentano un mondo esterno alla sintassi, ed in effetti è vero il contrario, cioè che la sintassi stessa è stata costruita a partire dagli spazi coerenti. In questo modo la semantica viene a configurarsi come una *rappresentazione geometrico-algebrica* della sintassi del calcolo dei sequenti, *sostituendo, a nozioni tecniche di esclusivo appannaggio dei logici come quella di linguaggio come insieme di variabili e di formule e di sistema deduttivo come insieme di derivazioni, strutture e funzioni su esse caratterizzate da un reale contenuto matematico.*

In secondo luogo, in virtù della invarianza (teorema 1.2.16) delle denotazioni rispetto alla eliminazione del taglio, possiamo considerare la semantica delle dimostrazioni come una *teoria degli invarianti dinamici* di un calcolo, di una sintassi, ossia una teoria che rappresenta, attraverso modelli matematici, il modo con cui le forme di oggettività (e oggettualità) cui un linguaggio si apre si costituiscono nella dinamica interna dell'uso della sintassi stessa.

Possiamo così tornare a dire, insieme a Frege, che oggettive sono quelle (e solo quelle) proprietà che sono rispecchiate a livello semantico, senza il timore di incappare nei pericoli insiti alla tesi 1.1.14 (pag. 20) della trasparenza delineati nel paragrafo §1.1.5, dal momento che tali proprietà, che non sono altro che ciò che viene conservato dalle simmetrie interne alla sintassi, restano saldamente nella dimensione dell'implicito.

Condensiamo questi due aspetti nel seguente principio:

$$\textit{La semantica è lo studio matematico degli invarianti dinamici della sintassi} \tag{1.2.35}$$

La nozione di semantica cui si fa riferimento non è più quella dello studio del rapporto tra linguaggio e realtà ma è tuttavia ancora quella del rapporto tra senso e denotazione, intendendo il primo come l'insieme delle procedure generate da un calcolo, e la seconda come l'insieme degli invarianti di tali procedure. La semantica delle dimostrazioni è, in ultima analisi, uno sguardo, geometrico, algebrico o altro, sulla sintassi, alla ricerca delle proprietà intrinseche di questa.

teoria delle interazioni Possiamo d'altra parte ribaltare la prospettiva: e se fosse il concetto di dimostrazione a dover essere spiegato a partire dagli spazi coerenti e non viceversa? Si tratterebbe allora di trovare in LL una chiara interpretazione strategica, partendo dal concetto di *interazione*, o di partita: a ogni punto x di uno spazio coerente associamo l'interazione tra due sequenti polari. L'interazione funziona così: comincia il negativo P, mostrando le sue (scontate) premesse e chiamando in causa O, il positivo, a cui viene chiesto di scegliere una premessa tra quelle possibili per il suo sequente per proseguire l'interazione, poi la premessa successiva finchè non si focalizzerà su una formula negativa, passando la palla di nuovo a P; l'interazione prosegue fin quando uno dei due estrae un demone. L'invarianza di x per eliminazione del taglio ci assicura che questa associazione è ben posta: a ogni stato dell'interazione la denotazione sarà sempre x. Una derivazione del sistema $LL_{\maltese}$ (definito in perfetta analogia con $LK_{\maltese}$) è determinata da un insieme di interazioni coerenti nel senso discusso in precedenza, ossia costituisce una cricca, una strategia. Una derivazione di LL è allora una cricca che rappresenta una strategia vincente.

Questa prospettiva, che ha il merito di riunire due approcci distinti come la proof-search e l'eliminazione del taglio, sarà discussa e formulata in modo più rigoroso nel prossimo capitolo (soprattutto con la ludica - vd. §2.2.2). Tuttavia, possiamo già scorgerne alcuni caratteri essenziali: in primo luogo, se nella semantica delle dimostrazioni era la struttura matematica della sintassi a precedere la sua realizzazione linguistica, in questo caso è il concetto di interazione a precedere tanto la prima quanto la seconda: è in virtù del costituirsi di regole di interazione che si istituisce un gioco; considerare un gioco (uno spazio coerente) non vuol dire altro, del resto, che considerare una relazione di coerenza su un insieme di interazioni; è questa relazione che (generando la sua relazione duale) dà senso alla dinamica delle dispute e, attraverso queste, al costituirsi di strategie (cricche, insiemi coerenti di punti), *inducendo la strutturazione semiotica delle interazioni come denotazioni.* Non solo ci ritroviamo così in pieno accordo con il principio 1.1.8 del quoziente semiotico (pag. 12), ossia del primato della valutazione, ma ci si viene a porre così all'interno di ciò che per il sistema delle valutazioni (le TS) costituisce un "già dato", vale a dire l'insieme, finora considerato come stabilito una volta per tutte, delle regole del gioco; un po' come la filosofia trascendentale di Kant (vd. §1.1.1), l'approccio interazionista mira a situarsi nel pieno del costituirsi stesso della dimensione semantica o valutativa.

In secondo luogo si osservi che il teorema 1.2.16 di invarianza per eliminazione del taglio assume, in questa prospettiva, un significato ribaltato rispetto alla semantica delle dimostrazioni: non consideriamo più oggettivo ciò che è invariante ma, al contrario, consideriamo una interazione *secondo le regole del gioco* solo quella che si rivela invariante (questo aspetto sarà messo in luce dalla cosiddetta "revisione esistenzialistica" degli spazi coerenti, che sarà affrontata nel prossimo capitolo). In tal modo le proprietà oggettive possono essere viste non tanto come il punto di arrivo, quanto come il punto di partenza, in accordo con la prospettiva "Denotazione $\Rightarrow$ Senso", inducendo una radicale riconsiderazione della stessa polarità soggetto-oggetto. Ma di questo, si potrà parlare con maggior chiarezza solo più avanti.

1.2.5 Soggetto e oggetto nella logica classica

Mostreremo adesso, servendoci degli strumenti messi a punto nei precedenti paragrafi, come ritrovare "internamente" alla sintassi di LK quelle che sono considerate le sue più importanti proprietà semantiche: la bivalenza e la naturale predisposizione nei confronti delle "semantiche della derivabilità" come la teoria dei modelli, piuttosto che delle "semantiche delle dimostrazioni."

Simmetrie classiche Consideriamo una derivazione π espressa nel formalismo della deduzione naturale[6] di una implicazione del tipo $\neg B \to \neg A$:

$$\dfrac{\begin{array}{ccc} [\neg B]^{x_1} & \dots & [\neg B]^{x_n} \\ \ddots & & \iddots \\ & \neg A & \end{array}}{\neg B \to \neg A} \; (\to I)_{x_1,\dots,x_n} \tag{1.2.36}$$

Le n occorrenze (con n eventualmente uguale a 0) dell'assunzione aperta di $\neg B$ in π prendono esplicitamente in conto quello che il calcolo dei sequenti esprime con la regola (C) di contrazione; π diventa infatti la seguente π^* in LK:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} \vdots\, \pi_1^* \\ \vdash B, \dots, B, \neg A \end{array}}{\vdash B, \neg A} \; (C)/(W)}{\vdash \neg B \to \neg A} \; (\to) \tag{1.2.37}$$

[6] Per una introduzione al quale si rimanda ad esempio a (Prawitz, [56]).

per una certa π_1^*. D'altra parte, in LK, una derivazione di $\vdash \neg B \to \neg A$ è, in virtù della commutatività di $\vee$, di fatto equivalente a una derivazione di $\vdash A \to B$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots\ \pi_1^*}{\vdash B, \dots, B, \neg A}}{\vdash B, \neg A}\,(C)/(W)}{\vdash A \to B}\,(\to) \tag{1.2.38}$$

Volendo essere pedanti, dietro questa trasformazione c'è una occorrenza della regola *cambio* che inverte l'ordine delle formule B e $\neg A$. Il problema nasce allora nel voler trasportare questa equivalenza al caso della derivazione π: l'unica strategia sensata pare quella di invertire, in analogia con quanto visto nel caso dell'analisi canonica, il senso di lettura della derivazione, scambiando ogni formula ed ogni regola con la regola duale. Ad esempio, nel seguente caso ciò è chiaramente possibile:

$$\dfrac{\dfrac{[A \wedge B]^x}{A}\,(\wedge E)}{A \wedge B \to A}\,(\to I)_x \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\dfrac{[\neg A]^y}{\neg A \vee \neg B}\,(\vee I)}{\neg A \to \neg A \vee \neg B}\,(\to I)_y \tag{1.2.39}$$

Tuttavia, non appena compaiono più assunzioni aperte, chiuse dall'introduzione dell'implicazione, il ribaltamento non è più ammesso:

$$\begin{array}{c} [A]^x \\ \begin{array}{ccc} \iddots & & \ddots \end{array} \\ \dfrac{B \quad \dots \quad B}{A \to B}\,(C, \to I) \end{array} \tag{1.2.40}$$

1.2.40 non è affatto una dimostrazione in deduzione naturale, in quanto quest'ultima, ammettendo solo la costruzione di alberi *dall'alto verso il basso*, non ammette dimostrazioni con più conclusioni.

Possiamo considerare un altro esempio, che mostra in modo ancora più chiaro la natura geometrica delle derivazioni classiche, ossia l'applicazione della regola della doppia negazione nella deduzione naturale:

$$\begin{array}{c} [\neg A]^{x_1} \quad \dots \quad [\neg A]^{x_n} \\ \begin{array}{ccc} \ddots & & \iddots \end{array} \\ \dfrac{\bot}{A}\,(DN) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} [\neg A]^x [\mathbf{1}]^y \\ \begin{array}{ccc} \iddots & & \ddots \end{array} \\ \dfrac{A \quad \dots \quad A}{A}\,(C) \end{array} \tag{1.2.41}$$

In cui la derivazione ribaltata sulla destra non è ammessa. Tuttavia la derivazione di LK:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \mathbf{1}}\,(\mathbf{1}) \quad \dfrac{}{\vdash \neg A, A}\,(Ax)}{\vdash \neg A \wedge \mathbf{1}, A}\,(\wedge)}{\vdash (\neg A \to \bot) \to A}\,(\to) \tag{1.2.42}$$

è equivalente (modulo *cambio*) alla derivazione:

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash \mathbf{1}}\,(\mathbf{1}) \quad \dfrac{}{\vdash \neg A, A}\,(Ax)}{\dfrac{\vdash \neg A \wedge \mathbf{1}, A}{\vdash (\mathbf{1} \to A) \to A}\,(\to)}\,(\wedge) \tag{1.2.43}$$

Vediamo dunque all'opera, in LK, una simmetria non tanto tra le regole, quanto tra le *strategie* di derivazione:

strategia top-down Corrisponde all'albero della *verifica*, ben rappresentato nella deduzione naturale, con multiple assunzioni ed una unica conclusione, nel quale la contrazione è ammessa per le foglie dell'albero sotto la forma delle multiple assunzioni di una stessa formula scaricate in una sola regola (ad esempio l'introduzione di $\to$). Le regole che vi appartengono *preservano la verità* dalle premesse alla conclusione.

strategia bottom-up Corrisponde all'albero della *falsificazione*, mal rappresentato nella deduzione naturale, con una sola assunzione e multiple conclusioni, nel quale la contrazione è ammessa per le foglie. Le regole che vi appartengono *preservano la falsità* dalla conclusione alle premesse.

Una verifica di una formula A corrisponde esattamente a una falsificazione della sua negazione $\neg A$ e viceversa. Queste simmetrie, per scoprire le quali è stato necessario introdurre un formalismo più "geometrico", meno locale (sul significato di questa terminologia torneremo nel terzo capitolo), come la deduzione naturale, hanno dunque un preciso corrispondente nel calcolo dei sequenti: ciò che caratterizza le due distinte strategie non è altro che l'uso che si fa delle regole di contrazione e indebolimento; in entrambi i casi la costruzione degli alberi presuppone che si dividano le formule nel sequente in due classi: l'unica conclusione e le molteplici premesse e viceversa l'unica premessa e le molteplici conclusioni. Possiamo dunque considerare i *sequenti di verifica* come sequenti del tipo $\Gamma \vdash A$, i quali corrispondono esattamente ai sequenti ammessi dalla logica intuizionista LJ (vd. §A), e i *sequenti di falsificazione* come sequenti del tipo $A \vdash \Gamma$ (i quali corrisponderanno, grosso modo, ai sequenti della ludica - vd. §2.2.1) e ammettere la contrazione solo sui contesti Γ e mai sulla formula prescelta A.

La soggettività delle simmetrie In virtù del principio 1.2.35 (pag. 72), dobbiamo chiederci se le proprietà "essere una verifica di A" e "essere una falsificazione di A" si riflettano sul piano semantico, ovvero possano costituire degli invarianti della dinamica della deduzione naturale e del calcolo dei sequenti.

Per fare questo partiamo dal seguente teorema, di cui omettiamo la dimostrazione, che ci permette di individuare un universo semantico comune per i due formalismi:

Teorema 1.2.17. *Sia π una dimostrazione nella deduzione naturale NJ della formula A, ovvero nella deduzione naturale senza la regola (DN) di doppia negazione. Allora:*

normalizzazione *esiste π' dimostrazione di NJ senza tagli, tale che $\pi \rightsquigarrow \pi'$ attraverso il processo di normalizzazione;*

semantica *esiste uno spazio coerente $[\![A]\!]$ e una cricca $[\![\pi]\!] = [\![\pi']\!] \sqsubset [\![A]\!]$, ossia la cui assegnazione è invariante per normalizzazione, secondo la seguente assegnazione:*

$$[\![\neg A]\!] := ![\![A]\!] \multimap \mathbf{0};$$
$$[\![A \wedge B]\!] := [\![A]\!] \mathbin{\&} [\![B]\!];$$
$$[\![A \vee B]\!] := [\![A]\!] \oplus [\![B]\!];$$
$$[\![A \to B]\!] := ![\![A]\!] \multimap [\![B]\!].$$

Possiamo dunque considerare gli spazi coerenti una semantica anche per NJ: intuitivamente all'albero di verifica di una formula $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \to A$, in cui le formule A_i sono ipotesi scaricate (sulle quali dunque è ammessa la contrazione e l'indebolimento), si associa una cricca della spazio $!([\![A_1]\!] \mathbin{\&} \cdots \mathbin{\&} [\![A_n]\!]) \multimap [\![A]\!]$, ovvero una funzione stabile $F : [\![A_1]\!] \times \cdots \times [\![A_n]\!] \to [\![A]\!]$ (si noti l'uso dell'isomorfismo esponenziale $!(X \mathbin{\&} Y) \simeq !X \otimes !Y$).

D'altra parte la regola (DN)

$$\dfrac{\begin{matrix}[\neg A]^{x_1} \ldots [\neg A]^{x_n} \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{A}\ (DN) \tag{1.2.44}$$

della doppia negazione corrisponde proprio al principio che idealmente inverte un albero di verifica con più ipotesi contratte aperte in un albero di falsificazione con una contrazione alla fine:

$$\begin{matrix}[\neg A]^{x_1} \ldots [\neg A]^{x_n} \\ \vdots \\ \bot\end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\begin{matrix} & [\mathbf{1}] & \\ \iddots & & \ddots \\ A & \ldots & A\end{matrix}}{A}\ (C) \tag{1.2.45}$$

Tuttavia il sistema completo NK non ammette normalizzazione. Possiamo vedere cosa c'è che non va attraverso un argomento semantico: si osservi prima di tutto che (DN) fa sì che la negazione $[\![\neg X]\!] := ![\![X]\!] \multimap \mathbf{0}$ sia una involuzione degli spazi coerenti, ossia è tale che $[\![\neg B \to \neg A]\!] = !(![\![B]\!] \multimap \mathbf{0}) \multimap (![\![A]\!] \multimap \mathbf{0}) \simeq ![\![A]\!] \multimap [\![B]\!]$ e $[\![\neg\neg A]\!] = !(![\![A]\!] \multimap \mathbf{0}) \multimap \mathbf{0} \simeq [\![A]\!]$, la quale ha evidentemente poco a che fare con la naturale involuzione $A \multimap \bot$ degli spazi coerenti, ossia con la negazione lineare. Vale il seguente teorema:

Teorema 1.2.18. *Se, dato un insieme $\mathcal{X}$ di spazi coerenti chiuso rispetto a $⅋, \otimes, !, ?$ e tale che $\mathbf{0} \in \mathcal{X}$, per ogni spazio coerente $X \in \mathcal{X}$, la funzione stabile $F : X \to \mathbf{0}$ rappresenta una involuzione, allora ogni spazio in $\mathcal{X}$ è banale, ossia ammette una unica cricca.*

Dimostrazione. Si noti anzitutto che, per ogni spazio coerente X, $|X \parr \mathbf{0}| = |X \parr \top| = |X| \times \emptyset = \emptyset$ e dunque $X \parr \mathbf{0} = X \parr \top$ ha una sola cricca, la cricca vuota, da cui $X \parr \mathbf{0} \simeq X \parr \top \simeq \mathbf{0}$. Questo, nel linguaggio della teoria delle categorie, che sarà introdotto nel prossimo capitolo, significa che $\mathbf{0}$ è un elemento *iniziale* della categoria degli spazi coerenti. La tesi segue allora dall'isomorfismo $X \simeq !(!X \multimap \mathbf{0}) \multimap \mathbf{0} \simeq ?(!X \otimes \top) \parr \mathbf{0} \simeq \mathbf{0}$. □

Da questo teorema ricaviamo non soltanto che la simmetria tra verifica e falsificazione non è rispecchiata sul piano semantico, ma anzi che una sua completa rappresentazione nella deduzione naturale distruggerebbe ogni interesse semantico, nel senso della semantica delle dimostrazioni, riducendo i modelli denotazionali (in effetti, con la teoria delle categorie, è possibile mostrare che la banalizzazione varrebbe in ogni adeguata semantica denotazionale) ai modelli nel senso classico del termine: *la natura propria della sintassi classica si rivela così nel fatto di non ammettere che modelli della derivabilità e non delle derivazioni.* Quando ho una derivazione classica di A, è irrilevante di quale derivazione si tratti, perchè ciò che conta è che A sia vera, sia soddisfatta dal "modello standard".

Possiamo trovare una controparte sintattica al teorema 1.2.18 nel seguente esempio di una derivazione π, costruita a partire da due *distinte* π_1 e π_2 derivazioni di un sequente $\vdash A$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots\ \pi_1}{\vdash A}}{\vdash A, \neg B}(W) \quad \dfrac{\dfrac{\vdots\ \pi_2}{\vdash A}}{\vdash A, B}(W)}{\dfrac{\vdash A, A}{\vdash A}(C)}\mathit{cut} \tag{1.2.46}$$

essa può ridursi, in un passo di eliminazione del taglio, a *entrambe* le seguenti π' e π'':

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots\ \pi_1}{\vdash A}}{\vdash A, A}(W)}{\vdash A}(C) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots\ \pi_2}{\vdash A}}{\vdash A, A}(W)}{\vdash A}(C) \tag{1.2.47}$$

Ogni adeguata semantica denotazionale, compresi gli spazi coerenti, identificherà rispettivamente $[\![\pi_1]\!] = [\![\pi']\!]$ e $[\![\pi_2]\!] = [\![\pi'']\!]$; ma allora, dall'invarianza per eliminazione del taglio segue $[\![\pi]\!] = [\![\pi_1]\!] = [\![\pi_2]\!]$, ossia ancora una volta la banalizzazione della semantica delle dimostrazioni.

Una conseguenza pressappoco immediata della banalità semantica di LK è l'impossibilità di distinguere, nella logica classica, il positivo dal negativo: dall' isomorfismo $X \simeq \mathbf{0}$ segue evidentemente $X \,\&\, Y \simeq X \otimes Y$ e $X \parr Y \simeq X \oplus Y$, come si può anche vedere dalle seguenti derivazioni, "classicamente" corrette ma "linearmente" scorrette:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash A^{\perp}, A}(Ax) \quad \dfrac{}{\vdash B^{\perp}, B}(Ax)}{\vdash A^{\perp}, B^{\perp}, A \otimes B}(\otimes)}{\vdash A^{\perp}, A^{\perp} \oplus B^{\perp}, A \otimes B}(\oplus)}{\vdash A^{\perp} \oplus B^{\perp}, A^{\perp} \oplus B^{\perp}, A \otimes B}(\oplus)}{\vdash A^{\perp} \oplus B^{\perp}, A \otimes B}(C)}{\vdash A \,\&\, B \multimap A \otimes B}(\parr) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash A^{\perp}, A}(Ax)}{\vdash A^{\perp}, A, B^{\perp}}(W) \quad \dfrac{\dfrac{}{\vdash B^{\perp}, B}(Ax)}{\vdash A^{\perp}, B^{\perp}, B}(W)}{\vdash A^{\perp}, B^{\perp}, A \,\&\, B}(\&)}{\vdash A^{\perp} \parr B^{\perp}, A \,\&\, B}(\parr)}{\vdash A \otimes B \multimap A \,\&\, B}(\parr) \tag{1.2.48}$$

Senza positivo e negativo, non è possibile introdurre una seria nozione di strategia e, come abbiamo visto, una seria interpretazione in termini di spazi coerenti.

Questa impossibilità ha una diretta conseguenza nel seguente principio:

In un ambiente classico le strategie sono sempre soggettive (1.2.49)

ossia irrilevanti per la valutazione o, che è lo stesso, invisibili sul piano semantico. Nella prima parte del paragrafo abbiamo mostrato come la derivabilità in LK (e in NK) sia direttamente connessa con delle simmetrie tra le strategie di verificazione e falsificazione. Tuttavia,

> Cette méthode est empirique et subjective au sens où elle est une procédure cognitive, une méthodologie pratique. En tant qu'activité non-formelle elle ne peut donc avoir de transcription "mathèmatique" au sens strict. D'ailleurs, il n'y a à ma cannaissance aucune prèsentation capable de rèunir les analyses de falsification et de verification, ce qui paraît normal puisque une formule vraie donne toujours lieu à une contradiction entre sa falsification et sa vèrification. (Tronçon, [70])

Caratteristico della dinamica classica, basata sull'uso indiscriminato di indebolimenti e contrazioni, è di rimescolare questa apparente strutturazione geometrica nel calderone della *bivalenza*: in effetti, se ogni formula A e la sua duale sono ricondotte alla coppia di spazi coerenti $\top$ e $\mathbf{0}$, le uniche strategie *oggettive* possibili sono quella vuota per $\top$ e l'assenza di strategie per $\mathbf{0}$. Senza dubbio la strategia vuota vince sempre perchè l'avversario non si presenta mai. E' questo, in definitiva, il senso procedurale della bivalenza: uno dei due avversari vince sempre, perchè soltanto lui si presenta all'appuntamento!

E' questa la nozione classica di oggettività, la quale ci riconduce immediatamente alle osservazioni nel paragrafo §1.2.2 sul significato del teorema di correttezza nella dualità tra derivazioni di LK e modelli: se π è una derivazione di A, allora π è vincente perchè di contromodelli non ce ne sono e viceversa, se $\mathcal{M}$ è un modello che soddisfa una formula A, allora $\mathcal{M}$ è vincente perchè non ci sarà alcuna derivazione di A.

Avevamo mosso i nostri primi passi evidenziando, con Dummett, l'indispensabilità della nozione semantica di bivalenza per la concezione metafisica del realismo, scoprendo il ruolo decisivo svolto dalle nozioni di senso e denotazione; ci troviamo adesso a riscoprire la bivalenza *all'interno* di LK. Si ricordi che la bivalenza corrisponde alla tesi secondo cui ogni enunciato è determinatamente vero o falso ed è dunque un principio genuinamente semantico, da non confondere con la legge logica, di natura sintattica, del terzo escluso, per la quale, per ogni formula A, è sempre vero che A o che $\neg A$. E' il principio semantico della bivalenza che ha direttamente a che fare con il realismo, in quanto implica la credenza in una realtà determinata indipendentemente dalle possibilità umane (dalle strategie) di riconoscerlo. E' proprio tale principio genuinamente semantico che abbiamo ritrovato dentro LK come il suo *unico invariante dinamico*.

Capitolo 2

Essenza e normatività

L'obbiettivo di questo capitolo è discutere i problemi connessi con l'idea di una *giustificazione* della logica, e mostrare come gli sviluppi della cosiddetta "sintassi a posteriori", soprattutto con la ludica, possano suggerire un modo nuovo di pensare la giustificazione, non più nei termini di una "fondazione" dei contenuti logici, ma in quelli di una "costituzione" di questi, la quale risulti sempre situata in un determinato contesto di interazione.

La prima sezione è dedicata a quella che, in analogia con alcune osservazioni di Girard, ho chiamato semantica "essenzialista": si tratta di quelle prospettive che, a vario titolo, mirano a caratterizzare la correttezza delle derivazioni logiche mostrando l'aderenza di queste a criteri, essenze appunto, che sono considerati come indipendenti dai contesti concreti in cui tali derivazioni vengono usate. In §2.1.1 sono introdotte le nozioni di "norma" e di "giustificazione positiva" e "giustificazione negativa", a partire dal concetto kantiano del "quid iuris", ed è descritta la linea di argomentazione giustificazionista (che si identifica soprattutto in Michael Dummett e Dag Prawitz), che considera le norme che disciplinano l'inferenza deduttiva costitutive dell'oggettività del senso linguistico. In §2.1.2 sono introdotti alcuni rudimenti della teoria delle categorie, con particolare riferimento alla sua applicazione come semantica delle dimostrazioni della logica. In §2.1.3 tanto la prospettiva giustificazionista, ancorata alla sintassi della deduzione naturale, quanto quella categoriale che, nell'astrattezza delle sue caratterizzazioni "a meno di isomorfismo", si propone come indipendente da ogni sintassi, sono confrontate con i celebri argomenti di Wittgenstein sul "seguire una regola": in particolare, è messa in discussione la tesi, comune a entrambe le concezioni, secondo cui la normatività logica sia indotta dalle regole di inferenza associate alle costanti logiche (quella che ho scelto di chiamare "tesi dell'inferenzialità delle norme"). In §2.1.4, anche alla luce della scoperta delle cosiddette "logiche leggere", sarà confrontata la tesi essenzialista della idealità, nel senso di a-contestualità, delle norme logiche con la concreta aderenza delle sintassi, che dovrebbero esprimere tali essenze, ai vincoli, evidenziati dalla teoria della complessità computazionale, delle risorse disponibili in termini di spazio e tempo di esecuzione.

Nella seconda sezione sarà sistematicamente affrontata la tematica della "sintassi a posteriori", vale a dire l'ipotesi, scaturita a partire da una revisione della teoria degli spazi coerenti, secondo cui le derivazioni logiche preesistano tanto alle regole con cui sono costruite (la loro sintassi), quanto alle formule che vi occorrono (il loro linguaggio): in §2.2.1 sarà introdotta la cosiddetta "locatività" che, sostituendo alle formule del linguaggio degli astratti "loci", elementi virtuali di spazio, permetterà, attraverso la costruzione di derivazioni senza formule, di mettere in questione la stessa morfologia del linguaggio: quella che ho chiamato "scommessa locativa" consisterà allora nell'intendere tale morfologia come l'origine nascosta, e invisibile agli approcci essenzialisti, delle normatività logiche. In §2.2.2, attraverso la descrizione della ludica, che radicalizza la prospettiva "polare" (positivo e negativo) emersa con gli spazi coerenti, si assisterà a un progressivo ridimensionamento del ruolo delle regole di inferenza nel determinare i contenuti dell'interazione logica. Il culmine di tale progressione sarà l'elaborazione, attraverso i cosiddetti design-*desseins*, di una versione "sintetica" del calcolo dei sequenti, le cui derivazioni, interagendo le une con le altre, sembrano "interpretarsi" reciprocamente, dando luogo a quelli che lo stesso Girard chiama "dialoghi normativi". Attraverso l'analisi della nozione tecnica di "incarnazione", si sosterrà che queste forme di interazione-interpretazione, per la loro contestualità, richiamando alcune osservazioni di Wittgenstein, si sottraggono alle obiezioni rivolte nella prima sezione alla concezione essenzialista della giustificazione. In §2.2.3 sarà infine discussa la nozione di completezza interna, ben più ricca della tradizionale nozione di completezza, e le relazioni di questa con il tema, caratteristico dell'approccio locativo, delle "interferenze".

2.1 La semantica essenzialista

2.1.1 Le norme

Il "quid iuris" Il capitolo secondo dell'Analitica trascendentale della *Critica della Ragion Pura* di Kant si apre con la celebre distinzione tra *quid facti* e *quid iuris*:

> Noi usiamo un gran numero di concetti empirici, senza opposizione da parte di alcuno, e ci consideriamo autorizzati ad attribuire loro un senso ed un immaginario significato, anche senza deduzione, poichè abbiamo sempre a disposizione l'esperienza, per dimostrare la loro realtà oggettiva. Vi sono tuttavia anche concetti usurpati, come ad esempio *fortuna, destino*, che circolano, è vero, tra l'indulgenza quasi generale, ma sono talvolta messi in stato di accusa, mediante la domanda: *quid iuris?* In effetti, si cade allora in un imbarazzo non trascurabile rispetto alla loro deduzione, non potendosi addurre, nè in base all'esperienza nè in base alla ragione, nessun fondamento chiaro di diritto, per cui risulti evidente l'autorizzazione del loro uso. (Kant,[46])

Dalla parte di quei concetti la cui legittimità richiede una giustificazione stanno quelle nozioni il cui uso non può essere direttamente appreso e confrontato con l'esperienza empirica, ovvero i concetti puri, o categorie, dell'intelletto.

> La spiegazione del modo in cui tali concetti possono riferirsi *a priori* a oggetti, io la chiamo *deduzione trascendentale* dei medesimi concetti, e la distinguo dalla

> deduzione *empirica*, che indica il modo in cui un concetto è stato acquistato mediante l'esperienza e la riflessione sull'esperienza, e che riguarda quindi non già la legittimità, besì il *factum*, attraverso il quale è sorto il possesso. (Kant, [46])

Di come il concetto di deduzione trascendentale si connetta con la questione dell'elaborazione di una teoria semantica, si è detto al §1.1.1; quello che è qui da sottolineare è che la comprensione che si richiede a una TS di come una lingua possa in generale riferirsi a un dominio strutturato di denotazioni non è da considerarsi come motivata da ragioni esclusivamente descrittive: ciò che è in ballo è il fatto stesso che quella data lingua sia adeguata al fine a lei preposto, ossia quello di mettere chi la usa in condizione di riferirsi a una realtà intersoggettiva ed indipendente, e dunque il fatto stesso che la sua rappresentazione, nella sintassi, possa di diritto ambire a costituire il fondamento delle naturali credenze circa l'esistenza di una tale realtà. Al *quid facti* della descrizione del linguaggio viene dunque a sovrapporsi il *quid iuris* per il quale una tale descrizione deve motivare il ricorso a una certa visione del mondo. E' così che quella svolta linguistica, che mirava a affrontare i temi della filosofia con il ricorso a strumenti "tecnici" (l'analisi logica del linguaggio), si ritrova a dover concepire il suo oggetto privilegiato, il linguaggio, entro un orizzonte ancora marcatamente filosofico.

Possiamo vedere con chiarezza questo aspetto relativamente alla TS dei modelli: il teorema di completezza per LK, attraverso la fondamentale identificazione di derivabilità e validità logica (nel senso di verità in tutti i modelli), mostrando la piena adeguatezza e fedeltà della nozione di dimostrazione classica a quell'ideale di una realtà in sè strutturata quale emerge dal formalismo insiemistico, in ultima analisi fornisce una giustificazione di essa, nei termini degli obiettivi filosofici di chi riconosce la cifra del proprio realismo nella nozione matematica di modello.

La teoria dei modelli ci garantisce anche un preciso strumento di valutazione delle teorie espresse nel linguaggio di LK, ovvero la coerenza di esse: non accade infatti che, nell'ambito di questa TS, si interpreti la teoria e solo dopo le si attribuisca l'eventuale coerenza, bensì accade che l'interpretabilità stessa della teoria viene a configurarsi come la sentenza che stabilisce l'accreditamento di essa al dominio delle teorie che possono a priori avere un oggetto. Questo aspetto certifica come la validazione modellistica delle teorie, e più in generale di LK, si configuri come un tribunale che giudica il rispetto, da parte di esse, delle *norme* del mondo insiemistico. Perchè un predicato n-ario P possa essere valutato come un sottoinsieme $P_{\mathcal{M}} \subseteq M^n$ del(l' n-esima potenza del) supporto del modello $\mathcal{M}$, è necessario che il predicato duale $\neg P$ possa essere valutato come $\complement P_{\mathcal{M}}$, e questo in ultima analisi ci riconduce alla coerenza della teoria. Se questo non è possibile, non è che avremo una cattiva descrizione della teoria, ma non ne avremo affatto una.

Quella appena descritta non è che una *norma* della TS dei modelli, ossia una regola in virtù della quale possiamo giudicare dell'adeguatezza o dell'inadeguatezza degli elementi di una data classe. Più in generale, nei limiti di quanto sarà rilevante per la nostra discussione, possiamo caratterizzare una norma come qualcosa che

(i) discrimina, all'interno di una data classe di riferimento, gli elementi *corretti*, o *in accordo* con essa, da quelli *scorretti*, o *in disaccordo* con essa;

(ii) è tale che, nel momento in cui discrimina, o valuta, non è essa stessa oggetto di valutazione.

Possiamo immaginare di esprimere le norme attraverso enunciati del tipo: "se x è un F, o fa y, allora x *dovrebbe* essere un G, o fare un z" :

- "se Francesco ha promesso a Luisa di portarla in centro, allora Francesco *dovrebbe* portarcela";
- "se il predicato P della teoria T può avere una denotazione, allora T *dovrebbe* essere tale che il predicato $\neg P$ possa essere valutato come il complementare della valutazione di P".

Ciò in ragione di cui è possibile valutare la virtù di Francesco nel mantenere le promesse è che il fatto che Francesco eventualmente non ne mantenga una non venga considerato un controesempio alla norma per cui egli dovrebbe farlo: è questo il senso del punto (ii). D'altra parte, fintantochè una norma è utilizzata per giustificare, non può essa stessa essere oggetto di giustificazione (il che non esclude affatto che, in generale, si possano discutere e si possa richiedere di giustificare una norma...sulla base di un'altra norma!).

Dato un insieme di norme, la *giustificazione* di un uso linguistico o di un'azione assume allora una delle seguenti due forme:

giustificazione positiva Si ha quando si mostra che il rispetto di una (o più) delle norme considerate rende *dovuto* l'uso linguistico o l'azione in questione. "Perchè mi hai portato in centro?" "Perchè te lo avevo promesso".

giustificazione negativa Si ha quando si mostra che l'uso linguistico o l'azione in questione non sono in contrasto con le norme considerate. Rispetto ad esse, l'uso o l'azione sono *leciti*. "Perchè non mi rivolgi la parola?" "Perchè ti ho promesso di portarti in centro, non di parlarti".

Le qualificazioni "positivo" e "negativo" si rifanno a quanto visto in §1.2.4: in effetti, la giustificazione positiva, quella che ci informa su ciò che è dovuto, è della forma

$$\exists N \; N \textit{ è una norma rispetto a cui l'azione è dovuta} \tag{2.1.1}$$

mentre la giustificazione negativa, quella che ci informa su ciò che è lecito, è della forma

$$\forall N \textit{ l'azione non viola la norma } N \tag{2.1.2}$$

Nel caso dei modelli, la giustificazione positiva di una formula A non è altro che la validità di A, ovvero, modulo il teorema di completezza, l'esistenza di una derivazione di A, mentre la giustificazione negativa di A corrisponde alla sua soddisfacibilità. Vediamo così che le due forme di giustificazione non sono affatto indipendenti tra loro, ma sono l'una il duale dell'altra: ciò che non è lecito è esattamente ciò il cui opposto è dovuto (il che corrisponde, nel caso dei modelli, al teorema di completezza, come già discusso in §1.2.2).

D'altra parte, se nella deduzione trascendentale e nella TS dei modelli possiamo parlare di giustificazione, dobbiamo farlo secondo sensi molto diversi (si tratta in realtà di riformulare, nel vocabolario delle norme, una tesi già ampiamente dibattuta nel capitolo precedente): nel caso dei modelli, infatti, il tribunale delle interpretazioni si rivela come l'applicazione a una sintassi, quella di LK, delle norme della teoria degli insiemi, laddove la deduzione kantiana, così come l'approccio della semantica delle dimostrazioni (vd. §1.2.4), si rivolge alla ricostruzione di come le stesse categorie dell'intelletto (le sintassi logiche di LK e LL) possono aprirsi a un universo (quello denotazionale) governato da norme; mentre nel primo caso abbiamo a che fare con la riconduzione di un sistema di norme a un altro, nel secondo il tentativo è quello di mostrare come un sistema di regole possa esso stesso istituire una propria normatività semantica.

Testimone dei limiti del primo approccio è il caso, già analizzato (§1.1.4), dei modelli "non standard", nel quale ci troviamo a considerare una norma:

Se T è una teoria aritmetica, allora T dovrebbe soddisfare l'induzione su ogni predicato (2.1.3)

relativamente alla quale il tribunale dei modelli ("non standard") emette un giudizio decisamente non inappellabile: nel momento in cui la norma che dovrebbe valutare risulta meno credibile di quella che dovrebbe essere valutata, l'autorità del tribunale stesso non può che vacillare.

Sembra dunque più interessante e più promettente il proposito, di ispirazione kantiana, di ricostruire la normatività implicita nelle sintassi logiche, costringendole all'unico vincolo che una tale normatività dia un qualche contenuto all'immagine semantica del rapporto tra senso e denotazione.

Il requisito di armonia Una linea di ricerca filosofica fiorita negli ultimi decenni attraverso i lavori, in particolare, di Dummett e Prawitz, è quella che si propone di elaborare una concezione semantica per la logica (e più in generale per il linguaggio) la cui nozione centrale sia quella di "dimostrazione", studiata a partire dai risultati teorici riguardanti le derivazioni nel formalismo della deduzione naturale.

In accordo con la sua concezione circa il compito di una TS (vd. §1.1.3), Dummett (vd. (Dummett, [17])), ad esempio, sostiene che il fine ultimo cui l'analisi semantica deve mirare è quello di una giustificazione delle regole di una lingua, ed in particolare di quelle che disciplinano la pratica dell' inferenza deduttiva:

> A philosophical enquiry into the justification of deductive inference resembles a philosophical investigation of the concept of meaning. (Dummett, [17])

Giustificare le forme di inferenza deduttiva significa cioè mostrare come alle spalle di queste vi siano delle norme che risultano costituitive del senso espresso dagli enunciati che occorrono in una dimostrazione. La nozione di "senso" (di un enunciato) cui Dummett fa esplicitamente riferimento è ripresa ancora da Frege, ed è associata a ciò che fa sì che un enunciato possa essere correttamente asserito.

> The point about a deductive argument is that it is connected at start and finish with the ordinary assertoric use of language. It is required to start from statements whose assertion is warranted, and it serves as a warrant for asserting the conclusion. The rest of our practice governing the assertoric use of language may naturally be supposed to endow the statements which figure as premisses and conclusion of a deductive argument with definite meanings. Those meanings must surely suffice to determine both what warrants the assertion of any of those statements and what consequences result from taking one of them to be true. What, then, justifies the procedure of deductive argument? (Dummett, [17])

Il punto è che, se il senso di un enunciato deve essere concepito come ciò in virtù di cui un parlante è in grado di riconoscere quei contesti in cui sarebbe corretto asserirlo, allora alla pratica deduttiva, che ci permette di passare dall'asserzione di un enunciato all'altro, va richiesto di essere fedele a un tale senso: giustificare la pratica dell'inferenza deduttiva significa in ultima analisi mostrare che

> The meanings of our assertoric sentences generally, and of the logical constants in particular, are given to us in such a way that the forms of deductive inference we admit as valid can be exhibited as faithful to, and licensed by, those meaning and involve no modification of them. (Dummett,[17])

Queste citazioni sottolineano che la giustificazione delle norme di una lingua ha a che fare con la possibilità che le pratiche ammesse da tale lingua possano essere concepite in accordo con una concezione pubblica e collettiva del linguaggio. Possiamo vedere qui un recupero dell'idea fregeana di fondare l'oggettività del riferimento sulla giustificazione dell'oggettività e pubblicità del senso degli enunciati. L'idea è che il senso di un enunciato E sia determinato dall'insieme di tutte le dimostrazioni (se E è un enunciato matematico) o più in generale argomentazioni che hanno come conclusione E.

D'altra parte, le espressioni "faithful to" e "licensed by" adoperate dal filosofo britannico lasciano intuire che l'idea di giustificazione che egli ha in mente comprenda entrambe le forme, positiva e negativa, discusse sopra. Una delle tesi principali di Dummett e Prawitz (la cui prospettiva, seguendo le indicazioni dello stesso Dummett, chiameremo "giustificazionismo"), è quella secondo cui per stabilire il senso di enunciato E non sia necessario fare riferimento a tutte le dimostrazioni possibili di E (del resto, ne seguirebbe che se E è falso, non avendo dimostrazioni, non avrebbe nemmeno senso), ma sia sufficiente considerare tutte le regole di inferenza in cui le componenti sintattiche di E possono occorrere. Ad esempio, comprendere un enunciato complesso della forma $F \wedge G$ non richiede conoscerne ogni possibile dimostrazione, ma sapere come dovrebbe essere fatta una dimostrazione "canonica" di $F \wedge G$, in particolare sapere, in virtù del fatto che il connettivo $\wedge$ occorre nella regola

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}\ (\wedge I) \tag{2.1.4}$$

che ogni dimostrazione di $E \wedge G$ *deve* poter essere ricondotta in accordo con la regola 2.1.4. In tal modo il senso di un enunciato, costituito dalle norme che stabiliscono le condizioni alle quali sarebbe corretto asserirlo, risulta determinato da regole di inferenza.

E' bene, per motivi che saranno più chiari nel seguito, tenere distinte le seguenti due tesi, entrambe sostenute dai giustificazionisti:

(i) *Il senso di un enunciato E è determinato dalle derivazioni corrette (dimostrazioni) di E*

(ii) *La correttezza delle derivazioni di E è determinata dalle regole di inferenza in cui occorrono le componenti sintattiche di E*

Chiameremo in particolare la tesi (ii) *tesi della inferenzialità delle norme.*

Lo strumento concreto di cui si servono i sostenitori di questa "semantica proof-teoretica" (vd. (Dummett, [17]) e (Prawitz, [57])) è il teorema di eliminazione del taglio (o meglio, trattandosi di deduzione naturale, il teorema di normalizzazione - vd. (Prawitz, [56])). E' in virtù di tale teorema che il giustificazionista può sostenere che una derivazione di $A \wedge B$ è corretta se e solo se si accorda con la norma indotta dalla 2.1.4: applicando la procedura di normalizzazione a una derivazione π di $A \wedge B$ si otterrà (in tempo finito) una derivazione π' della forma

$$\frac{\begin{matrix} \vdots & \vdots \\ A & B \end{matrix}}{A \wedge B} \ (\wedge I) \tag{2.1.5}$$

che può essere considerata "canonica" rispetto alla 2.1.4.

Un altro esempio, molto famoso e lungamente discusso, rilevante per cogliere il contenuto linguistico-filosofico attribuito al teorema di eliminazione del taglio è il seguente: consideriamo, nel formalismo della deduzione naturale, le regole di introduzione ed eliminazione per una nuova costante logica, la costante *tonk*:

$$\frac{A}{AtonkB} \ (tonkI_1) \qquad \frac{B}{AtonkB} \ (tonkI_2) \qquad \frac{AtonkB}{A} \ (tonkE_1) \qquad \frac{AtonkB}{B} \ (tonkE_2) \tag{2.1.6}$$

Immaginamo due amici, l'uno avente l'abitudine di giustificare le proprie asserzioni sulla base di procedure che permettano di verificarne la verità (lo chiameremo, come fa Dummett, il *verificazionista*), l'altro con l'abitudine di giustificare le proprie asserzioni sulla base delle conseguenze che l'accettarne la verità comporta (Dummett lo chiama il *pragmatista*); supponiamo inoltre che non piova: il pragmatista sosterrà che questo refuta l'asserto "piove *tonk* c'è il sole", dal momento che il suo uso della costante *tonk* è determinato dalle regole $tonkE_i, i \in \{1,2\}$ e che se fosse vero che piove *tonk* c'è il sole, allora sarebbe vero che c'è il sole; d'altra parte il verificazionista, che usa la costante *tonk* secondo le $tonkI_i$, non sarà affatto d'accordo con l'amico: sosterrà che egli trae una conclusione affrettata, dal momento che dal fatto che piove certamente segue che piove *tonk* c'è il sole e, dopo una singolare discussione, plausibilmente i due si accorgeranno di usare la costante *tonk* in maniera diversa ed inconciliabile.

Questo esempio mostra la rilevanza, per una giustificazione del carattere pubblico del senso, del cosiddetto *requisito di armonia*:

> We say that harmony, in the general sense, obtains between the verification-conditions or application-conditions of a given expression and the consequences of

> applying it when we cannot [...] establish as true some statement which we should not have had other means of establishing [...] The analogue, within the restricted domain of logic, for an arbitrary logical constant c, is that it should not be possible, by first applying one of the introduction rules for c and then immediately drawing a consequence from the conclusion of that introduction rule by means of an elimination rule of which it is the major premiss, to derive form the premisses of the introduction rule a consequence that we could not otherwise have drawn. (Dummett, [17])

Essendo parte della pratica assertoria di una lingua tanto la giustificazione "verificazionista", quanto quella "pragmatista", un requisito della condivisibilità del senso, se si ammette che le regole di inferenza ammesse dalla lingua debbano avere a che fare con esso, è che le due procedure siano tra loro compatibili. E' evidente come il requisito di armonia (chiamato anche *principio di inversione* in (Prawitz, [56])) non sia altro che l'equivalente, nel formalismo della deduzione naturale, della richiesta di eliminabilità dei tagli.

Possiamo osservare (del tutto indipendentemente da Dummett e Prawitz, i quali non considerano mai la prospettiva della "dualità") che, riconducendosi al calcolo dei sequenti, l'analogo del requisito di armonia consiste nel richiedere che ogni disputa tra sostenitori di enunciati duali converga, ossia determini un unico vincitore: la terminazione della procedura dell'eliminazione del taglio, che costituisce l'interazione stessa tra i due giocatori, ha come risultato il *reciproco riconoscimento* del punto di vista dell'altro e il comune assenso circa il vincitore. Alla dualità tra verifica e conseguenza si sovrappone la (più profonda) dualità, già introdotta, tra derivazione e test (vd. §1.2.3).

La procedura di giustificazione, in virtù della tesi di inferenzialità delle norme, si costituisce a partire da un insieme di regole di introduzione (o di eliminazione) che sono concepite come immediatamente giustificate ("Self-justifying" (Dummett, [17])). L'idea è che, se R è una regola di introduzione di un connettivo $\odot$, la norma indotta sarà qualcosa come la seguente:

Se π è una derivazione di una formula in cui $\odot$ occorre come connettivo principale, allora π è (logicamente) corretta se e solo se è possibile estrarre da essa una derivazione π' con la stessa conclusione, tale che l'ultima regola di π' sia la $(\odot I)$.
(2.1.7)

Una volta stabilita una tale norma, si considera poi giustificata a partire da una regola già fissata ogni regola di eliminazione (o di introduzione se la prima era di eliminazione) che risulti in armonia con esse (vale a dire, che sia duale alle prime).

> Our procedure has the effect that *any* elimination rule shown to be in harmony with the introduction rules is justifyable, and hence to be considered valid. (Dummett, [17])

Si noti che l'esempio tipico cui fanno riferimento Dummett e Prawitz è dato dalla coppia $(\wedge I)/(\wedge E)$ di regole per la congiunzione $\wedge$ e dalla normalizzazione in 2.1.8; del resto, esempi di questo tipo, basandosi sulla deduzione naturale nella quale, come si è visto

(§1.2.5), la logica classica non è normalizzabile, conducono naturalmente al sistema NJ e dunque alla giustificazione della sola *logica intuizionista* (vd. LJ in §A),

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\,\pi \\ A\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\,\lambda \\ B\end{matrix}}{A \wedge B}\,(\wedge I)}{A}\,(\wedge E) \quad \rightsquigarrow \quad \begin{matrix}\vdots\,\pi \\ A\end{matrix} \tag{2.1.8}$$

Un riferimento classico, per questa procedura di estrazione delle norme dalle regole di inferenza è in effetti la cosiddetta *semantica BHK* (da Brouwer-Heyting-Kolmogorov), considerata la semantica "naturale" della logica intuizionista. Ad esempio, per i connettivi $\wedge, \vee, \rightarrow$ questa semantica è basata sulle seguenti condizioni:

- *d è una derivazione canonica di $A \wedge B$ se e solo se $d = (d_1, d_2)$, dove d_1 è una derivazione canonica di A e d_2 è una derivazione canonica di B;*
- *d è una derivazione canonica di $A \vee B$ se e solo se $d = (d_i, i), i \in \{0, 1\}$, dove, se $i = 0$, d_i è una derivazione canonica di A, e se $i = 1$, d_i è una derivazione canonica di B;*
- *d è una derivazione canonica di $A \rightarrow B$ se e solo se $d = \lambda a.b$ è un metodo che applicato a una arbitraria derivazione canonica a di A, produce una derivazione canonica $b(a)$ di B.*

Vediamo così come la procedura di giustificazione preferita dai due logici e filosofi, insensibile alla dualità, è inapplicabile alla logica classica; ci troviamo quindi di fronte a un dilemma: o si sceglie di considerare l'uso della logica classica come "linguisticamente infondato" e si propone di abbandonarlo (si tratta della posizione "revisionista" in più occasioni caldeggiata dai giustificazionisti) oppure si accetta questo fallimento come il segno di un limite dello specifico approccio seguito, quello basato sulla deduzione naturale, "naturalmente" miope alla dualità. Nella presente tesi, seppur nel riconoscimento della rilevanza delle osservazioni di Dummett e Prawitz, sarà privilegiato (nettamente) il secondo corno del dilemma: è difficile infatti accettare che un'indagine sulle norme della logica possa avere come esito quello di imporre alla logica le norme dell'indagine!

Del resto, ripensando al caso del *tonk*, si potrebbe osservare, applicando il punto di vista "strategico" del precedente capitolo, che i problemi tra verificazionista e pragmatista nascono dal momento che entrambi pretendono di interagire applicando regole positive, il che, vanificando ogni possibile dualità, rende impossibile la comunicazione: *nessuno dei due vuole avere la prima parola!*

Nell'approccio delle dispute, la dualità 2.1.8 è tradotta nella dualità $(\&)/(\oplus)$ come in 2.1.9, e conduce direttamente alla logica lineare e, attraverso questa, alla giustificazione proof-teoretica tanto della logica intuizionista quanto di quella classica (in essa traducibili).

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\,\pi_1 \\ \vdash \Gamma, A\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\,\pi_2 \\ \vdash \Gamma, B\end{matrix}}{\vdash \Gamma, A \,\&\, B}\,(\&) \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\,\lambda \\ \vdash A^{\perp}, \Delta\end{matrix}}{\vdash A^{\perp} \oplus B^{\perp}, \Delta}\,(\oplus)}{\vdash \Gamma, \Delta}\,\mathit{cut} \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\,\pi_1 \\ \vdash \Gamma, A\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\,\lambda \\ \vdash A^{\perp}, \Delta\end{matrix}}{\vdash \Gamma, \Delta}\,\mathit{cut} \tag{2.1.9}$$

Si noti come, dal punto di vista lineare, le regole di introduzione e di eliminazione del *tonk* corrispondono *entrambe* alla regola del $\oplus$, letta una volta dall'alto verso il basso, l'altra dal basso verso l'alto.

L'aspetto che, al di là di queste osservazioni "anti-revisioniste", ci interesserà e sarà oggetto di indagine è l'idea secondo cui la giustificazione proof-teoretica si riconduce alla ricostruzione delle *norme* indotte dalle regole sintattiche, norme del tipo:

se π è una derivazione di $A \& B$, allora π dovrebbe *vincere con ogni test per $A \& B$ (ovvero con ogni paraprova di $A^{\perp} \oplus B^{\perp}$)* (2.1.10)

attraverso le quali le dispute logiche vengono a costituirsi come processi di riconoscimento della adeguatezza e del rispetto del senso che, proprio attraverso tali interazioni, viene ad essere determinato.

2.1.2 Categorie e semantica delle dimostrazioni

In questo paragrafo sarà istituito un parallelo tra la concezione giustificazionista e i risultati della semantica delle dimostrazioni. La connessione tra queste è data dal ruolo che il teorema di eliminazione del taglio svolge nella prima come garanzia dell'esistenza di una procedura di giustificazione, nella seconda nel garantire l'esistenza di invarianti dinamici.

Oggettività e isomorfismi Dal momento che le derivazioni senza tagli sono considerate per definizione canoniche rispetto alle regole, il giustificazionista sostiene la seguente tesi

π è una derivazione (logicamente) corretta (di A) se e solo se $\exists \pi'$, derivazione di A senza tagli t.c. $\pi \rightsquigarrow \pi'$ (2.1.11)

D'altra parte, la semantica degli spazi coerenti per NJ (accennata in §1.2.5) è tale che $[\![\pi]\!] = [\![\pi']\!]$: questo significa che, in un certo senso, la semantica delle dimostrazioni "non vede" i tagli, e dunque ogni suo oggetto è da considerarsi come canonico. Possiamo tradurre la 2.1.11 così:

π è una derivazione (logicamente) corretta (di A) se e solo se $\exists a \sqsubset [\![A]\!]$ tale che $a = [\![\pi]\!]$ (2.1.12)

La cricca a costituisce allora la denotazione di π (si parla spesso infatti di "semantica denotazionale"): il parallelo tra giustificazionismo e spazi coerenti induce allora la seguente formulazione:

π è una derivazione (logicamente) corretta di A se e solo se ha una denotazione (2.1.13)

che può essere considerata una forma aggiornata, "proof-teoretica", della concezione semantica referenzialista di Frege.

In effetti, se il compito di una teoria semantica è quello di giustificare le regole associate agli enunciati di una lingua riconoscendole adeguate a costituire il fondamento di un senso che, in quanto determinato da norme interattivamente osservabili, può costituirsi come pubblico ed intersoggettivo, alla TS spetterà di selezionare quegli aspetti della sintassi che sono in tal senso rilevanti: questa si ritroverà dunque impegnata in un quoziente semiotico che induce una nozione più ricca, rispetto a quella in §1.1.1, di *oggettività*: possiamo infatti dire che una proprietà di un segno (o di una regola per esso) è da considerare oggettiva se fa una differenza nell'individuazione delle norme (pubbliche) connesse all'uso di esso. Essendo tale nozione di oggettività caratterizzata da norme possiamo in definitiva così riformularla:

Una proprietà di un segno (o di una regola per esso) è oggettiva se è una proprietà che esso, in quanto segno, dovrebbe *avere* (2.1.14)

Dal momento che i segni che ci interessano sono le derivazioni costruite all'interno di un sistema deduttivo, possiamo identificare, in analogia con l'uso di Girard (vd. ad esempio (Girard, [34])), le proprietà oggettive di una derivazione con le sue proprietà *essenziali*, ovvero con le proprietà che questa, per poter essere considerata corretta, *deve* avere: in tal modo, la tesi secondo cui il senso degli enunciati è costituito dalle norme che stabiliscono la correttezza delle dimostrazioni necessarie a sostenerli induce una discriminazione, di natura essenzialmente semiotica, dell'*essenziale* e dell'*inessenziale* in una derivazione: quest'ultima, infatti, in quanto ha una essenza, contribuisce al senso degli enunciati (delle formule) che vi occorrono, e in quanto ha delle componenti inessenziali, non si identifica con questo contributo ma costituisce pur sempre "qualcosa che rinvia ad esso", vale a dire un segno.

D'altra parte l'esistenza di diversi formalismi per la logica (deduzione naturale, calcolo dei sequenti, sistemi di Hilbert, ecc.) mostra la presenza in essi di fattori che dovremo considerare *soggettivi*, e dunque inessenziali, e sembra auspicabile che una buona semantica delle dimostrazioni (vd. §1.2.4) sia in grado di riconoscere al di là di essi le stesse norme. Si noti come questa auspicata "indipendenza dalla sintassi" costituisca invece un limite dell'approccio giustificazionista, così legato ai vincoli della deduzione naturale da essere spinto nella direzione revisionista sopra menzionata. Questa importante differenza costituisce in realtà un vero spartiacque tra le due impostazioni e sarà approfondità in seguito.

Un'osservazione importante è che i vari formalismi costituiscono sintassi diverse *di uno stesso linguaggio $\mathcal{L}$*: laddove cioè, per la semantica dei modelli, il linguaggio è tutto ciò che è richiesto per stabilire una interpretazione (si parla infatti di "modello di un linguaggio"), dal punto di vista della semantica delle dimostrazioni, questo non è affatto sufficiente per l'interpretazione, la quale richiede un sistema deduttivo; rinveniamo così una differenza semiotica fondamentale tra i due approcci: l'oggetto principale, nel caso della semantica dei modelli, è l'enunciato di un linguaggio $\mathcal{L}$, mentre nel caso tanto del giustificazionismo quanto della semantica delle dimostrazioni, è la derivazione in un sistema deduttivo, ovvero quel segno riguardo al quale quale ha senso chiedere se è stato *costruito in accordo con le regole d'uso degli enunciati che vi occorrono.*

Una questione che dovrà quindi interessarci, e molto, nel seguito, riguarda il ruolo che la nozione tecnica di linguaggio (vd. §A) si trova a svolgere in un paradigma alternativo alla concezione modellistica, nel momento in cui cioè l'appartenere a un linguaggio non venga più considerato condizione sufficiente per la semioticità (in particolare, per il riferimento). In definitiva, le differenze tra la concezione semantica implicita nella teoria dei modelli e quelle che stiamo confrontando, a partire dall'analisi di diversi possibili candidati a una semantica delle dimostrazioni può essere riassunta nel seguente diagramma, nel quale le frecce stanno a indicare l'ordine secondo il quale, nei tre casi, dovrebbe procedere la spiegazione:

$$
\begin{array}{rccccc}
\text{sem. dei modelli:} & \text{linguaggio} & \longmapsto & \text{denotazione} & \longmapsto & \text{senso} \\
\text{giustificaz.:} & \overset{\text{+ linguaggio}}{\text{sistema deduttivo}} & \mapsto & \text{derivazioni senza tagli} & \longmapsto & \text{norme} \\
\text{sem. delle dim.:} & \overset{\text{+ linguaggio (?)}}{\text{sistema deduttivo}} & \longmapsto & \text{denotazione} & \longmapsto & \text{essenza}
\end{array}
\tag{2.1.15}
$$

La semantica delle dimostrazioni, a differenza della semantica giustificazionista, è chiamata a spiegare come diversi formalismi possano esprimere le stesse norme, così come tante teorie per l'aritmetica rinviano al concetto di numero naturale. Ciò che invece accomuna i due approcci "proof-teoretici", distinguendoli dall'approccio dei modelli, è che le norme che costituiscono il senso oggettivo degli enunciati sono indotte dalle regole sintattiche e non più dai criteri di una astratta caratterizzazione del riferimento delle formule di un linguaggio a una realtà ad esso esterna (il modello $\mathbb{N}$).

Possiamo vedere concretamente all'opera questa prospettiva semiotica nella semantica degli spazi coerenti: infatti l'identificazione denotazionale si riduce, nella maggior parte dei casi, alla costruzione di opportuni *isomorfismi* tra spazi. L'isomorfismo corrisponde all'identità dell'essenza, non alla piena identità: nello stabilire un isomorfismo tra due segni la componente inessenziale di questi risulta del tutto ignorata. Si pensi a quanto si potrebbe dire circa le differenze che separano questi segni:

$$
||||| \qquad \begin{smallmatrix}\circ\circ\circ\\\circ\circ\end{smallmatrix} \qquad ⚄ \tag{2.1.16}
$$

e d'altra parte alla chiarezza con cui comprendiamo che tutti e tre possono essere usati per riferirsi al numero 5 (che costituirebbe, in questo esempio semplificato, la loro "essenza"), in quanto tutti e tre presentano esattamente cinque stanghette o cerchietti (questa ultima asserzione costituirebbe l'isomorfismo tra tali segni).

L'idea, in definitiva, è che le norme associate all'uso di un segno, affinchè possano risultare oggettive nel senso specificato sopra di dipendere esclusivamente dalle valutazioni e non dalle sintassi cui i segni appartengono, dovranno essere considerate come determinate *a meno di isomorfismo.*

La ricerca di una teoria semantica generale, universalmente applicabile in quanto non vincolata alla "soggettività" di un qualche formalismo, rimanda così a quella di una "teoria generale dell'isomorfismo", la quale rappresenti allo stesso tempo una piena realizzazione ed un superamento dei limiti connessi con le intuizioni giustificazioniste. Un buon candidato, probabilmente il più serio candidato matematico, per una tale teoria è la *teoria delle categorie* (neanche a farlo apposta, se si pensa al riferimento kantiano da cui sono partite queste analisi), della quale saranno ora brevemente accennati alcuni aspetti rilevanti, nell'ambito del suo rapporto (molto intenso, negli ultimi trent'anni) con le ricerche sui fondamenti della logica.

La teoria delle categorie

Definizione 2.1.1 (categoria)**.** *Una* categoria $\mathbf{C}$ *è data dalle seguenti collezioni:*

oggetti *una collezione (non necessariamente un insieme) di* oggetti *di* $\mathbf{C}$*, denotata* $|\mathbf{C}|$*;*

morfismi *per ogni* A, B *oggetti di* $\mathbf{C}$*, un insieme, denotato* $\mathbf{C}(A, B)$*, di morfismi da* A *in* B*.*

i quali soddisfano le seguenti condizioni:

identità *per ogni oggetto* A*, esiste un unico morfismo, denotato* id_A*, in* $\mathbf{C}(A, A)$*;*

composizione *dati gli oggetti* A, B, C*, se* f *è un morfismo in* $\mathbf{C}(A, B)$ *e* g *è un morfismo in* $\mathbf{C}(B, C)$*, allora esiste la loro* composizione*, denotata* $g \circ f$*, la quale è un morfismo in* $\mathbf{C}(A, C)$ *che soddisfa:*

associatività $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \in \mathbf{C}(A, D)$*, con* $f \in \mathbf{C}(A, B), g \in \mathbf{C}(B, C), h \in \mathbf{C}(C, D)$*;*

neutro $f \circ id_B = id_A \circ f = f$*, con* $f \in \mathbf{C}(A, B)$*.*

Caratteristico della teoria delle categorie è di rappresentare le identità tra morfismi attraverso i cosiddetti *diagrammi commutativi*: le condizioni di associatività ed elemento neutro ad esempio diventano:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g \circ f"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "h"] \\
B \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "h \circ g"'] & D
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "id_A"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[d, "f"] \arrow[dl, "f"] \\
B \arrow[r, "id_B"'] & B
\end{tikzcd}
\tag{2.1.17}$$

Un *isomorfismo* di A in B è dato da una coppia di morfismi $f \in \mathbf{C}(A, B), g \in \mathbf{C}(B, A)$ tali che $f \circ g = id_B, g \circ f = id_A$:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_A"'] & B \arrow[dl, "g"] \\
A &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& B \arrow[d, "id_B"] \\
A \arrow[ur, "f"] & B \arrow[l, "g"]
\end{tikzcd}
\tag{2.1.18}
$$

La rappresentazione delle regole della deduzione naturale avviene attraverso la formulazione di *problemi universali*; vediamo di cosa si tratta attraverso un esempio: dati due oggetti A, B in una categoria $\mathbf{C}$, vogliamo trovare un oggetto C e morfismi $\pi_1 \in \mathbf{C}(C, A), \pi_2 \in \mathbf{C}(C, B)$ che sia "il più generale possibile"; questo si esprime richiedendo che per ogni altro oggetto C' e morfismi $f \in \mathbf{C}(C', A), g \in \mathbf{C}(C, B)$ esista un *unico* morfismo $h \in \mathbf{C}(C', C)$ tale che commuta il seguente diagramma:

$$
\begin{tikzcd}
C' \arrow[dr, "h"] \arrow[drr, "f"] \arrow[ddr, "g"'] & & \\
& C \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"] & A \\
& B &
\end{tikzcd}
\tag{2.1.19}
$$

Chiamiamo allora $C = A \times B$ ed il 2.1.19 *diagramma prodotto*. Possiamo vedere la forte analogia con la giustificazione proof-teoretica di Dummett e Prawitz: vengono dati i morfismi π_1, π_2 da $A \times B$ in A e in B, che possiamo leggere come le regole di eliminazione del $\wedge$:

$$
\frac{A \wedge B}{A} \qquad \frac{A \wedge B}{B} \tag{2.1.20}
$$

La soluzione al problema universale costituisce allora la richiesta che l'introduzione di $A \wedge B$ sia in *armonia* con esse: comunque sia stato introdotto $A \wedge B$, se esso viene successivamente eliminato secondo le regole date (rispettivamente rappresentate da $\pi_1 \circ h$ e $\pi_2 \circ h$), la f e la g, che corrispondono all'eliminazione del taglio costituito dalla successione introduzione-eliminazione, deve far commutare il diagramma, il che equivale a richiedere le identità $\pi_1 \circ h = f$ e $\pi_2 \circ h = g$, ovvero che, come richiesto a ogni semantica delle dimostrazioni, le denotazioni di tali derivazioni siano *invarianti per eliminazione del taglio.* Si noti la natura *negativa* del diagramma prodotto: prima vengono le regole di eliminazione, poi quelle di introduzione (come nel caso del &).

D'altra parte, laddove nella rappresentazione in deduzione naturale delle regole della congiunzione le formule che occorrono in esse hanno ancora un ruolo determinante nel caratterizzare le regole stesse, nella rappresentazione attraverso il diagramma prodotto 2.1.19 il nome che associamo agli oggetti *è del tutto convenzionale*, ovvero inessenziale: ciò che gioca un ruolo nel caratterizzare il diagramma è solo la *forma geometrica* di questo. La componente più innovativa della sintesi ottenuta dall'approccio categoriale, contrariamente al proposito del giustificazionista, sembra proprio quella di *considerare le formule del linguaggio, i "nomi" degli oggetti della categoria, come una semplice decorazione di una struttura che è determinata dalla geometria delle sue connessioni.* E' la struttura a determinare i requisiti di un linguaggio ad essa adeguato, e non piuttosto le formule del linguaggio a richiedere una struttura che ne caratterizzi l'uso:

giustificazionismo linguaggio $\overset{\text{(regole d'uso)}}{\Longrightarrow}$ senso

categorie "forma geometrica" delle derivazioni $\overset{\text{(scelta dei "nomi")}}{\Longrightarrow}$ linguaggi adeguati (2.1.21)

Possiamo formulare come un problema universale anche la questione dell'esistenza di un elemento neutro del prodotto: si tratterà dell'(unico a meno di isomorfismo) elemento *terminale* della categoria (in cui esiste), ossia tale che, per ogni oggetto A, si ha $\sharp\mathbf{C}(A,\top) = 1$ (che per ogni altro elemento terminale T, esista un unico morfismo da T in $\top$ segue dalla richiesta, ed anche che ne esista uno unico da $\top$ a T, il che automaticamente produce l'unicità).

Una categoria con un elemento terminale $\top$ e chiusa rispetto al prodotto è detta *cartesiana.* Data una categoria cartesiana $\mathbf{C}$, l'idea di una TS categoriale (per un sistema S in un linguaggio $\mathcal{L}$) è riassunta dalle seguenti associazioni:

- a ogni formula $A \in \mathcal{L}$ è associato un oggetto $[\![A]\!]$ di $\mathbf{C}$;
- a ogni derivazione π di S di una formula $A \in \mathcal{L}$ si associa un morfismo $[\![\pi]\!] \in \mathbf{C}(\top, [\![A]\!])$ e a ogni taglio (modus ponens) tra una derivazione π di A e una derivazione λ di $A \to B$ è associata la composizione $[\![\lambda]\!] \circ h \circ [\![\pi]\!] \in \mathbf{C}(\top, [\![B]\!])$, dove h è l'unico morfismo in $\mathbf{C}(A, \top)$.

Quest'ultima associazione non è altro che un modo corretto, anche se poco naturale, di esprimere il fatto che la composizione di morfismi corrisponde al taglio, e dunque che i diagrammi commutativi corrispondono all'invarianza per eliminazione del taglio. La associatività della composizione è quindi il riflesso di una importante proprietà computazionale, ovvero la cosiddetta *proprietà di Church-Rosser*: se una derivazione π può ridursi in un passo tanto a π' quanto a π'', con questi ultimi due distinti, allora esiste una π''' tale che tanto π' quanto π'' si riducono in un numero finito di passi ad esso:

$$\begin{tikzcd}
\pi \arrow[r] \arrow[d] & \pi' \arrow[d, dashed] \\
\pi'' \arrow[r, dashed] & \pi'''
\end{tikzcd} \qquad (2.1.22)$$

Passiamo ora alla disgiunzione $\vee$, ossia al caso duale, e dunque *positivo*: dati due oggetti A, B in $\mathbf{C}$, vogliamo trovare un C e morfismi $\iota_1 \in \mathbf{C}(A, C), \iota_2 \in \mathbf{C}(B, C)$ tali che, per ogni altro oggetto C' ed ogni altra coppia $f \in \mathbf{C}(A, C'), g \in \mathbf{C}(B, C')$ esiste un unico $h \in \mathbf{C}(C, C')$ tale che commuti il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "\iota_1"] \arrow[ddr, "f"] & \\ B \arrow[r, "\iota_2"] \arrow[drr, "g"'] & C \arrow[dr, "h"] & \\ & & C' \end{tikzcd} \tag{2.1.23}$$

Chiamiamo allora (anche in questo caso in maniera del tutto convenzionale) $C = A + B$ ed il diagramma 2.1.23 *diagramma co-prodotto*. Ancora una volta il diagramma sintetizza la richiesta di armonia con le regole di eliminazione per il $\vee$, e lo fa senza preoccuparsi di rispettare i nomi delle formule. Si noti, peraltro, la maggiore eleganza di questa formulazione rispetto alla complessa regola di eliminazione di $\vee$ nella deduzione naturale:

$$\frac{A \vee B \quad \begin{matrix} A \\ \vdots \\ C \end{matrix} \quad \begin{matrix} B \\ \vdots \\ C \end{matrix}}{C} \, (\vee E) \tag{2.1.24}$$

E' questa dunque una riformulazione più sintetica ed elegante della giustificazione dummettiana:

> Our procedure has the effect that *any* elimination rule shown to be in harmony with the introduction rules is justifyable, and hence to be considered valid. (Dummett, [17])

Anche il co-prodotto ha un elemento neutro definibile universalmente come l'unico *oggetto iniziale*, se c'è, della categoria, ossia tale che per ogni oggetto A, $\sharp\mathbf{C}(\perp, A) = 1$.

Leggermente più complicato è definire la rappresentazione dell'implicazione (che, si ricordi, essendo NJ un formalismo per la logica intuizionista, non è affatto equivalente a una disgiunzione): il problema è analogo a quello che ci siamo posti nel caso degli spazi coerenti (vd. §1.2.3), quando ci chiedevamo a quali condizioni una funzione sulle strategie potesse essa stessa essere una strategia. In quel caso la prima risposta erano state le funzioni stabili, la seconda, più accurata, le funzioni lineari; nel caso delle categorie la risposta viene dal seguente problema universale: dati gli oggetti A, B, trovare un oggetto C e un morfismo $ev \in \mathbf{C}(C \times A, B)$ tale che, per ogni altra soluzione C' e morfismo $f \in \mathbf{C}(C' \times A, B)$, esiste un unico morfismo $\lambda(f) \in \mathbf{C}(C, C')$ che rende commutativo il diagramma seguente:

$$\begin{tikzcd} C' \times A \arrow[rr, "\lambda(f) \times id_A"] \arrow[dr, "f"'] & & C \times A \arrow[dl, "ev"] \\ & B & \end{tikzcd} \tag{2.1.25}$$

Chiameremo allora $C = B^A$ ed il 2.1.25 *diagramma esponenziale*. Si noti che si tratta di un diagramma negativo (prima eliminazione - ovvero, essenzialmente, il modus ponens-, poi introduzione); una categoria chiusa rispetto ai diagrammi esponenziali e cartesiana è detta *cartesiana chiusa* (CCC), ed è l'oggetto principale di indagine di quanti, nell'ambito della semantica delle dimostrazioni, si sono rivolti al cosiddetto problema della *completezza piena*: trovare una categoria cartesiana chiusa i cui morfismi siano esattamente quelli corrispondenti alle derivazioni in NJ.

Possiamo estendere il teorema 1.2.18, che sanciva la banalità dell'interpretazione della logica classica tramite spazi coerenti, al caso generale di una interpretazione categoriale. Definiamo anzitutto la nozione di *funtore*:

Definizione 2.1.2 (funtore covariante e controvariante)**.** *Siano* $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *due categorie; un* funtore covariante (controvariante) $\mathbf{F}(\mathbf{G}) : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *è dato da:*

- *per ogni oggetto* A *di* $\mathbf{C}$*, un oggetto* $\mathbf{F}(A)$ *di* $\mathbf{D}$*;*
- *per ogni morfismo* $f \in \mathbf{C}(A, B)$*, un morfismo* $\mathbf{F}(f) \in \mathbf{D}(\mathbf{F}(A), \mathbf{F}(B))(\mathbf{G}(f) \in \mathbf{D}(\mathbf{G}(B), \mathbf{G}(A)))$ *tale che:*

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(id_A) = id_{\mathbf{F}(A)} \ (\mathbf{G}(id_A) = id_{\mathbf{G}(A)}) \\ \mathbf{F}(g \circ f) = \mathbf{F}(g) \circ \mathbf{F}(f) \ (\mathbf{G}(g \circ f) = \mathbf{G}(f) \circ \mathbf{G}(g)) \end{aligned} \tag{2.1.26}$$

Definiamo inoltre, per ogni categoria $\mathbf{C}$, la categoria duale $\mathbf{C}^{op}$, che ha come oggetti gli oggetti di $\mathbf{C}$ e come morfismi i morfismi di $\mathbf{C}$, ma con la "direzione della freccia invertita", ossia $\mathbf{C}(A, B) \simeq \mathbf{C}^{op}(B, A)$. Si ha immediatamente $\mathbf{C}^{opop} = \mathbf{C}$. Possiamo a questo punto definire una *involuzione* come un funtore controvariante da una categoria al suo duale e stabilire il seguente:

Teorema 2.1.1. *Una CCC con una involuzione è degenere.*

Dimostrazione. Sia $\mathbf{C}$ una CCC e $\mathbf{I} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}^{op}$ una involuzione. Useremo le seguenti osservazioni:

1. se in una CCC $\mathbf{D}$ esiste un elemento iniziale $\perp$, si ha $\mathbf{D}(\perp, B^A) = \mathbf{D}(\perp \times A, B)$ e dunque $\sharp\mathbf{D}(\perp, B^A) = \sharp\mathbf{D}(\perp \times A, B) = 1$, ossia anche $\perp \times A$ è iniziale, per ogni oggetto A.

2. se in una CCC $\mathbf{D}$ esiste un elemento iniziale $\perp$ e si ha $\mathbf{D}(A, \perp) \neq \emptyset$, per un certo oggetto A, allora A è iniziale: sia infatti $f \in \mathbf{D}(A, \perp)$; allora $g = (id_A, f) \in \mathbf{D}(A, A \times \perp)$. Se $h \in \mathbf{D}(A, B)$, si ha $h = (h \circ \pi_1) \circ g$, ma allora, essendo, per 1., $A \times \perp$, iniziale, si ha che $h \circ \pi_1$ è uguale all'unico elemento di $\mathbf{D}(A \times \perp, B)$, e dunque anche h è unica.

Si osservi, a questo punto, che, se $\top$ è terminale in $\mathbf{C}$, $\mathbf{I}(\top)$ è iniziale in $\mathbf{C}^{op}$. La tesi segue allora dai seguenti isomorfismi:

$$\mathbf{C}(A, B) \simeq \mathbf{C}(\top \times A, B) \simeq \mathbf{C}(\top, B^A) \simeq \mathbf{C}(\top, (B^A)^{opop}) \simeq \mathbf{C}^{op}((B^A)^{op}, \perp) \qquad (2.1.27)$$

Se dunque $\mathbf{C}(A, B) \neq \emptyset$, $(B^A)^{op}$ è iniziale e $\sharp\mathbf{C}(A, B) = 1$. □

Questo teorema, confermando l'impossibilità di una seria estensione della deduzione naturale alla logica classica, mostra come la dualità classica sia più in generale incompatibile con la semantica giustificazionista. Lo studio della dualità in logica richiede infatti una analisi più fine delle costanti logiche quale quella offerta dagli spazi coerenti e dalla logica lineare. Si noti che gli spazi coerenti formano essi stessi una categoria **COH** i cui morfismi non sono altro che le funzioni stabili. In effetti, tutte le operazioni sugli spazi coerenti viste in 1.2.3 possono essere riformulate nel vocabolario della teoria delle categorie, potendo infine dimostrare, sfruttando le identificazioni $A \times B := A \,\&\, B$ e $B^A := !A \multimap B$, il seguente:

Teorema 2.1.2. COH *è una CCC.*

Dimostrazione. (cenni) Per quel che riguarda la cartesianità, si usa il fatto che, essendo & una operazione negativa, è reversibile, e dunque si ha che se $c \sqsubset A \& B$, allora $c = a + b$, ossia la somma disgiunta di una cricca di A e una cricca di B. E' possibile allora definire le proiezioni $\pi_1(c) = \pi_1(a + b) = a, \pi_2(c) = \pi_2(a + b) = b$ e verificare che si tratta di funzioni stabili. D'altra parte, se F, G sono funzioni lineari da C, rispettivamente in A e in B, allora definiamo la funzione lineare H da C a $A \,\&\, B$ come $H(c) = F(c) + G(c)$ e verifichiamo immediatamente che $\pi_1 \circ H = F, \pi_2 \circ H = G$. L'operazione & induce come oggetto terminale il suo elemento neutro, ossia lo spazio coerente $\top$.

Per la chiusura, ossia i diagrammi esponenziali, l'idea è considerare la funzione stabile $ev :\sqsubset ((!A \multimap B) \,\&\, A) \to B$ definita da $F(c + a) = (c)a$ (vd. §1.2.3). Data inoltre una funzione stabile $F' : D \times A \to B$, si verifica facilmente che la funzione $H : D \to (!A \multimap B)$, data da $H(d) = tr(F'(d + \cdot))$ è stabile. La commutatività del diagramma 2.1.25 corrisponde allora all'identità $(tr(F'(d + \cdot)))(a) = F'(d + a)$, immediatamente verificata. □

In definitiva, con la teoria delle categorie, riusciamo a esprimere il contenuto dell'idea dummettiana di giustificazione senza comprometterci nell'uso di questa o quell'altra sintassi logica, lasciando convivere, attraverso il recupero categoriale degli spazi coerenti, tanto la prospettiva "intuizionista" quanto quella basata sulla dualità.

Aritmetica e categorie Concludiamo il paragrafo mostrando come l'approccio della cosiddetta giustificazione proof-teoretica possa essere esteso anche al caso delle teorie esprimibili in un linguaggio logico: per apprezzare, anche in questo caso, la natura sintetica dell'apporto della teoria delle categorie, verranno presentate due diverse rappresentazioni dell'aritmetica, una all'interno della deduzione naturale, l'altra all'interno del calcolo dei sequenti, inducenti entrambe la stessa "essenza" categoriale.

Per quanto riguarda la prima rappresentazione, l'idea è di introdurre delle nuove regole di introduzione ed eliminazione per l'aritmetica le quali dovranno sottostare al requisito di armonia (vd. ad esempio (Martin-Löf, [52])):

Definizione 2.1.3 (aritmetica in deduzione naturale). *L'insieme $\mathbb{N}_{dn}$ è generato dalle seguenti regole di introduzione:*

$$\frac{}{0 \in \mathbb{N}_{dn}}\,(zI) \qquad \frac{n \in \mathbb{N}_{dn}}{s(n) \in \mathbb{N}_{dn}}\,(sI) \tag{2.1.28}$$

e dalla regola di eliminazione

$$\frac{t \in \mathbb{N}_{dn} \quad \begin{matrix} \\ \vdots\,(f_0) \\ A(0)\end{matrix} \quad \begin{matrix} A(n) \\ \vdots\, f_s \\ A(s(n))\end{matrix}}{A(t)}\,(fE) \tag{2.1.29}$$

Che le regole siano in armonia è giustificato dal seguente:

Proposizione 2.1.3 (normalizzazione di $\mathbb{N}_{\mathrm{dn}}$). *Sia π una derivazione costruita a partire dalle regole dell'insieme $\mathbb{N}_{dn}$. Allora esiste una derivazione π' senza tagli, tale che $\pi \rightsquigarrow \pi'$.*

Dimostrazione. Ci limitiamo a osservare il caso fondamentale di normalizzazione (il caso per (zI) è immediato):

$$\frac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\,\pi_1 \\ n \in \mathbb{N}_{\mathrm{dn}}\end{matrix}}{s(n) \in \mathbb{N}_{\mathrm{dn}}}\,(sI) \quad \begin{matrix} \\ \vdots\,(f_0) \\ A(0)\end{matrix} \quad \begin{matrix} A(m) \\ \vdots\, f_s \\ A(s(m))\end{matrix}}{A(s(n))}\,(fE) \quad \rightsquigarrow \quad \begin{matrix}\dfrac{\begin{matrix}\vdots\,\pi_1 \\ n \in \mathbb{N}_{\mathrm{dn}}\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\,(f_0) \\ A(0)\end{matrix} \quad \begin{matrix} A(m) \\ \vdots\, f_s \\ A(s(m))\end{matrix}}{A(n)}\,(fE) \\ \vdots\, f_s \\ A(s(n))\end{matrix} \tag{2.1.30}$$

in cui il livello $lev(\pi') = lev(\pi) - 1 < lev(\pi)$ decresce strettamente. □

Si noti come nella proceduralità della normalizzazione sia riconoscibile in azione niente altro che la ricorsione sui numeri naturali (si pensi a $A(x) = \exists y(f(x) = y)$). L'idea di Martin-Löf (Martin-Löf, [52]) è quella di servirsi, così come fatto con le regole logiche, di queste regole come costituenti una *definizione implicita* delle norme che stabiliscono il senso degli enunciati nel linguaggio dell'aritmetica: la procedura di giustificazione fornisce allora la garanzia dell'oggettività di esso.

Passiamo ora alla definizione degli *interi Curry-Howard*: si tratta di una rappresentazione dell'aritmetica costruita all'interno del calcolo dei sequenti per la logica intuizionista LJ (vd. §A), sfruttando la corrispondenza nota appunto come "corrispondenza di Curry-Howard", basata sull'equivalenza seguente:

$$\begin{aligned} \text{Insiemi} &\mapsto \text{Formule} \\ \text{Elementi} &\mapsto \text{Derivazioni} \end{aligned} \tag{2.1.31}$$

Definizione 2.1.4 (interi Curry-Howard)**.** *Gli interi Curry-Howard sono definiti come segue* [1]*:*

- *all'insieme* $\mathbb{N}$ *è associata la formula* $\mathbb{N}_{ch} := \forall X((X \to X) \to (X \to X))$*;*

- *al numero* $n \in \mathbb{N}$ *è associata la derivazione* n_{ch} *seguente:*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{X \vdash X} \quad \dots \quad \overline{X \vdash X}}{X \to X, \dots, X \to X, X \vdash X}\,(\to L)}{X \to X, X \vdash X}\,(C)}{(X \to X) \vdash X \to X}\,(\to R)}{\vdash (X \to X) \to (X \to X)}\,(\to R)}{\vdash \mathbb{N}_{ch}}\,(\forall R) \tag{2.1.32}$$

  in cui occorrono esattamente n occorrenze della regola (C).

- *alla funzione successore* $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *è associata la derivazione* s_{ch} *seguente:*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{X \vdash X}\,(Ax) \quad \dfrac{}{X \vdash X}\,(Ax)}{X \to X, X \vdash X}\,(\to L) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{X \vdash X}\,(Ax) \quad \dfrac{}{X \vdash X}\,(Ax)}{X \to X, X \vdash X}\,(\to L)}{X \to X \vdash X \to X}\,(\to R)}{(X \to X) \to (X \to X), X \to X, X \vdash X}\,(\to L)}{\mathbb{N}_{ch}, X \to X, X \vdash X}\,(\forall L)}{\mathbb{N}_{ch} \vdash (X \to X) \to (X \to X)}\,(\to R)}{\mathbb{N}_{ch} \vdash \mathbb{N}_{ch}}\,(\forall R)}{\vdash \mathbb{N}_{ch} \to \mathbb{N}_{ch}}\,(\to R) \tag{2.1.33}$$

- *date due derivazioni* $f_{0_{ch}}$ *di una formula* A *e* $f_{s_{ch}}$ *di* $A \to A$*, la funzione* f_{ch} *definita per ricorsione a partire da* $f_{0_{ch}}$ *e* $f_{s_{ch}}$ *è rappresentata dalla derivazione seguente di*

[1] E' possibile costruire una versione lineare degli interi Curry-Howard adoperando la formula $\mathbb{N}_{\mathrm{ch}}^{LL} := \forall X(!(X \multimap X) \multimap (X \multimap X))$.

$\mathbb{N}_{ch} \to A$:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$A \vdash A$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$A \vdash A$}
\RightLabel{$(\to L)$}
\BinaryInfC{$A \to A, A \vdash A$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$A \vdash A$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$A \vdash A$}
\RightLabel{$(\to L)$}
\BinaryInfC{$A \to A, A \vdash A$}
\RightLabel{$(\to R)$}
\UnaryInfC{$A \to A \vdash A \to A$}
\RightLabel{$(\to L)$}
\BinaryInfC{$(A \to A) \to (A \to A), A \to A, A \vdash A$}
\AxiomC{$\vdots\, f_{0_{ch}}$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdash A$}
\RightLabel{cut}
\BinaryInfC{$\vdash (A \to A) \to (A \to A), A \to A \vdash A$}
\AxiomC{$\vdots\, f_{s_{ch}}$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdash A \to A$}
\RightLabel{cut}
\BinaryInfC{$(A \to A) \to (A \to A) \vdash A$}
\RightLabel{$(\forall L)$}
\UnaryInfC{$\mathbb{N}_{ch} \vdash A$}
\RightLabel{$(\to R)$}
\UnaryInfC{$\vdash \mathbb{N}_{ch} \to A$}
\end{prooftree}
\tag{2.1.34}
$$

Data una derivazione π di una formula A e una derivazione λ di $A \to B$, con $(\lambda)\pi$ intenderemo la derivazione di B ottenuta tagliando π e λ come segue:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$A \vdash A$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$B \vdash B$}
\RightLabel{$(\to L)$}
\BinaryInfC{$A \to B, A \vdash B$}
\AxiomC{$\vdots\, \lambda$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdash A \to B$}
\RightLabel{cut}
\BinaryInfC{$A \vdash B$}
\AxiomC{$\vdots\, \pi$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdash A$}
\RightLabel{cut}
\BinaryInfC{$\vdash B$}
\end{prooftree}
\tag{2.1.35}
$$

Proposizione 2.1.4. *Valgono le seguenti proprietà:*

- $(s_{ch})n_{ch} \rightsquigarrow (s(n))_{ch}$;
- $(f_{ch})0_{ch} \rightsquigarrow f_{0_{ch}}$;
- $(f_{ch})((s_{ch})^n 0_{ch}) \rightsquigarrow (f_{s_{ch}})^n f_{0_{ch}}$.

Dimostrazione. Si tratta di una lunga verifica, che sarà omessa. Si noti che non vale, come ci si aspetterebbe, $(f_{\mathrm{ch}})((s_{\mathrm{ch}})n_{\mathrm{ch}}) \rightsquigarrow (f_{s_{\mathrm{ch}}})((f_{\mathrm{ch}})n_{\mathrm{ch}})$, dal momento che la riduzione sostituisce "contemporaneamente" ogni contrazione in n_{ch} con una copia di $f_{s_{\mathrm{ch}}}$; d'altra parte, si ha $(f_{s_{\mathrm{ch}}})((f_{\mathrm{ch}})n_{\mathrm{ch}}) \rightsquigarrow (f_{s_{\mathrm{ch}}})^n f_{0_{\mathrm{ch}}}$, e dunque le due derivazioni sono in definitiva semanticamente equivalenti. □

A questo punto possiamo introdurre la semantica categoriale:

Definizione 2.1.5 (NNO)**.** *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria con un oggetto terminale* $\top$. *Un oggetto* N *di* $\mathbf{C}$ *è detto* oggetto di tipo numero naturale *(NNO) se esistono due morfismi* $z \in \mathbf{C}(\top, N), s \in \mathbf{C}(N, N)$ *dotati della seguente proprietà universale: per ogni altro oggetto* N' *di* $\mathbf{C}$ *e morfismi* $f_0 \in \mathbf{C}(\top, N'), f_s \in \mathbf{C}(N', N')$, *esiste un unico morfismo* $f \in \mathbf{C}(N, N')$ *che rende commutativo il diagramma seguente:*

$$
\begin{tikzcd}
\perp \arrow[r, "z"] \arrow[dr, "f_0"'] & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, "f"] & N \arrow[d, "f"] \\
& N' \arrow[r, "f_s"'] & N'
\end{tikzcd}
\tag{2.1.36}
$$

Possiamo leggere le identità indotte dal diagramma 2.1.36:

$$\begin{aligned} f \circ z &= f_0 \\ f \circ s &= f_s \circ f \end{aligned} \tag{2.1.37}$$

come una versione sintetica, "geometrica" e meno legata alle contingenze della deduzione naturale, della ricorsione espressa da 2.1.30, ossia di ciò che una teoria aritmetica *dovrebbe* essere in grado di fare ed allo stesso tempo come la richiesta di invarianza della denotazione di f rispetto alla eliminazione dei tagli indotti tanto dalle regole 2.1.28 e 2.1.29 quanto dalla definizione degli interi Curry-Howard, ossia rispetto alle trasformazioni che costituiscono la sua computazione:

Proposizione 2.1.5. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria che ammetta un NNO* N. *Allora, a ogni derivazione* π *di* $n \in \mathbb{N}_{dn}$ *costruita a partire dalle regole dell'insieme* $\mathbb{N}_{dn}$, *è associato un morfismo* $[\![\pi]\!] \in \mathbf{C}(\top, N)$ *tale che, se* $\pi \rightsquigarrow \pi'$, *si ha* $[\![\pi']\!] = [\![\pi]\!]$; *inoltre, a ogni derivazione* λ *di* $A(n)$, *per una certa formula* A, *se* $[\![A]\!]$ *è un oggetto della categoria* $\mathbf{C}$ *tale che esistano i morfismi* $[\![f_0]\!] \in \mathbf{C}(\top, [\![A]\!])$, *e* $[\![f_s]\!] \in \mathbf{C}([\![A]\!], [\![A]\!])$, *è associato un morfismo* $[\![\lambda]\!] \in \mathbf{C}(\top, [\![A]\!])$, *tale che, se* $\lambda \rightsquigarrow \lambda'$, *si ha* $[\![\lambda']\!] = [\![\lambda]\!]$.

Dimostrazione. La tesi segue dalle seguenti associazioni e dalle equazioni 2.1.37:

(π)

- se π è la derivazione $\dfrac{}{0 \in \mathbb{N}_{\mathrm{dn}}}\, zI$, allora $[\![\pi]\!] = z \in \mathbf{C}(\top, N)$;
- se π è la derivazione $\dfrac{\begin{array}{c} \vdots\ \pi_1 \\ n \in \mathbb{N} \end{array}}{s(n) \in \mathbb{N}_{\mathrm{dn}}}\, sI$, allora $[\![\pi]\!] = s \circ [\![\pi_1]\!] \in \mathbf{C}(\top, N)$;

(λ)

- se λ è la derivazione $\dfrac{m \in \mathbb{N}_{\mathrm{dn}} \quad \begin{array}{c} \vdots\ (f_0) \\ A(0) \end{array} \quad \begin{array}{c} A(n) \\ \vdots\ f_n \\ A(s(n)) \end{array}}{A(m)}\, (fE)$, allora $[\![\lambda]\!] = \underbrace{[\![f_s]\!] \circ \cdots \circ [\![f_s]\!]}_{m \text{ volte}} \circ [\![f_0]\!] \in \mathbf{C}(\top, [\![A]\!])$.

□

Proposizione 2.1.6. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria che ammetta un NNO* N. *Allora, a ogni intero Curry Howard* n_{ch} *ed al successore Curry-Howard* s_{ch} *sono associati rispettivamente un morfismo* $[\![n_{ch}]\!] \in \mathbf{C}(\top, N)$ *ed un morfismo* $[\![s_{ch}]\!] \in \mathbf{C}(N, N)$, *tali che* $[\![s_{ch}]\!] \circ [\![n_{ch}]\!] = [\![(n+1)_{ch}]\!]$; *inoltre, se* $f_{0_{ch}}$ *è una derivazione di una formula* A *e* $f_{s_{ch}}$ *è una derivazione di una formula* $A \to A$, *allora, se* $[\![A]\!]$ *è un oggetto della categoria* $\mathbf{C}$ *tale che esistano i morfismi* $[\![f_{0_{ch}}]\!] \in \mathbf{C}(\top, [\![A]\!])$, *e* $[\![f_{s_{ch}}]\!] \in \mathbf{C}([\![A]\!], [\![A]\!])$, *alla derivazione* π *in 2.1.34 è associato un morfismo* $[\![\lambda]\!] \in \mathbf{C}(N, [\![A]\!])$, *tale che, per ogni intero Curry-Howard* n_{ch}, *si ha* $[\![\pi]\!] \circ [\![n_{ch}]\!] = \underbrace{[\![f_{s_{ch}}]\!] \circ \cdots \circ [\![f_{s_{ch}}]\!]}_{n \text{ volte}} \circ [\![f_{0_{ch}}]\!] \in \mathbf{C}(\top, [\![A]\!])$.

Dimostrazione. La tesi segue immediatamente dalle seguenti associazioni e dalla 2.1.37:

- $[\![0_{\mathrm{ch}}]\!] := z \in \mathbf{C}(\top, N)$;
- $[\![(n+1)_{\mathrm{ch}}]\!] := s \circ [\![n_{\mathrm{ch}}]\!] \in \mathbf{C}(\top, N)$;
- $[\![\pi]\!] := f \in \mathbf{C}(N, [\![A]\!])$, dove f è l'unico morfismo tale che $f \circ z = [\![f_{0_{\mathrm{ch}}}]\!]$ e $f \circ s = [\![f_{s_{\mathrm{ch}}}]\!] \circ f$.

$\square$

Leggendo i risultati di queste pagine alla luce della tesi, delineata sopra, secondo cui la semantica delle dimostrazioni è chiamata a esplicitare le norme costitutive della correttezza delle derivazioni di un sistema deduttivo, possiamo concludere che la teoria delle categorie manifesta in questi esempi la sua natura astratta, rilevata dalla capacità di selezionare le norme che costruzioni appartenenti a distinte sintassi aritmetiche, al di là dei loro aspetti inessenziali, devono rispettare, determinandole come la soluzione, unica a meno di isomorfismo, di un problema universale.

A conclusione di questa breve presentazione della teoria delle categorie e dei suoi rapporti con la logica, potrebbe dunque apparire non insensato sostenere che una tale teoria, sebbene mai esplicitamente citata dai protagonisti della posizione giustificazionista, possa essere considerata come la forma più astratta e matematicamente fondata che una semantica delle dimostrazioni ispirata alle intuizioni essenzialiste fin qui discusse possa assumere.

2.1.3 Giustificazionismo e "rule-following"

In questo paragrafo metteremo le concezioni essenzialiste alla prova degli argomenti del cosiddetto "secondo Wittgenstein" sul "seguire una regola". Mostreremo in particolare le difficoltà che, a mio parere, emergono riguardo all'idea di una giustificazione dell'uso delle derivazioni attraverso il riconoscimento esplicito dell'accordo di queste con i criteri normativi indotti dalle regole di inferenza dei formalismi logici.

I "binari" del senso linguistico Ricapitolando brevemente, ci siamo serviti della semantica delle dimostrazioni per ricostruire, nella dinamica di ogni sintassi, gli invarianti che impegnano questa nei confronti di un ben determinato insieme di norme, il quale a sua volta è considerato come indipendente da ogni specifico formalismo. Abbiamo sostenuto che la teoria delle categorie costituisce la forma più astratta che una semantica siffatta possa avere: questa infatti, attraverso la formulazione (e la soluzione) di problemi universali, determina le condizioni che le derivazioni appartenenti a una sintassi devono soddisfare affinchè possano essere considerate logicamente corrette come le più generali possibili; si tratta cioè di quelle condizioni che ogni sintassi le cui derivazioni esprimano tali norme *dovrebbe* avere. La teoria delle categorie risulta così insensibile tanto ai limiti imposti dalla scelta di un determinato linguaggio, quanto a ogni forma di quella che, a partire dal paragrafo §1.1.5, abbiamo chiamato "soggettività della sintassi" (della quale, si è sostenuto, sono vittime gli stessi giustificazionisti). In breve, caratterizzando le "pure norme" costitutive del senso linguistico, la teoria delle categorie ricostruisce, in ogni sintassi, il modo in cui quest'ultima manifesta un'*essenza.*

D'altra parte, i criteri di correttezza associati a una derivazione (di una certa formula A), la sua essenza, costituiscono ciò in virtù di cui questa deve essere accettata come una dimostrazione (di A), nel senso naturale del termine, ossia come un fondamento inattaccabile sulla base del quale convincersi che A è vera. E' questa una conseguenza immediata della tesi, esposta in §2.1.1, secondo cui il senso di un enunciato è determinato dalle dimostrazioni di tale enunciato. Una delle norme più importanti che a una TS "proof-teoretica" è chiesto di giustificare è quindi quella per cui *dovremmo* senz'altro credere che l'enunciato che costituisce la conclusione di una derivazione corretta è vero. Tornando all'esempio del connettivo *tonk* (§2.1.1), possiamo osservare come nessuna derivazione in cui occorre *tonk*, sebbene correttamente costruita, possa essere adoperata per dimostrare qualcosa, dal momento che non è possibile attribuire alle regole del *tonk* il rispetto di norme pubblicamente condivisibili (in quanto che tali regole rendono impossibile la comunicazione tra quelli che Dummett chiama il verificazionista e il pragmatista).

Prendiamo un esempio da NJ: date due derivazioni π_1, π_2, rispettivamente di C e D, consideriamo la seguente derivazione π di $C \wedge D$:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\ \pi_1 \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\ \pi_2 \\ D\end{matrix}}{C \wedge D}(\wedge I) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[C \wedge D]^x}{C}(\wedge E) \quad \dfrac{[C \wedge D]^y}{D}(\wedge E)}{C \wedge D}(\wedge I)}{C \wedge D \to C \wedge D}(\to I)_{x,y}}{C \wedge D}(\to E) \tag{2.1.38}$$

e chiediamoci in virtù di cosa *dovremmo* considerarla una dimostrazione. Il punto è: come è possibile che un complesso oggetto sintattico, grafico, come la 2.1.38, si imponga a chi lo legge, in virtù del solo fatto di essere stato costruito sulla base delle regole sintattiche di NJ, come una dimostrazione, ed imponga lui di rifiutare possibili derivazioni di $\neg C \vee \neg D$ come dimostrazioni di una tale formula; in breve, come può π rivelare la sua essenza? Ricostruire l'essenza di una derivazione significa in fondo mostrare come essa possa imporsi sulle nostre opinioni.

In virtù del principio 2.1.11 a pagina 90, dal punto di vista di Dummett e Prawitz, per giustificare la derivazione π, è sufficiente mostrare che essa è riducibile a una derivazione π' la cui ultima regola sia la regola di introduzione della congiunzione $(\wedge I)$. Questa è una conseguenza del teorema di normalizzazione di NJ: applicando le trasformazioni necessarie si ottiene infatti π':

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\ \pi_1 \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\ \pi_2 \\ D\end{matrix}}{C \wedge D}(\wedge I)}{C}(\wedge E) \quad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\ \pi_1 \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\ \pi_2 \\ D\end{matrix}}{C \wedge D}(\wedge I)}{D}(\wedge E)}{C \wedge D}(\wedge I) \tag{2.1.39}$$

Sostenere la tesi dell'oggettività del senso linguistico in quanto determinato da regole di inferenza armoniche vuol dire erigere, a fondamento della normatività delle derivazioni, la capacità di riconoscere, in diverse espressioni, una stessa essenza. Le regole cui continuamente fa riferimento il giustificazionista, potendo essere ogni volta addotte a metro di paragone, vengono a costituire un criterio stabile attraverso cui valutare l'uso della lingua. Un senso che ammetta una tale giustificazione è dunque considerato come fissato una volta per tutte, come scrive ad esempio Prawitz:

> Once we have laid down what counts as a canonical proof, it is a factual matter wheter an alleged proof amounts to such a canonical proof. If it is not a canonical proof, then it is again a factual matter wheter the alleged proof yields a method for finding a canonical proof. Hence it should be clear that it is not our treating it as a proof that makes it a proof. [...] the question wheter something is a proof is fixed when the meanings are given, that is, when it is given what counts as a canonical proof. (Prawitz, [59])

L'oggettività del senso, così intesa, comporta che si possa, a un adeguato livello di idealizzazione, considerare, per ogni derivazione, come *già determinato* se questa sia o non sia usata in accordo con le norme fissate dalle regole di inferenza a partire dalle quali è stata costruita.

Dal punto di vista delle categorie, e del principio 2.1.12, la giustificazione richiede che si mostri che la denotazione di π (essendo uguale alla denotazione di π') ha esattamente quelle proprietà per cui una giustificazione è data dal diagramma commutativo del prodotto:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, "\llbracket\pi\rrbracket = \llbracket\pi'\rrbracket"] \arrow[drr, "f"] \arrow[ddr, "g"'] & & \\
& \llbracket C\rrbracket \times \llbracket D\rrbracket \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] & \llbracket C\rrbracket \\
& \llbracket D\rrbracket &
\end{tikzcd} \tag{2.1.40}$$

Anche in questo caso, la giustificazione consiste nel riconoscimento dell'adeguatezza della derivazione π rispetto a norme, quelle che si suppone siano mostrate da diagrammi e soluzioni universali, e che possiamo considerare, come fa il giustificazionista, come fissate una volta per tutte.

Si deve ora osservare che entrambe le forme di giustificazione, quella "alla Dummett e Prawitz" e quella che si serve della semantica denotazionale, sono riconducibili a quelle che in §2.1.1 abbiamo chiamato "giustificazioni positive": una derivazione π è una dimostrazione se esiste qualcosa (una derivazione senza tagli, una denotazione) in virtù della quale π *deve* essere accettata come tale. Il punto di vista duale, quello della "giustificazione negativa", corrisponde al fatto che una derivazione non contraddica le norme che stabiliscono cosa sia una dimostrazione. Nel caso della teoria dei modelli, attraverso l'identificazione di giustificazione negativa (legittimità) e soddisfacibilità, c'è spazio per formule che non sono nè valide nè sicuramente false, e dunque la cui verità non è nè stabilita da una norma nè in contraddizione con alcuna norma; qui invece, si ha che fare con derivazioni che, o sono corrette, nel senso di corrispondere a dimostrazioni, o non esprimono alcuna essenza: non c'è spazio cioè per quella forma "intermedia" di correttezza che nei modelli corrisponde alla soddisfacibilità. In tal modo la giustificazione negativa (π è lecita) viene a corrispondere a quella positiva:

$$\pi \textit{ è una derivazione che è } \text{lecito } \textit{accettare se e solo se } \pi \textit{ è una derivazione che } \text{dobbiamo } \textit{accettare.} \tag{2.1.41}$$

E' così che, come nel kantiano "tu devi, quindi tu puoi", se si considera come già determinato l'aderire (o meno) di π a delle norme, in virtù della possibilità di elaborare una procedura di giustificazione, si deve considerare come già determinato tutto ciò che è lecito, e dunque che *può* essere costruito in accordo con tali norme: la posizione essenzialista sembra così impegnarsi in una nozione di possibilità per la quale fornire un insieme di regole significa fissare una volta per tutte ciò che *può* essere fatto con esse.

> La macchina [...] sembra avere in sè il suo modo di funzionare. Che cosa significa ciò? - Conoscendo la macchina, sembra che tutto il resto, cioè i movimenti che essa farà, siano già completamente determinati. [...] Quando pensiamo che la macchina abbia già in sè, in qualche modo misterioso, i suoi possibili movimenti? - Bene, quando filosofiamo. E che cosa ci induce a pensare così? Il modo e la maniera in cui parliamo delle macchine. Diciamo, per esempio, che la macchina *ha* (possiede) queste possibilità di movimento; parliamo della macchina idealmente rigida che si *può* muovere soltanto in questo modo così e così. (Wittgenstein, [73])

Una discussione più approfondita di questa nozione di possibilità, e del suo ruolo nei fondamenti della logica, sarà portata avanti nel quarto capitolo (vd. §4.6).

Questa concezione delle regole sintattiche come fondamento dei criteri della correttezza delle derivazioni mi sembra ricadere perfettamente in quello che i commentatori di Wittgenstein hanno chiamato il *modello a binari* del senso linguistico, ossia quel modello per cui il senso, una volta fissato da regole, è concepito come una sorta di binario infinito su cui un treno *può* continuare a viaggiare e dal quale *non può* uscire, se non deragliando:

> Ebbene, in luogo della regola potremmo rappresentarci binari. E all'applicazione illimitata della regola corrispondono binari infinitamente lunghi. (Wittgenstein, [73])

Fuor di metafora, il modello a binari del senso è quella concezione che in (McDowell, [54]) è riassunta così:

> Our idea is that to learn the meaning of a word is to acquire an understanding that obliges us subsequently [...] to judge and speak in certain determinate ways, on pain of failure to obey the dictates of the meaning we have grasped; [...] (McDowell, [54])

Wright, un altro importante lettore di Wittgenstein, presenta questa concezione attraverso quella che chiama la tesi della *determinazione completa del senso* (Wright, [75]):

> After a finite number of uses of an expression X, the meaning of X is *completely* fixed, in such a way that the correctness (or incorrectness) of future uses of X in new unconsidered circumstances is determined *in advance.* (Wright, [75])

Nei termini del vocabolario adottato in questo capitolo, considereremo il modello a binari come la tesi secondo cui, data una derivazione π, è determinatamente vero o falso se π sia corretta o scorretta, se corrisponda o meno, cioè a una dimostrazione. In breve, al modello a binari assoceremo l'applicazione della legge di bivalenza tanto alle "giustificazioni positive" quanto a quelle "negative".

Il paradosso del "seguire una regola" D'altra parte,

> "Ma allora, nel seguire una catena di inferenze, sono costretto a seguirla proprio così come faccio?" - Costretto? Dopo tutto, presumibilmente, posso fare quello che voglio! - "Ma se vuoi rimanere in accordo con le regole allora *devi* seguirla in questo modo!" [trad. mia] (Wittgenstein, [72])

A parere di Wittgenstein, il proposito di stabilire una volta per tutte quali sono le norme nel rispetto delle quali consiste l'uso di una derivazione come una dimostrazione è del tutto privo di fondamento: ogni volta che qualcuno accetta una certa espressione come una dimostrazione, quello che fa è semplicemente il prodotto della libera scelta di non considerare nulla come un controesempio a ciò che, con quella espressione, si vuole affermare:

> La dimostrazione non *esplora* l'essenza delle figure, ma esprime ciò che, d'ora in avanti, considererò parte dell'essenza delle figure. [trad. mia] (Wittgenstein, [72])

Il filosofo austriaco oppone, al riconoscimento degli obblighi che la fedeltà a un senso già fissato comporta, la libera decisione di considerare una certa applicazione in accordo con una regola: come osserva Dummett, discutendo la posizione di Wittgenstein:

> Now even if these rules had been explicitly formulated at the start, and we had given our assent to them, our doing so would not in itself constitute recognition of each transition as a correct application of the rules. [...] Hence at each step we are free to choose, to accept or reject the proof; [...] and hence there is nothing which *forces* us to accept the proof. (Dummett, [16])

Dummett non può che osservare che, tanto dal punto di vista delle nostre naturali credenze, quanto da quello del giustificazionista, senza dubbio,

> Wittgenstein's conception is extremely hard to swallow [...] (Dummett, [16])

Il filosofo inglese propone il seguente esempio: supponiamo che una persona debba contare cinque maschi e sette femmine in una classe scolastica e successivamente rispondere a chi gli chiede quanti alunni sono presenti in quella classe, rispondendogli che sono tredici.

> Now, if we came across such a person, we should know what kind of arguments to bring to show him that in such circumstances he must have miscounted on one occasion, and that whenever there are five boys and seven girls there are twelve children. (Dummett, [16])

Dal punto di vista di Wittgenstein, questa persona, qualora ci desse ragione, non farebbe altro che decidere liberamente di considerare come valido un nuovo criterio del contare, senza per questo impegnarsi a riconoscere che fosse in virtù del suo stesso vecchio criterio che egli si era ritrovato in errore.

> But we wish to say that even before we met this person and taught him the principles of addition, it would have been true that if he had counted five boys, seven girls, and thirteen children, he would have been wrong even according to the criteria he himself then ackowledged. That is, he must have made a mistake in counting; and if he made a mistake, then there must have been something that he did which, if he had noticed it, he himself would then have allowed as showing that he had miscounted. (Dummett, [16])

Attraverso la procedura di giustificazione, Dummett mira infatti a spiegare come una derivazione possa imporre a chi la comprende di approvarla come una dimostrazione, ricostruendo l'adesione di questa a regole il cui uso è determinato da quelle che in §1.1.3 abbiamo chiamato "procedure manifestabili", dando contenuto all'idea naturale per cui

> "There is something in virtue of which it is true" means: there is something such that if we knew of it we should regard it as a criterion (or at least as a ground) for asserting the statement. (Dummett, [16])

Dummett sta cioè sostenendo che, qualora un parlante presenti un'argomentazione a matematica scorretta, come il calcolo secondo cui cinque più sette fa tredici, allora esiste un ulteriore argomento (corretto) che dimostra che a è scorretta. La tesi qui sostenuta da Dummett è quindi della forma:

Se π è una derivazione scorretta, allora $\exists\lambda$, dimostrazione (derivazione corretta) del fatto che π è scorretta

(2.1.42)

Accostiamo questo principio al principio 2.1.11 a pag. 90:

π è una derivazione corretta (di A) se e solo se $\exists\pi'$, derivazione di A senza tagli, t.c. $\pi \rightsquigarrow \pi'$

(2.1.11)

Quest'ultimo principio, che costituisce una formulazione della "giustificazione positiva" che abbiamo associato all'impostazione di Dummett, dal momento che è formulato internamente a una sintassi, ci permette di affermare che la correttezza di una derivazione π, modulo aritmetizzazione (vd. §1.1.3), è stabilita da una formula Σ^0_1 della gerarchia aritmetica, e dunque, per il primo teorema di Dedekind 1.1.9 (pag. 32), da una formula Π^1 della gerarchia logica. In particolare, per il teorema di Π^1-completezza, possiamo concludere che, se π è corretta, allora esiste una giustificazione della correttezza di π.

D'altra parte, la proprietà opposta, la scorrettezza, essendo la negazione della correttezza, corrisponderà a una formula Π^0_1 della gerarchia aritmetica, e dunque, per il secondo teorema di Dedekind 1.1.12 (pag. 34), a una formula Σ^1 della gerarchia logica. Ora, in analogia con quanto osservato nella conclusione di §1.1.3, se la scorrettezza di una derivazione corrispondesse all'esistenza di una derivazione di tale scorrettezza, allora dal momento che tale esistenza, modulo aritmetizzazione, sarebbe espressa da una formula Σ^0_1 (e dunque Π^1), avremmo ottenuto una equivalenza tra formule Σ^1 e Π^1, refutata dal teorema di Σ^1-incompletezza (ovvero dal primo teorema di Gödel). Ricordando che, per il giustificazionista, la valutazione della correttezza è condotta internamente a un formalismo, una sintassi logica, osserviamo allora che è proprio in virtù dell'incompletezza, connessa, come si è sottolineato in §1.1.3, con il non collasso della gerarchia logica, che la "giustificazione negativa" espressa dalla 2.1.42, e con essa la richiesta esistenziale che fa Dummett nell'esempio dei numeri, non può essere a sua volta giustificata: stabilire con certezza quanto richiesto da Dummett equivarrebbe infatti a stabilire un'equivalenza tra formule appartenenti a gradini diversi della gerarchia logica.

Un argomento analogo potrebbe essere formulato se, invece della giustificazione attraverso riduzione in forma canonica, che funziona bene soltanto per NJ, avessimo adottato la posizione per cui una dimostrazione è una derivazione che supera tutti i test (adottando quindi ad esempio come calcolo $LL_{\maltese}$): è infatti chiaro che normalizzare una derivazione di NJ ed eliminare i tagli in una disputa tra para-prove polari costituiscono manifestazioni diverse di uno stesso procedimento, il quale in ogni caso produce la giustificazione che una derivazione ha la forma che *dovrebbe* avere.

La conclusione di questo argomento è che il modello giustificazionista di spiegazione funziona bene nel caso "positivo", della correttezza, mentre nel caso "negativo", della scorrettezza, deve affidarsi a una forma di impegno esistenziale che non può, attraverso i suoi stessi metodi, giustificare. E' lo stesso Dummett, del resto, a sottolineare come la sua procedura di giustificazione sia difficilmente applicabile al caso della scorrettezza:

> That is to say, if the justification is addressed to someone who genuinely doubts wheter the law is valid, and is intended to persuade him that it is, it will fail its purpose, since he will not accept the argument. If, on the other hand, it is intended to satisfy the philosopher's perplexity about our entitlement to reason in accordance with such a law, it may well do so. [...] He does not need to be persuaded of the truth of the conclusion; what he is seeking is an *explanation* of its being true. (Dummett, [17])

Si deve tuttavia osservare che la scorrettezza non ha alcun diretto contenuto matematico, dal momento che, fino a ora, l'esistenza di derivazioni scorrette è stata esclusa a priori. Sulla base dei precedenti argomenti risulta allora abbastanza prevedibile come l'irruzione, nel formalismo, di derivazioni scorrette, in un senso che andrà precisato in seguito, e dunque *lecite* seppur non *dovute*, possa portare a una revisione radicale del quadro e dell'architettura su cui poggiano le concezioni che stiamo discutendo.

Se ci rivolgiamo adesso alla procedura denotazionale di giustificazione, possiamo accorgerci che vale esattamente l'opposto della concezione di Dummett: in virtù del principio 2.1.12 a pag. 90

$$\pi \text{ \emph{è una derivazione giustificata (di} } A\text{\emph{) se e solo se} } \exists a \sqsubset [\![A]\!] \text{ \emph{tale che} } a = [\![\pi]\!] \tag{2.1.12}$$

o della sua formulazione categoriale:

$$\pi \text{ \emph{è una derivazione giustificata (di} } A\text{\emph{) se e solo se} } \exists f \in \mathbf{C}(\top, [\![A]\!]) \text{ \emph{tale che} } f = [\![\pi]\!] \tag{2.1.12}$$

la correttezza della derivazione π non equivale affatto a una formula Σ^0_1. Infatti, nel caso degli spazi coerenti la quantificazione esistenziale è sulle cricche di uno spazio X, potenzialmente infinito, e dunque su un insieme potenzialmente non numerabile ($\wp(X)$): non è quindi in generale possibile alcuna aritmetizzazione delle cricche di uno spazio coerente. Analogamente, non è in generale possibile aritmetizzare i morfismi, potenzialmente non numerabili, di una categoria.

D'altra parte la quantificazione sull'insieme potenza $\wp(X)$ può essere rappresentata, come nei modelli della logica del secondo ordine, da un quantificatore del secondo ordine: la correttezza rispetto agli spazi coerenti risulta così espressa da una formula Σ^1. Analogamente, anche la quantificazione sui morfismi $f \in \mathbf{C}(X, Y)$ tra due oggetti X e Y di una categoria può essere espressa al secondo ordine, e dunque possiamo considerare in generale la correttezza denotazione come espressa da una formula Σ^1.

Il teorema di Σ^1-incompletezza, allora, conferma una delle caratteristiche peculiari, già osservate, della semantica delle dimostrazioni: non ogni cricca di uno spazio coerente e non ogni morfismo di una CCC provengono da derivazioni corrette. All'esistenza di una denotazione, costituendo questa una quantificazione su un dominio non aritmetizzabile, non possiamo quindi attribuire un chiaro contenuto procedurale.

La morale di questo argomento è quindi che, laddove il giustificazionista predilige la parte "positiva", e non sa trattare quella "negativa", al contrario, l'essenzialista che si serve della semantica delle dimostrazioni, non sa trattare la correttezza, la parte "positiva", e predilige piuttosto la verifica della scorrettezza, ovvero la parte "negativa" (la quale è invece espressa, per dualità, da una formula Π^1).

In entrambi i casi, il "modello a binari" si manifesta attraverso la seguente tesi

π è corretta (risp. scorretta) se e solo se esiste una procedura che mostra che π è corretta (risp. scorretta) (2.1.43)

il cui impegno esistenziale non può essere a sua volta giustificato in nessuna delle due prospettive (che, come abbiamo visto, sono tra loro duali). Del resto, si potrebbe obbiettare, come si è visto nel paragrafo §2.1.1, che è un tratto tipico delle norme che, *fintantochè sono usate per valutare*, non sono esse stesse valutabili. Il punto però è che non sono le norme a richiedere una valutazione, bensì le espressioni (quelle che esprimono la procedura di giustificazione) che, proprio nel riferirsi alla correttezza della derivazione π, rappresentano una *applicazione* delle norme: l'aspetto importante che emerge da entrambe le prospettive, è che *condizione necessaria per poter giustificare la correttezza di π, è che le espressioni attraverso le quali tale giustificazione è condotta, si riferiscano* *a π e costituiscano una dimostrazione la cui conclusione sia appunto che π è corretta*: in breve, che tali espressioni rappresentino una derivazione corretta. Ci accorgiamo così di essere all'inizio di un regresso infinito che lascia la giustificazione di π priva di fondamento.

> "Ma allora come può una spiegazione aiutarmi a comprendere, se non è la spiegazione ultima? Allora la spiegazione non è proprio mai finita; io dunque continuo a non capire e non capirò mai cosa egli intende!" - Quasi che una spiegazione, quando non è sostenuta da un'altra, resti, per così dire, sospesa nel vuoto. Invece una spiegazione può bensì poggiare su un'altra spiegazione già data, ma nessuna spiegazione ha bisogno di un'altra - a meno che non ne abbiamo bisogno *noi*, per evitare un fraintendimento. (Wittgenstein, [73])

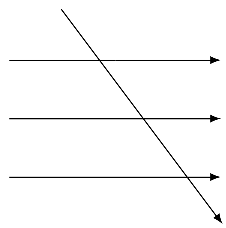
Qualunque procedura adoperata per spiegare, chiarire meglio il senso di ciò che si vorrebbe dire, secondo Wittgenstein, deve fermarsi a un certo punto, ossia quando colui che l'ha richiesta si ritiene soddisfatto di essa, ovvero ritiene di aver compreso l'essenza del discorso. Ma allora, applicando questa tesi al caso in questione, il processo di giustificazione ha termine nel momento in cui, "intuendo" in qualche modo di aver "afferrato l'essenza", *decidiamo* che esso ha compiuto il suo dovere; tuttavia tale scelta, così concepita, non può avere alcuna forma di oggettività, come riconosce lo stesso Wittgenstein:

> [...] E *credere* di seguire una regola non è seguire una regola. E perciò non si può seguire una regola "*privatim*": altrimenti credere di seguire una regola sarebbe la stessa cosa che seguire la regola. (Wittgenstein, [73])

Non può dunque consistere in questo la decisione di cui parla il filosofo austriaco: egli infatti riconosce che una componente essenziale (come già osservato in §2.1.1) di una norma è che essa determini delle valutazioni che siano indipendenti dalle credenze dei parlanti nel senso che, anche qualora tutti i parlanti credessero di accordarsi con essa, ciò nondimeno essi potrebbero trovarsi in errore, come è evidenziato dal seguente passo:

> Qui si vorrebbe dire: corretto è ciò che mi apparirà sempre tale. E questo vuol dire soltanto che qui non si può parlare di "corretto". (Wittgenstein, [73])

Ci veniamo così a trovare paralizzati nell'impossibilità di giustificare l'oggettività della correttezza di una derivazione, nel momento in cui ogni tentativo di giustificare tale attribuzione tramite opportune procedure (a loro volta corrette o scorrette) ripropone lo stesso problema al livello della sintassi di queste stesse procedure. E' questo un modo di leggere il più generale argomento wittgensteiniamo che mira a mostrare come nessuna rappresentazione dell'applicazione di una regola sia sufficiente a giustificare un certo uso come una corretta applicazione di essa.

> Immagina che ora vengano introdotti differenti modi di leggere una tabella; che cioè essa venga letta, una volta, come sopra, secondo questo schema:
>
> 
>
> e un'altra volta secondo quest'altro schema:
>
> 
>
> o un altro ancora. - Un tale schema è allegato alla tabella, come regola del modo in cui la si deve usare.
>
> Non potremmo immaginare ulteriori regole, intese a chiarire *questa*? E, d'altro canto, era incompleta quella prima tabella senza lo schema delle frecce? E sono incomplete le altre tabelle, senza il loro schema? (Wittgenstein, [73])

E' interessante istituire qui un parallelo con una delle dottrine filosofiche più discusse della prima critica di Kant, vale a dire quella dello *schematismo trascendentale*, la quale fa emergere le difficoltà di un approccio puramente categoriale alla conoscenza (e l'ambiguità tra categorie kantiane e categorie in matematica è qui esplicitamente cercata).

Kant parte dal riconoscimento che, laddove le rappresentazioni si costituiscono nel tempo (e nello spazio), le categorie, essendo concetti puri dell'intelletto, non possono concretamente applicarvisi:

> Peraltro, i concetti puri dell'intelletto sono del tutto *eterogenei* in confronto alle intuizioni empiriche (anzi, in confronto alle intuizioni sensibili in generale), e non possono mai venir ritrovati in una qualche intuizione. Ora, com'è possibile la *sussunzione* delle intuizioni sotto concetti, e quindi, com'è possibile l'*applicazione* della categoria ad apparenze [...]? (Kant, [46])

La soluzione è postulare l'esistenza di un terzo elemento, omogeneo tanto alle intuizioni spazio-temporalmente situate quanto alle categorie: tale elemento è una "determinazione trascendentale del tempo", uno schema, vale a dire un procedimento, una costruzione nello spazio e nel tempo che realizza la categoria.

> Così se io pongo cinque punti l'uno dopo l'altro: ....., questa è un'immagine del numero cinque. Per contro, se io penso soltanto un numero in generale [...] questo pensiero è la rappresentazione di un metodo per rappresentare in un'immagine, conformemente a un certo concetto, una pluralità [...]. (Kant, [46])

E, ancora più esplicitamente

> In realtà, a fondamento dei nostri concetti sensibili puri stanno non già immagini degli oggetti, bensì schemi. Nessuna immagine di un triangolo potrebbe mai essere adeguata al concetto di un triangolo in generale. (Kant, [46])

Se una regola viene concepita come un qualcosa di puro, come la soluzione a un problema universale nella teoria delle categoria, questa sarà insufficiente a determinare come dovrà essere concretamente applicata. L'idea kantiana (non quella di Wittgenstein!) è quella di ricorrere a un terzo elemento, la costruzione schematica. Il problema è che questo schema, questo metodo, che nella sua concretezza sensibile realizza l'universale, sfugge drammaticamente a ogni tentativo di caratterizzazione, al punto che Kant è costretto a dire, in uno dei passaggi considerati tra i più bui in (Kant, [46]):

> Questo schematismo del nostro intelletto [...] è un'arte nascosta nelle profondità dell'anima umana: difficilmente impareremo mai dalla natura le vere scaltrezze di quest'arte, in modo da poterle presentare senza veli. (Kant, [46])

Nella *Critica della Ragion Pura* il problema sembra rimanere sostanzialmente insoluto: fintanto che le categorie restano così pure, gli schemi rimangono un mistero.

Riassumendo, il paradosso nel quale siamo rimasti imbrigliati è determinato dalla contemporanea validità delle seguenti tesi, apparentemente inconciliabili:

1. *La valutazione della correttezza di una derivazione rispetto a un insieme di norme non può consistere nell'esistenza di una procedura (corretta) di giustificazione che produce un riconoscimento oggettivo di tale correttezza.* Secondo Wittgenstein, addirittura, tale valutazione consiste ogni volta nella decisione indipendente, da parte di un parlante, di considerare la derivazione, o anche una certa rappresentazione di essa, come un applicazione corretta rispetto alle norme;

2. *I criteri su cui si basa la valutazione della correttezza di una derivazione rispetto a un insieme di norme non sono riducibili all' assenso da parte di un parlante o di una comunità*, nel senso che la derivazione potrebbe essere scorretta anche nel caso in cui tutti credessero (o decidessero) che fosse corretta.

La tesi di Wright L'idea che muove il resoconto giustificazionista del senso linguistico è quella di mostrare come quest'ultimo sia determinato dalla pratica interattiva del linguaggio e come la sua oggettività possa essere il fondamento della pubblica valutabilità dell'uso (si pensi al dibattito tra verificazionista e pragmatista accennato in §2.1.1); d'altra parte, però, ciò che la procedura di giustificazione mira a riconoscere è una adeguatezza delle derivazioni a norme che, seppur generate interattivamente, una volta fissate sono considerate come indipendenti da ogni prassi: il rapporto tra regola e applicazione o, nel nostro caso, tra dimostrazione e derivazione, una volta costituitosi nella prassi linguistica, viene ad essere l'oggetto di un riconoscimento che è, in sostanza, una questione tra il singolo parlante e il senso, l'essenza, cui egli cerca di riferirsi. E' a questo punto che, come suggerito in (Wright, [76]), il paradosso wittgensteiniano può essere riformulato come un dilemma: supponiamo infatti che una persona, magari la stessa che sbagliava a contare gli studenti qualche riga fa, non accetti la derivazione π in 2.1.38 a pag. 104 come una dimostrazione, oppure non ritenga che una qualche para-prova λ di un enunciato A di $LL_{\maltese}$ superi un certo test τ (con conclusione $\sim A$). Immaginiamo anche che questa persona riesca a elaborare una spiegazione giustificazionista del senso che, in virtù di π (o λ o τ), egli attribuisce ad A; egli porrà tale giustificazione a fondamento del suo disaccordo nei nostri confronti.

Si ricordi che la questione è da considerare, per il momento, puramente filosofica, in quanto queste forme di disaccordo sono escluse a priori dai formalismi adoperati dal gustificazionista. Supponiamo tuttavia che una tale situazione di disaccordo sia davvero possibile (e nei prossimi paragrafi ci renderemo conto che lo è davvero). Assumendo il "modello a binari", si manifesta il seguente dilemma: o accettiamo che tanto la giustificazione da noi fornita quanto quella fornita dal nostro avversario costituiscano corrette giustificazioni del senso che attribuiamo rispettivamente alle conclusioni (opposte) delle nostre derivazioni, e allora, pur sapendo che uno di noi non ha compreso il "vero" senso di A, non possiamo stabilirne l'identità; oppure accettiamo che entrambi abbiamo correttamente inteso il senso di A, e allora non possiamo stabilire che entrambe le procedure di giustificazione siano in accordo con il senso che mirano a giustificare. Per capirci, siano g_λ, g_τ le procedure di giustificazione associate, rispettivamente, a λ e τ; sappiamo che tra colui che propone la derivazione λ (chiamiamolo P) e colui che propone la derivazione τ (chiamiamolo Q) c'è un disaccordo; le due possibilità considerate da Wright sono le seguenti:

- g_λ e g_τ sono corrette, e dunque, se P e Q sono in disaccordo, è perchè attribuiscono un senso diverso ad A.
- una tra g_λ e g_τ è scorretta, e dunque, se P e Q sono in disaccordo, è possibile che questi soltanto *credano* di attribuire un senso diverso ad A.

Tuttavia, dal punto di vista tanto di P, quanto di Q, dalla loro discussione, (dalla loro *interazione*), non è possibile distinguere i due casi: in entrambi si produce una incomprensione (reale o solo presunta). Qui si potrebbe istituire un parallelo con la questione del bastone diritto e storto in §1.1.4. La conclusione che ne trae Wright è la seguente:

> The two horns of the dilemma come indeed to the same thing, more or less: my knowledge of the rule that I follow is utterly indifferent to the possibility of my communicating it. (Wright, [76])

Una volta che si ammetta tanto l'oggettività del senso quanto quella della procedura di giustificazione, si ammette con esse la possibilità che un parlante possa afferrare il primo ma non la seconda o viceversa, dando luogo a un dilemma la cui conclusione è che queste due forme di oggettività risultano, in ultima analisi, indipendenti tra loro. Analogamente, pensando allo schematismo di Kant, si potrebbe osservare che postulare, accanto all'accordo di una rappresentazione con una categoria dell'intelletto, l'accordo di uno schema tanto con la rappresentazione quanto con la categoria, significa moltiplicare il problema dell'oggettività della valutazione in una serie di problemi equivalenti e reciprocamente indipendenti. Quella a cui in seguito si farà riferimento come la *tesi di Wright*, è dunque la tesi dell'*indipendenza della conoscenza (dei criteri) del senso dalla capacità di esprimerlo.*

La conclusione che Wittgenstein ci spingerebbe a trarre, sempre secondo Wright, è in definitiva l'abbandono del "modello a binari":

> Non hai alcun modello di questo super-fatto e tuttavia sei tentato di usare una super-espressione. (Si potrebbe chiamarlo un superlativo filosofico) (Wittgenstein, [73])

e con esso l'idea che l'oggettività del senso degli enunciati possa essere spiegata col ricorso a procedure che stabiliscano dei criteri universalmente applicabili per la valutazione delle derivazioni e del loro uso. A questa idea, sempre nella lettura di Wright, Wittgenstein sostiuirebbe quella opposta per la quale

> L'applicazione rimane un criterio della comprensione. (Wittgenstein, [73])

secondo cui la correttezza di una applicazione non è determinata da altro che dalle decisioni, che i parlanti prendono, di considerare una certa applicazione come corretta: tali decisioni, una volta che si sia riconosciuto che non devono essere confrontate con nessun criterio predeterminato, aspirano a guadagnarsi la propria fetta di oggettività nel momento in cui sono esse stesse oggetto di valutazione da parte degli altri parlanti. E' il fatto che, nelle loro scelte, i parlanti costituiscano forme di accordo e di collaborazione a produrre la naturale credenza in criteri di valutazione che trascendano il continuo ricorso all'accordo comune. La credenza naturale nell'esistenza di "criteri oggettivi del senso", esprimibili attraverso le regole di inferenza, d'altra parte, nel momento in cui è assunta come opzione teorica, produce il paradosso per cui questi criteri "investigation-independent" (vd. (Wright, [76])) non possono essere oggetto di alcun genuino riconoscimento tanto individuale, quanto pubblico. In tal modo, ciò che caratterizza il senso di un enunciato non è altro che il prodotto delle concrete forme di assenso che il suo uso produce.

La tesi di Wright, secondo cui il senso non possa essere determinato da criteri "investigation-independent" (Wright, [76]), come quelli implicati dal modello a binari, è oggetto di un acceso dibattito tra i commentatori di Wittgenstein: l'aspetto delicato, che al sostenitore di questa tesi è richiesto di chiarire, è come un senso determinato dal concreto uso e dalle forme di assenso che di volta in volta produce possa costituirsi come indipendente dalle credenze di una comunità linguistica. A parere di Dummett, ad esempio, questa impostazione ha come conseguenza "the denial of the objectivity of proof" (Dummett, [16]), ossia la tesi secondo cui una derivazione è una dimostrazione se e solo se è trattata come tale dalla comunità che se ne serve. Anche McDowell si esprime in sfavore della lettura che di Wittgenstein è offerta da Wright, sostenendo che

> The problem for Wright is to distinguish the position he attributes to Wittgenstein from one according to which the possibility of going out of step with our fellows gives us the *illusion* of being subject to norms, and consequently the *illusion* of entertaining and expressing meanings. (McDowell, [54])

Senza pretendere qui di entrare nel dettaglio di questo acceso dibattito, e dunque senza prendere una precisa posizione tanto circa la fedeltà di Wright alle idee, non sempre cristalline, di Wittgenstein, quanto circa la validità in generale della posizione difesa dal filosofo britannico, possiamo in ogni caso trarre le seguenti conclusioni, che riassumono il percorso svolto in questo paragrafo:

il ruolo semantico della scorrettezza: nel momento in cui i formalismi deputati alla ricostruzione del senso linguistico, vale a dire della normatività implicità nell'uso di una lingua, escludono ogni forma di disaccordo, ossia non conferiscono alcun concreto valore nè sintattico nè semantico alla scorrettezza, la procedura di giustificazione non è immune al dubbio scettico circa il sua reale o soltanto preteso conferimento di oggettività: è infatti il fenomeno del disaccordo che dà luogo a quelle considerazioni che ci portano a concludere che la conoscenza che un parlante può esplicitare delle regole di inferenza che costituiscono il senso degli enunciati che usa, rappresentata dai procedimenti di giustificazione che è in grado di produrre, è indipendente dal senso che effettivamente, in virtù del suo uso effettivo, attribuisce a tali espressioni. Sembra dunque opportuno che la questione della scorrettezza e dell'incomprensione sia riflessa sul piano semantico.

dalle regole dell'uso all'uso delle regole: nelle riflessioni del "secondo Wittgenstein", si affaccia la possibilità di sostituire, all'idea secondo cui la capacità di ricondurre la significatività dell'uso di un insieme di espressioni a procedure che manifestano il rispetto da parte di tale uso di un certo insieme di norme condivise, il proposito inverso di ricostruire le regole e le norme loro associate a partire dall'uso e dalle specifiche forme di accordo e assenso che questo di volta in volta produce nella pratica del linguaggio ed in particolare nella pratica della dimostrazione. Alla ricerca delle norme che costituiscano i criteri di un uso corretto dei segni, si sostituisce lo studio di come l'uso stesso, in quanto pratica dell'accordo e del disaccordo, possa costituirsi come criterio per la comprensione delle regole.

A partire dal prossimo paragrafo, vedremo come queste questioni genuinamente filosofiche possano avere un serio contenuto logico, proprio a partire dal complesso rapporto, che è fin dall'inizio oggetto di questa tesi, tra la sintassi di un sistema formale ed il suo (presunto) contenuto matematico.

2.1.4 La sintassi nello spazio e nel tempo

In questo paragrafo lo spazio e il tempo concreti necessari per l'esecuzione delle interazioni logiche, considerati del tutto irrilevanti negli approcci essenzialisti, si riveleranno come un dominio di ricerca molto interessante per la questione della "soggettività della sintassi" il quale, a partire dalle ricerche di Girard sulle "logiche leggere", ha assunto un contenuto direttamente logico.

Giustificazionismo e incompletezza Prendiamo, ancora per un momento, per buona la posizione del giustificazionista. Assumiamo cioè che, una volta stabilito un insieme di regole armoniche, possiamo considerare l'accordo con esse come stabilito una volta per tutte dall'esistenza, per ogni derivazione corretta, di una procedura di giustificazione.

Consideriamo il caso, esposto in §2.1.2 (pag. 99), delle regole che generano la deduzione naturale per l'aritmetica:

$$\frac{}{0 \in \mathbb{N}}\,(zI) \qquad \frac{n \in \mathbb{N}}{s(n) \in \mathbb{N}}\,(sI) \qquad \frac{t \in \mathbb{N} \quad \begin{array}{c} \vdots\,(f_0) \\ A(0) \end{array} \quad \begin{array}{c} A(n) \\ \vdots\, f_n \\ A(s(n)) \end{array}}{A(t)}\,(fE) \tag{2.1.28}$$

Il giustificazionista, nel ritenere che tali regole determinino un senso oggettivo, si impegna a sostenere che sia determinato il fatto che una derivazione sia o meno una dimostrazione canonica di un enunciato aritmetico. Tuttavia, applicando il teorema 1.1.6 (pag. 28) di Π^0_1-incompletezza, ovvero il primo teorema di Gödel, possiamo facilmente convincerci che, dato un sistema deduttivo S, ovvero una sintassi aritmetizzabile (vd. §1.1.3), che rappresenti le derivazioni canoniche degli enunciati aritmetici, esisterà una derivazione corretta π che non corrisponde a alcuna derivazione di S, e dunque per la quale non esiste, entro S, alcuna procedura di giustificazione: si tratta in effetti della derivazione della formula che si dimostra essere indecidibile in S. E' decisivo osservare che questa derivazione può essere ridotta in forma canonica ovvero che, in una certa *altra sintassi* S', sarà possibile applicare la procedura di giustificazione a π, facendo vedere che essa è costruita in accordo con le regole canoniche dell'aritmetica, *quelle stesse regole il cui senso è espresso dalle* 2.1.28. Un esempio di tale sintassi S' è dato dalla *teoria intuizionista delle definizioni induttive iterate* ($IIID$) (vd. Martin-Löf, [51]) all'interno della quale è possibile ricostruire, in maniera sostanzialmente identica, le regole 2.1.28, aritmetizzarle ed infine costruire una derivazione π di una formula che esprime la coerenza, ovvero la non derivabilità del falso, a partire dalle regole 2.1.28. In virtù del teorema di eliminazione del taglio di cui $IIID$ gode, la π si riduce a una derivazione π' che risulta canonica relativamente alla rappresentazione in $IIID$ delle regole dell'aritmetica, rappresentazione che, dal punto di vista categoriale, è chiaramente *isomorfa* alla 2.1.28, sebbene π' non possa essere, in virtù del secondo teorema di incompletezza, canonica relativamente a quest'ultima.

Nel precedente paragrafo abbiamo sostenuto che la correttezza di una derivazione, nella prospettiva del giustificazionista, è espressa da una formula Π^1, e dunque, per il teorema di Π^1-completezza, se π è una derivazione corretta, allora esiste una procedura di giustificazione per π (entro lo stesso sistema deduttivo di π). Questo apparentemente contraddice l'esempio appena proposto, nel quale invece abbiamo trovato una π corretta non giustificabile (entro la deduzione naturale). D'altra parte, *l'unico modo per mostrare che le norme rispetto a cui questa π è corretta sono le* stesse *norme espresse dalle 2.1.28 è col ricorso alla nozione di isomorfismo*: per comprendere questo esempio dobbiamo muoverci in un contesto categoriale, e dunque applicare la semantica delle dimostrazioni. Quest'ultima, abbiamo del resto sostenuto, equipara la correttezza a una formula Σ^1, per la quale vale la Σ^1-incompletezza. In definitiva, gli strumenti (effettivi, in quanto basati sulla procedura di eliminazione dei tagli) del giustificazionista sono insufficienti per spiegare, giustificare, questo esempio. D'altra parte, come si è detto, gli strumenti categoriali, ben più adeguati, risultano del tutto privi di quella componente effettiva che caratterizzava l'impegno esistenziale del giustificazionista: dalla correttezza di π segue che esiste un morfismo $f_\pi = [\![\pi]\!]$, ma non è detto che esista una procedura per trovarlo!

Se ne conclude che *la procedura di giustificazione, nei limiti in cui può essere condotta rigorosamente, ossia nei limiti di un sistema deduttivo, non può che costituire essa stessa un punto di vista* soggettivo *sull'essenza che è chiamata a mostrare.*

> [...] there is no longer any reason for resisting the idea that in this respect the notion of "natural number" is an inherently vague one. (Dummett, [14])

Anche Dummett è costretto ad ammettere che, laddove, per via dell'incompletezza, la procedura di giustificazione non può dare senso dell'oggettività che attribuiamo alle dimostrazioni aritmetiche, il giustificazionista non ha armi per affermare il "quid iuris" dell'uso delle costruzioni aritmetiche:

> If someone chose not to believe that there was any such totality for which induction with respect to any property well defined to it was always valid, i.e. that we could consistently speak of such a totality, there would, as far as I can see, be no way of persuading him otherwise. (Dummett, [14])

D'altra parte, continuare ad adottare il "modello a binari" ed al contempo sostenere che, per ogni forma di spiegazione, esista una espressione il cui accordo con una data regola non è riconducibile ad essa, ci espone direttamente a un dubbio scettico analogo a quello che in (Kripke, [47]) è attribuito a Wittgenstein: il filosofo americano si chiede come possa un parlante giustificare il fatto che l'uso che fa delle espressioni aritmetiche contenenti il segno "+" sia proprio quello richiesto dal senso del "più", e non sia piuttosto quello associato al senso del "quus", un'espressione stravagante tale che, per ogni $n, m < N$, dove N è il numero più grande che il parlante abbia mai considerato, n quus $m = n+m$, mentre per $n, m \geq N$, n quus $m = 57$. Analogamente, una derivazione aritmetica potrebbe essere una dimostrazione senza che esista, fino a quando un nuovo sistema deduttivo che permetta di costruire una opportuna procedura di giustificazione, ammesso che tale sistema venga mai scoperto, alcun fatto che costituisca l'intendere quella data dimostrazione attraverso quella data derivazione:

> This, then, is the sceptical paradox. When I respond in one way rather than in another to such a problem as "68+57", I can have no justification for one response rather than another. Since the sceptic who supposes that i meant quus cannot be answered, there is no fact about me that distinguishes between my meaning plus and my meaning quus. Indeed, there is no fact about me that distinguishes between my meaning a definite function by "plus" [...] and my meaning nothing at all. (Kripke, [47])

In sostanza, possiamo affermare che, laddove gli argomenti del capitolo precedente ci avevano mostrato come l'ideale della giustificazione del senso per mezzo dell'oggettività della denotazione naufragava nel momento in cui questa stessa denotazione risultava essere il riflesso delle componenti soggettive della sintassi adoperata per rintracciarla, in piena analogia, gli argomenti di questo capitolo mostrano come l'ideale della giustificazione del senso per mezzo dell'oggettività dell'accordo con un insieme di norme ci abbandona nell'oscurità di un senso "inerentemente vago", in quanto riflesso anch'esso dell'inessenzialità dei mezzi adoperati per afferrarlo e giustificarne la presa.

Categorie e trasparenza Attraverso l'incompletezza, ci siamo resi conto di come una caratterizzazione davvero completa (ovvero tale che per ogni derivazione corretta esista una denotazione) delle dimostrazioni aritmetiche non possa che essere "a meno di isomorfismo", e dunque richieda gli strumenti non effettivi della teoria delle categorie. D'altra parte, come osserva Girard,

> For instance, defining integers as the solution of a universal problem makes them *ipso facto* unique: the infinite, etymologically "unfinished", is thus reduced to its explicitation, which yields, in the case of natural numbers, this China Wall, the set $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$. (Girard, [38])

L'unicità delle soluzioni categoriali, che, come si è visto, non è altro che il riflesso nella teoria delle categorie dell'ideale di oggettività del senso espresso in 2.1.14 (pag. 91), è in effetti il prodotto dell'esplicita richiesta, nella definizione del problema universale, di considerare solo "il più generale oggetto possibile" che possa essere in accordo con le norme. Questa richiesta porta con sè quelli che, a questo punto potremmo dire, sono i due caratteri fondamentali dell'impostazione essenzialista:

il senso si confronta solo con il senso Il rispetto di una norma può essere giudicato solo tramite ciò che è già in accordo con essa. La possibilità che anche il giudice della correttezza sia messo in discussione è all'origine della discussione con cui siamo pervenuti alla *tesi di Wright* (§2.1.3). Essendo a priori esclusa dalla rappresentazione a livello semantico, la questione dell'incomprensione è relegata allo stato di (mero) paradosso filosofico.

la dimostrazione è indipendente dal soggetto La specificità sintattica (nonchè quella linguistica - vd. §2.1.2) delle derivazioni che vengono valutate come dimostrazioni non è considerata una componente rilevante nella valutazione stessa; della dinamica che sottende le identificazioni semantiche conta la sola "struttura astratta", la forma geometrica nascosta.

Non a caso, Girard parla di un "transparent world of morphisms" (Girard, [38]), accennando all'idea che l'identificazione prodotta da un diagramma commutativo dissolva la naturale "implicitezza" (vd. §1.1.1) che la composizione di funzioni comporta:

> Composition is implemented by an algorithm, which is not transparency - which is but a fantasy - but construction, a search, necessarily partial and faulty, of transparency. (Girard, [38])

In effetti, se prendiamo un diagramma come il seguente:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & B \\ & C \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \tag{2.1.44}$$

osserviamo che l'identità $g \circ h = f$ da esso indotta rappresenta l'invarianza delle denotazioni per eliminazione del taglio (un discorso analogo vale per gli spazi coerenti). D'altra parte, l'eliminazione del taglio costituisce la dinamica di una sintassi, ovvero la sua evoluzione nello spazio (delle formule - o meglio dei loci, vd. §2.2.1) e nel tempo (di esecuzione). Proprio questa componente spazio-temporale dell'esecuzione degli algoritmi è oggetto di un acceso interesse scientifico, motivato dall'obbiettivo di elaborare una caratterizzazione "implicita" delle classi di complessità computazionale, ovvero indipendente dal ricorso alla "soggettività", appunto, del modello di calcolo, ancora oggi centrale in tutta l'informatica teorica, della Macchina di Turing.

L'equiparazione di computabilità e calcolo dei sequenti vista in §1.1.3 ci spinge allora a chiedere se sia possibile descrivere efficacemente lo spazio e il tempo in cui evolvono le sintassi della logica, un proposito relativamente al quale la teoria delle categorie sembra essere insensibile e dunque (al momento) inservibile.

Del resto, la sensatezza della lettura dell'incompletezza in connessione con il tema delle risorse di spazio e tempo è testimoniata dai cosiddetti *teoremi della gerarchia* i quali, nella teoria della complessità algoritmica, costituiscono l'equivalente del teorema 1.1.15 a pag. 35 di Π^0_1-incompletezza, ovvero (essenzialmente) il primo teorema di Gödel: data una enumerazione $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ delle macchine di Turing il cui tempo (o spazio) di esecuzione è limitato da una certa funzione $T(n)$ $(S(n))$, è possibile costruire una macchina di Turing μ che "simula" le $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ovvero tale che, $\forall n, m \in \mathbb{N}, \mu(n,m) = \mu_n(m)$; il tempo (lo spazio) di esecuzione di μ non potrà allora essere limitato da $T(n)$ $(S(n))$: se così non fosse, potremmo costruire una macchina μ' il cui tempo di esecuzione è lo stesso di μ e tale che $\mu'(n) = \mu(n,n) + 1$; si avrà allora $\mu' = \mu_k$ per un certo $k \in \mathbb{N}$, e di conseguenza $\mu'(k) = \mu_k(k) = \mu(k,k)+1 = \mu_k(k)+1$, contraddizione. Il risultato di questo argomento diagonale è che, per ogni classe di complessità $O(f(n))$ in spazio o in tempo, esisterà un algoritmo la cui esecuzione richiede risorse maggiori di quelle ammesse da $O(f(n))$. Tale algoritmo, per così dire, non è giustificabile in spazio o in tempo $f(n)$.

Se, dunque, la dimensione delle "risorse" della computazione, è proprio ciò a cui la valutazione semantica risulta in definitiva indifferente, di fronte alle aporie e all'inefficacia che un tale approccio rivela, *vale la pena di chiedersi se la questione del rapporto tra soggetto e oggetto, identificata in §1.1.5 con la questione delle condizioni di possibilità della valutazione, non debba rivolgersi a questo punto al problema delle risorse, ovvero allo spazio e al tempo, in quanto caratterizzanti le possibilità che un sistema deduttivo offre alle sue derivazioni di esprimere norme oggettive.* Si pensi ad esempio da una parte alla nozione di primalità identificata con la proprietà aritmetica univocamente determinata (e dunque oggettiva) e dall'altra agli innumerevoli test di primalità che, ognuno con il proprio (soggettivo) costo computazionale in termini di spazio e tempo, forniscono strumenti assai diversi di esplicitazione della proprietà matematica per cui sono applicati.

Possiamo recuperare in quest'ottica l'analogia, discussa sopra, tra la coppia wittgensteiniana "regola-applicazione" e quella kantiana "categoria-schema": lo schema è infatti identificato da Kant come una "determinazione trascendentale del tempo", in quanto omogeneo tanto alla categoria, che ne costituisce l'unità, quanto all'apparenza, ossia al prodotto della facoltà della sensibilità, la cui forma è costituita dallo spazio e dal tempo. Lo schema realizza l'universalità della categoria entro i limiti imposti dai principi della sensibilità: al passaggio dallo studio delle norme del senso a quello della loro concreta applicazione, si accosta dunque lo spostamento, in termini kantiani, dall'Analitica Trascendentale, ossia dalle categorie, al loro dominio di applicazione nell'esperienza sensibile, ovvero all'Estetica Trascendentale.

In definitiva, l'analogia che guiderà l'indagine sullo spazio e sul tempo della logica può essere così schematizzata:

	Contenuto "ideale"	**Espressione nello spazio e nel tempo**
Logica	dimostrazione	derivazione
Wittgenstein	regola	applicazione
Kant	categoria	schema

(2.1.45)

Regole esponenziali e risorse Per quel che riguarda il rapporto tra logica e risorse, bisogna anzitutto notare che la caratteristica più evidente della logica lineare LL è riconoscibile proprio nella sua "sensibilità alle risorse": è facile vedere come, fintantochè ci si limita al frammento $MALL$ moltiplicativo-additivo, il tempo (e quindi lo spazio) di computazione dell'eliminazione del taglio sono lineari; consideriamo la grandezza $lev(\pi)$, definita come il numero di regole del calcolo dei sequenti che occorrono in π. Ci serviremo di $lev(\pi)$ come indice per misurare la "crescita" di π durante l'esecuzione dell'eliminazione del taglio.

Teorema 2.1.7 (linearità di $MALL$)**.** *Sia π una derivazione in $MALL$. Allora $\pi \rightsquigarrow \pi'$, con π' senza tagli e tale che $lev(\pi') \leq lev(\pi)$.*

Dimostrazione. E' sufficiente verificare che in ogni passo di eliminazione del taglio il livello non cresce. □

E' solo con l'introduzione delle regole esponenziali, e in particolare con la regola di contrazione, che assistiamo alla crescita del tempo e dello spazio di computazione, al punto da poter immaginare di produrre in LL una computazione di complessità massima nel tempo, ovvero divergente: basta supporre che sia possibile costruire, in analogia con il paradosso di Russell, un punto fisso per la negazione lineare, ossia una formula $A \equiv !A^{\perp}$, ed immaginare una disputa tra A e $A^{\perp}$, ovvero una para-prova π del sequente vuoto ottenuta con un taglio tra un derivazione di $?A$ e una di $!A^{\perp}$:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash A, ?A}\,(Ax)}{\vdash ?A, ?A}\,(?)}{\vdash ?A}\,(C) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash A, ?A}\,(Ax)}{\vdash ?A, ?A}\,(?)}{\vdash A^{\perp}}\,(C)}{\vdash !A^{\perp}}\,(!)}{\vdash}\,cut
\quad \rightsquigarrow \quad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash A, ?A}\,(Ax) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash A, ?A}\,(Ax)}{\vdash ?A, ?A}\,(?)}{\vdash A^{\perp}}\,(C)}{\vdash ?A}\,cut \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash A, ?A}\,(Ax)}{\vdash ?A, ?A}\,(?)}{\vdash ?A}\,(C)}{\vdash !A^{\perp}}\,(!)}{\vdash}\,cut
$$

$$
\rightsquigarrow \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash A, ?A}\,(Ax)}{\vdash ?A, ?A}\,(?)}{\vdash ?A}\,(C) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash A, ?A}\,(Ax)}{\vdash ?A, ?A}\,(?)}{\vdash A^{\perp}}\,(C)}{\vdash !A^{\perp}}\,(!)}{\vdash}\,cut \tag{2.1.46}
$$

La 2.1.46 non è altro che una para-prova π la cui procedura di eliminazione del taglio diverge, dal momento che, in due passi di computazione, si ottiene, $\pi \rightsquigarrow \pi$. Continuando a considerarla una disputa tra due giocatori, la divergenza di π ci appare come una discussione senza fine in cui i due non riconoscono mai le ragioni dell'altro: *siamo cioè di fronte a un palese caso di incomprensione.* Un caso del tutto analogo è mostrato da Prawitz in (Prawitz, [56]), attraverso la ricostruzione del paradosso di Russell sotto forma di una disputa divergente nella deduzione naturale: traduciamo anzitutto la teoria ingenua degli insiemi attraverso le due regole

$$
\frac{A[t/x]}{t \in \{x : A(x)\}} \qquad\qquad \frac{t \in \{x : A(x)\}}{A[t/x]} \tag{2.1.47}
$$

che rappresentano lo (schema di) assioma di comprensione; dopo aver definito $t := \{x : x \notin x\}$, Prawitz presenta la seguente derivazione λ:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[t \in t]^a \qquad \dfrac{[t \in t]^a}{t \notin t}}{\perp}}{t \notin t}\,a}{t \in t} \qquad \dfrac{\dfrac{[t \in t]^a \qquad \dfrac{[t \in t]^a}{t \notin t}}{\perp}}{t \notin t}\,a}{\perp} \tag{2.1.48}
$$

la quale induce una computazione del tutto analoga alla 2.1.46, nella quale cioè $\lambda \rightsquigarrow \lambda$. Il sostenitore di $t \in t$ ed il suo avversario sono in definitiva destinati a non comprendersi mai. L'idea di Prawitz, in accordo con la sua posizione giustificazionista, è di considerare le derivazioni che danno luogo a dispute divergenti come sicuramente *scorrette*, in quanto la questione del loro accordo con le regole, della loro giustificazione, è rimandata a una data infinitamente lontana.

Si noti come il fenomeno dell'incomprensione, attraverso questi esempi, si caratterizzi proprio in virtù della sua dimensione temporale, ovvero quella di una computazione che va avanti all'infinito. Sinonimo di comprensione sarà dunque la finitezza del tempo in cui si realizza la disputa. Ecco che iniziamo a intravedere come *le classi di complessità computazionale, che corrispondono ai "gradi" di finitezza delle risorse necessarie per una disputa, possano riscoprirsi come un utile strumento per studiare l'accordo di un soggetto, una sintassi "situata" nello spazio e nel tempo, con un'essenza "disincarnata" nell'iperuranio delle "idee trascendentali"* (vd. §1.1.5), ovvero delle proprietà espresse da formule Σ^1.

Le logiche leggere L'idea di Girard (vd. Girard, [37]) è quella di considerare la divergenza in tempo, resa possibile dalle regole per gli esponenziali, come una forma di insensibilità alla complessità temporale. Costruire una logica sensibile alla complessità significa allora eliminare quei principi che permettono la costruzione di derivazioni divergenti come la 2.1.46 o la 2.1.47. Senza entrare nei dettagli, i principi che non devono essere ammessi sono i seguenti:

$$\overline{!A \vdash A} \tag{2.1.49a}$$

$$\overline{!A \vdash !!A} \tag{2.1.49b}$$

Eliminandoli, ovvero costruendo una sintassi in cui non siano derivabili, è possibile costruire due diversi calcoli dei sequenti "leggeri", ossia sensibili alla complessità:

Definizione 2.1.6 (LLL e ELL)**.** *Il linguaggio di ELL è ottenuto dal linguaggio di LL eliminando le costanti additive; il linguaggio di LLL è ottenuto dal linguaggio di ELL aggiungendo le due costanti unarie § e $\tilde{\S}$ duali (ossia si avrà, per ogni formula A, $\S A^{\perp} \equiv (\tilde{\S}A)^{\perp}$). Tutte le regole di $MALL$ tranne quelle additive sono regole tanto di LLL quanto di ELL. Definiamo le regole esponenziali di LLL e ELL come segue:*

indebolimento

$$\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, ?A}\,(?W) \qquad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, \tilde{\S}A}\,(\tilde{\S}W) \tag{2.1.50}$$

contrazione

$$\frac{\vdash \Gamma, ?A, ?A}{\vdash \Gamma, ?A}\,(C) \tag{2.1.51}$$

promozione *LLL*

$$\frac{\vdash B, A}{\vdash ?B, !A}\,(!_{\ell\ell\ell}) \qquad \frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash ?\Gamma, \S A}\,(?) \qquad \frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \tilde{\S}\Gamma, \S A}\,(\tilde{\S}) \tag{2.1.52}$$

ELL

$$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash ?\Gamma, !A}\,(!_{e\ell\ell}) \tag{2.1.53}$$

Dal momento che in questi sistemi non sono derivabili le 2.1.49, il numero di costanti esponenziali ! in una derivazione induce una *stratificazione* delle derivazioni; possiamo allora intuitivamente considerare la costante § come un "contatore" di questa stratificazione, dal momento che, in LLL, una derivazione di $!^k A$ potrà tagliarsi solo con una derivazione di un sequente del tipo $\vdash ?^k A^{\perp}, \Gamma, \S^k B$, per una qualche B. La stratificazione induce una nozione di *profondità strutturale* $d(\pi)$, che possiamo definire come il numero di occorrenze annidate in π di regole $(!_{\ell\ell\ell})$ o $(!_{e\ell\ell})$ (anche se una definizione rigorosa richiede il ricorso a formalismi più "geometrici" come i proof-net, che saranno introdotti nel prossimo capitolo).

Teorema 2.1.8 (polinomialità di LLL)**.** *Sia π una derivazione di LLL; allora esiste una derivazione senza tagli π' tale che $\pi \rightsquigarrow \pi'$ e $lev(\pi') \leq lev(\pi)^{2^{d(\pi)}}$.*

Dimostrazione. (cenni) La dimostrazione rigorosa in (Girard, [31]) richiede il ricorso ai proof-net, che saranno introdotti nel prossimo capitolo. Ci limitiamo qui a mostrare l'idea della dimostrazione pur nei limiti del calcolo dei sequenti. L'osservazione decisiva è che la proprietà fondamentale delle logiche leggere è che l'eliminazione del taglio preserva la stratificazione, così che la profondità strutturale risulta essere un invariante dinamico. Il caso principale è dato dalla seguente situazione:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\vdots\ \pi_1}{\vdash A, B, C, \ldots, C}}{\vdash \S A, ?B, ?C, \ldots, ?C}\,(?)}{\vdash \S A, ?B, ?C}\,(C) \qquad \dfrac{\overset{\vdots\ \lambda}{\vdash C^{\perp}, D}}{\vdash !C^{\perp}, ?D}\,(!)}{\vdash \S A, ?B, ?D}\,cut \rightsquigarrow \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\vdots\ \pi_1}{\vdash A, B, C, \ldots, C} \quad \overset{\vdots\ \lambda}{\vdash C^{\perp}, D}}{\ddots}\,cut \qquad \overset{\vdots\ \lambda}{\vdash C^{\perp}, D}}{\vdash A, B, D, \ldots, D}\,cut}{\vdash \S A, ?B, ?D, \ldots, ?D}\,(?)}{\vdash \S A, ?B, ?D}\,(C)}{} \tag{2.1.54}
$$

Consideriamo la seguente partizione di π (pensando a π come a un albero): per ogni $k \leq d(\pi)$ consideriamo il grafo π_k costituito dall'unione di tutti i sotto-alberi di π che sono la "punta" di profondità (strutturale) $d(\pi) - k$ di una sottoderivazione di profondità $d(\pi) - k$ di π, ovvero ottenuti eliminando da ogni sottoderivazione di profondità $d(\pi) - k$ tutti i nodi e i lati appartenenti a sottoderivazioni di profondità $> d(\pi) - k$. Chiaramente $\pi = \bigcup_k \pi_k$. Definiamo, per $\pi_k = \bigcup_{i \leq h} \pi_k^i$, dove i π_k^i sono le componenti connesse (le "punte" di profondità k), necessariamente acicliche, di π_k, $lev(\pi_k) = \sum_{i \leq h} lev(\pi_k^i)$. Avremo che $lev(\pi) = \sum_k lev(\pi_k)$. Scriveremo s_k, per brevità, per intendere $lev(\pi_k)$. Ora, la 2.1.54 mostra come, a una data profondità k, le regole di LLL impediscono di annidare più tagli provenienti da formule contratte, e dunque avremo che, dopo aver eliminato i tagli a profondità k (relegandoli a profondità $k+1$), il livello s_{k+1} risulterà aumentato di un fattore limitato dal livello s_k. Iterando il procedimento otteniamo i seguenti limiti superiori per i livelli s_k:

$$
\begin{aligned}
&s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{d(\pi)}\\
&s_0, s_0s_1, s_0s_2, \ldots, s_0s_{d(\pi)}\\
&s_0, s_0s_1, s_0^2s_1s_2, \ldots, s_0^2s_1s_{d(\pi)}\\
&\vdots\\
&s_0, s_0s_1, s_0^2s_1s_2, \ldots, s_0^{2^{d(\pi)-1}} s_1^{2^{d(\pi)-2}} \ldots s_{d(\pi)-2}^2 s_{d(\pi)-1} s_{d(\pi)}
\end{aligned}
\tag{2.1.55}
$$

Di conseguenza, se π' è la forma normale di π, si ha che $lev(\pi')$ è la somma dei termini nell'ultima riga in 2.1.55, e dunque $lev(\pi') \leq (\sum_k s_k)^{2^{d(\pi)}} = lev(\pi)^{2^{d(\pi)}}$.

$\square$

Teorema 2.1.9 (elementarità di ELL)**.** *Sia π una derivazione di ELL; allora esiste una derivazione senza tagli π' tale che $\pi \rightsquigarrow \pi'$ e $lev(\pi') \leq 2_{d(\pi)}(lev(\pi))$, dove 2_k^n è la funzione iper-esponenziale definita da*

$$
\begin{aligned}
2_0^n &:= n\\
2_{k+1}^n &:= 2^{2_k^n}
\end{aligned}
\tag{2.1.56}
$$

Dimostrazione. (cenni) Anche in questo caso ci limitiamo a delle osservazioni: con le stesse notazioni del precedente teorema, si noti che la regola $!_{e\ell\ell}$ permette di annidare a una stessa profondità k un numero di tagli provenienti da formule contratte che possiamo considerare limitato da s_k. Di conseguenza, l'eliminazione dei tagli a profondità k, relegandoli a profondità $k+1$, comporta una crescita del livello s_{k+1} limitata iterando al più s_k volte il fattore moltiplicativo s_k. Otteniamo così i seguenti limiti superiori:

$$
\begin{aligned}
&s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{d(\pi)}\\
&s_0, 2^{s_0}s_1, 2^{s_0}s_2, \ldots, 2^{s_0}s_{d(\pi)}\\
&s_0, 2^{s_0}s_1, 2^{2^{s_0}s_1}2^{s_0}s_2, \ldots, 2^{2^{s_0}s_1}2^{s_0}s_{d(\pi)}\\
&\vdots\\
&s_0, 2^{s_0}s_1, 2^{2^{s_0}s_1}2^{s_0}s_2, \ldots, 2_{d(\pi)-1}^{s_0+\cdots+s_{d(\pi)-1}} 2_{d(\pi)-2}^{s_0+\cdots+s_{d(\pi)-2}} \ldots 2_2^{s_0+s_1}2^{s_0}s_{d(\pi)}
\end{aligned}
\tag{2.1.57}
$$

Se π' è la forma normale di π, allora è la somma dei termini nell'ultima riga di 2.1.57 e dunque $lev(\pi') \leq 2_{d(\pi)}(\sum_k s_k) = 2_{d(\pi)}(lev(\pi))$.

In §4.1 e §4.4, con l'aiuto della Geometria dell'Interazione, vedremo un modo molto più semplice per trovare i limiti superiori per ELL, utilizzando i "coefficienti di nilpotenza". $\square$

E' possibile costruire in questi insiemi delle versioni "leggere" degli interi Curry-Howard, con la possibilità di misurare "a priori" il tempo di esecuzione delle funzioni definite ricorsivamente: nel caso di LLL avremo $\mathbb{N}_{\ell\ell\ell} := \forall X(!(X \multimap X) \multimap \S(X \multimap X))$, ed il numero $n_{\ell\ell\ell}$ corrisponderà alla seguente derivazione:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash X^{\perp}, X}\,(Ax) \quad \dots \quad \dfrac{}{\vdash X^{\perp}, X}\,(Ax)}{\vdash X \otimes X^{\perp}, \dots, X \otimes X^{\perp}, X^{\perp}, X}\,(\otimes)}{\vdash X \otimes X^{\perp}, \dots, X \otimes X^{\perp}, X \multimap X}\,(\multimap)}{\vdash ?(X \otimes X^{\perp}), \dots, ?(X \otimes X^{\perp}), \S(X \multimap X)}\,(?)}{\vdash ?(X \otimes X^{\perp}), \S(X \multimap X)}\,(C)}{\vdash !(X \multimap X) \multimap \S(X \multimap X)}\,(\multimap)}{\vdash \mathbb{N}_{\ell\ell\ell}}\,(\forall R) \tag{2.1.58}
$$

Inoltre, data una derivazione f_s di $\vdash A \multimap A$, possiamo formare $!f_s$ derivazione di $\vdash !(A \multimap A)$ e mostrare che la composizione $((n_{\ell\ell\ell})A)!f_s$, data da

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\, n_{\ell\ell\ell} \\ \vdash \mathbb{N}_{\ell\ell\ell}\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots \\ \vdash (\mathbb{N}_{\ell\ell\ell})^{\perp}, !(A \multimap A) \multimap \S(A \multimap A)\end{matrix}}{\vdash !(A \multimap A) \multimap \S(A \multimap A)}\,cut \qquad \begin{matrix}\vdots\, !f_s \\ \vdash !(A \multimap A)\end{matrix}}{\vdash \S(A \multimap A)}\,cut \tag{2.1.59}
$$

è una derivazione di $\vdash \S(A \multimap A)$ che rappresenta una funzione definita per iterazione su $\mathbb{N}^{\ell\ell\ell}_{\mathrm{ch}}$. Attraverso di essa possiamo rappresentare le seguenti derivazioni:

somma *som* sarà una derivazione di $\mathbb{N}_{\ell\ell\ell}, \mathbb{N}_{\ell\ell\ell} \vdash \mathbb{N}_{\ell\ell\ell}$;

prodotto *prod* sarà una derivazione di $\mathbb{N}_{\ell\ell\ell}, !\mathbb{N}_{\ell\ell\ell} \vdash \S\mathbb{N}_{\ell\ell\ell}$, ottenuta iterando la derivazione $!som$ di $!\mathbb{N}_{\ell\ell\ell} \vdash !(\mathbb{N}_{\ell\ell\ell} \multimap \mathbb{N}_{\ell\ell\ell})$, ossia come $(prod)n_{\ell\ell\ell} = ((n_{\ell\ell\ell})\mathbb{N}_{\ell\ell\ell})!som$;

quadrato *pot* sarà una derivazione di $\mathbb{N}_{\ell\ell\ell} \vdash \S\S\mathbb{N}_{\ell\ell\ell}$ ottenuta iterando la derivazione $\S prod$ di $\S(\mathbb{N}_{\ell\ell\ell}, !\mathbb{N}_{\ell\ell\ell}) \vdash \S\mathbb{N}_{\ell\ell\ell}$ costruita a partire da *prod*;

$k+1$-esima potenza $k+1-pot$ sarà ottenuta iterando $\S k - pot$ e sarà quindi una derivazione di $\mathbb{N}_{\ell\ell\ell} \vdash \S^{k+1}\mathbb{N}_{\ell\ell\ell}$.

A partire da queste costruzioni è possibile provare la completezza di LLL rispetto alle funzioni computabili in tempo polinomiale: l'idea è quella di codificare in LLL le macchine di Turing polinomiali (vd. (Girard, [31])).

Nel caso di ELL, avremo $\mathbb{N}_{e\ell\ell} := \forall X(!(X \multimap X) \multimap !(X \multimap X))$ ed una costruzione del tutto analoga tranne per il fatto che potremo rappresentare la funzione esponenziale 2^n:

esponenziale La moltiplicazione per 2 in ELL ha tipo (formula) $\mathbb{N}_{e\ell\ell} \multimap \mathbb{N}_{e\ell\ell}$. Iterandola, si ottiene una derivazione *exp* di un sequente $\mathbb{N}_{e\ell\ell}, !\mathbb{N}_{e\ell\ell} \vdash !\mathbb{N}_{e\ell\ell}$.

torre di esponenziali di altezza $k+1$ Non è altro che l'iterazione della torre di altezza k, ed ha quindi tipo $\mathbb{N}_{e\ell\ell} \multimap !^{k+1}\mathbb{N}_{e\ell\ell}$.

Con queste costruzioni è possibile provare la completezza di ELL rispetto alle funzioni computabili in tempo elementare (ELL sta in effetti per "Elementary Linear Logic").

Una conferma dell'aderenza delle logiche leggere alle "essenze aritmetiche" viene dal seguente risultato:

Proposizione 2.1.10. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria che ammetta un* NNO N*. Allora, a ogni intero "leggero"* $n_{\ell\ell\ell}$ *ed al successore "leggero"* $s_{\ell\ell\ell}$ *sono associati rispettivamente un morfismo* $[\![n_{\ell\ell\ell}]\!] \in \mathbf{C}(\top, N)$ *ed un morfismo* $[\![s_{\ell\ell\ell}]\!] \in \mathbf{C}(N, N)$*, tali che* $[\![s_{\ell\ell\ell}]\!] \circ [\![n_{\ell\ell\ell}]\!] = [\![(n+1)_{\ell\ell\ell}]\!]$*; inoltre, se* f_0 *è una derivazione di una formula* A *e* f_s *è una derivazione di una formula* $A \multimap \S^k A, k \in \mathbb{N}$*, allora, se* $[\![A]\!] = [\![\S^k A]\!], \forall k \in \mathbb{N}$*, è un oggetto della categoria* $\mathbf{C}$ *tale che esistano i morfismi* $[\![f_0]\!] \in \mathbf{C}(\top, [\![A]\!])$*, e* $[\![f_s]\!] \in \mathbf{C}([\![A]\!], [\![A]\!])$*, alla derivazione* π *in 2.1.34 è associato un morfismo* $[\![\lambda]\!] \in \mathbf{C}(N, [\![A]\!])$*, tale che, per ogni intero "leggero"* $n_{\ell\ell\ell}$*, si ha* $[\![\pi]\!] \circ [\![n_{\ell\ell\ell}]\!] = \underbrace{[\![f_s]\!] \circ \cdots \circ [\![f_s]\!]}_{n \text{ volte}} \circ [\![f_0]\!] \in \mathbf{C}(\top, [\![A]\!])$*.*

Dimostrazione. La tesi segue immediatamente dalle seguenti associazioni e dalla 2.1.37 a pag. 102:

- $[\![0_{\ell\ell\ell}]\!] := z \in \mathbf{C}(\top, N)$;
- $[\![(n+1)_{\ell\ell\ell}]\!] := [\![f_{s_{\ell\ell\ell}}]\!] \circ [\![n_{\ell\ell\ell}]\!] \in \mathbf{C}(\top, N)$;
- $[\![\pi]\!] := f \in \mathbf{C}(N, [\![A]\!])$, dove f è l'unico morfismo tale che $f_0 \circ z = [\![f_0]\!]$ e $f \circ s = [\![f_s]\!] \circ f$.

□

Un teorema analogo vale evidentemente anche nel caso di ELL. Questo risultato conferma i limiti dell'approccio categoriale nell'affrontare la questione delle risorse: in effetti, dal punto di vista delle categorie, non fa differenza che un intero sia leggero, polinomiale, elementare oppure privo di limiti di complessità a priori. Tutte queste distinte rappresentazioni sono isomorfe, e dunque indistinguibili (dovremo aspettare la Geometria dell'Interazione per trovare esempi di rappresentazioni isomorfe non indistinguibili - vd. §4.5). Come deve essere interpretato questo fallimento della semantica delle dimostrazioni? Dal momento che abbiamo riconosciuto alla teoria delle categorie il merito di essere lo strumento più astratto e generale per ricostruire le essenze veicolate dalle derivazioni sintattiche, dovremmo concludere che ogni speranza di attribuire oggettività al senso, ovvero di ricostruirlo entro un orizzonte pubblico di valutazioni, debba essere con ciò abbandonata? Recuperando le perplessità di McDowell e dello scettico di Kripke sull'abbandono del "modello a binari" del senso, implicito alla concezione essenzialista, potremmo ritrovarci a dover ammettere di avere solo l'*illusione*, nella pratica matematica, di intrattenere e condividere delle norme e dei contenuti oggettivi?

Disubbidire alle regole Prima di spingerci in cerca di una possibile soluzione, o meglio di un quadro generale molto diverso entro il quale cercarla, facciamo una importante osservazione: consideriamo ancora la derivazione che rappresenta un intero n in LLL:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash X^{\perp}, X}\,(Ax) \quad \ldots \quad \dfrac{}{\vdash X^{\perp}, X}\,(Ax)}{\vdash X \otimes X^{\perp}, \ldots, X \otimes X^{\perp}, X^{\perp}, X}\,(\otimes)}{\vdash X \otimes X^{\perp}, \ldots, X \otimes X^{\perp}, X \multimap X}\,(\multimap)}{\vdash ?(X \otimes X^{\perp}), \ldots, ?(X \otimes X^{\perp}), \S(X \multimap X)}\,(?)}{\vdash ?(X \otimes X^{\perp}), \S(X \multimap X)}\,(C)}{\vdash !(X \multimap X) \multimap \S(X \multimap X)}\,(\multimap)}{\vdash \mathbb{N}_{\ell\ell\ell}}\,(\forall R) \tag{2.1.60}$$

ed il suo "alter ego" in ELL:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash X^{\perp}, X}\,(Ax) \quad \ldots \quad \dfrac{}{\vdash X^{\perp}, X}\,(Ax)}{\vdash X \otimes X^{\perp}, \ldots, X \otimes X^{\perp}, X^{\perp}, X}\,(\otimes)}{\vdash X \otimes X^{\perp}, \ldots, X \otimes X^{\perp}, X \multimap X}\,(\multimap)}{\vdash ?(X \otimes X^{\perp}), \ldots, ?(X \otimes X^{\perp}), !(X \multimap X)}\,(!_{e\ell\ell})}{\vdash ?(X \otimes X^{\perp}), !(X \multimap X)}\,(C)}{\vdash !(X \multimap X) \multimap !(X \multimap X)}\,(\multimap)}{\vdash \mathbb{N}_{e\ell\ell}}\,(\forall R) \tag{2.1.61}$$

salta agli occhi che, *"in un certo senso", si tratta della stessa derivazione, "vestita", per così dire, da regole diverse*! Senza dubbio, ogni rappresentazione in n in LLL può essere trasformata in una rappresentazione di n in ELL. Si noti che questa presunta trasformazione (chiamiamola τ) non ha alcuno statuto, tanto semantico quanto sintattico, essendo esclusa a priori dal fatto che i linguaggi dei due sistemi non si sovrappongono. D'altra parte, τ è giustificata dal fatto che ogni occorrenza, in una derivazione, della regola (?) può essere sostituita da una occorrenza della regola $(!)_{e\ell\ell}$:

$$\dfrac{\vdash \Gamma, A}{\vdash ?\Gamma, \S A}\,(?) \qquad \overset{\tau}{\longmapsto} \qquad \dfrac{\vdash \Gamma, A}{\vdash ?\Gamma, !A}\,(!_{e\ell\ell}) \tag{2.1.62}$$

ammesso che la formula $\S A$ non occorra come formula di taglio: infatti la formula $!A$, ma non la $\S A$ può tagliarsi con una formula $?A^{\perp}$, che, in quanto interrogata, può provenire da una serie di contrazioni: la versione ELL è dunque sicuramente più potente di quella LLL.

La conseguenza più interessante è che, data una derivazione π di $\mathbb{N}_{e\ell\ell} \multimap \mathbb{N}_{e\ell\ell}$ ed una derivazione λ di $\mathbb{N}_{\ell\ell\ell}$, si ha che l'applicazione $(\pi)(\tau(\lambda))$ è una derivazione di $\mathbb{N}_{e\ell\ell}$. Ma dal momento che λ e $\tau(\lambda)$ sono essenzialmente la stessa cosa, questo vuol dire che, ancora "in un certo senso", possiamo dire che l'applicazione $(\pi)\lambda$ è una derivazione di $\mathbb{N}_{e\ell\ell}$, anche se non appartiene a nessun sistema. Come al solito, è utile guardare l'aspetto procedurale della questione: la procedura di eliminazione del taglio applicata a $(\pi)(\tau(\lambda))$ corrisponde esattamente, modulo τ, alla procedura di eliminazione del taglio applicata a $(\pi)\lambda$, ed anche quest'ultima non ha asilo in alcun sistema.

Da quanto visto segue che, ad esempio, la derivazione *exp*, di tipo $\mathbb{N}_{e\ell\ell} \multimap !\mathbb{N}_{e\ell\ell}$ può essere (tramite τ) applicata alla rappresentazione ν di un intero in LLL, e dunque *exp* può, "in un certo senso", essere tipata anche come $\mathbb{N}_{\ell\ell\ell} \multimap !\mathbb{N}_{e\ell\ell}$. D'altra parte, in virtù del teorema della gerarchia nel tempo, sappiamo che *exp* non può essere rappresentata in LLL, e dunque di sicuro *exp* non può essere tipata $\mathbb{N}_{\ell\ell\ell} \multimap \S^k\mathbb{N}_{\ell\ell\ell}$, per nessun k. Si noti anche che *exp*, che può dunque interagire con ogni rappresentazione di un numero nel linguaggio di LLL, è una formula Σ^1, essendo del tipo $\exists X ... \parr !\mathbb{N}_{e\ell\ell}$, e dunque, se exp' è la sua forma normale, sarà del tipo:

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\\ !(Y \multimap Y)\otimes ?(Y\otimes Y^{\perp}), ?(Y\otimes Y^{\perp}), !(Y \multimap Y)\end{array}}{\mathbb{N}_{e\ell\ell}^{\perp} \parr !\mathbb{N}_{e\ell\ell}} \tag{2.1.63}$$

per una certa formula Y *di cui non sappiamo se sia o meno nel linguaggio di* LLL!

Ciò che di sorprendente ci mostra questo strano esempio è che abbiamo costruito una derivazione al di fuori del sistema LLL e potenzialmente al di fuori del suo linguaggio, che tuttavia può benissimo interagire con le derivazioni di LLL: *abbiamo cioè un caso di interazione al di fuori delle regole prestabilite*, cosa che, se a partire da un punto di vista simpatizzante della posizione attribuita in §2.1.3 a Wittgenstein, non dovrebbe sconvolgere più di tanto, costituendo tali esempi, in tale prospettiva, semplicemente una estensione dei criteri associati alle regole, *per colui che mira a descrivere essenze oggettive a partire da un insieme di regole stabilite in un linguaggio e in un sistema deduttivo dati una volta per tutte risulta tutt'altro che semplice da spiegare.* A partire dalla prossima sezione, dovremo dunque occuparci di questa strana idea per cui l'interazione tra le derivazioni possa essere in qualche modo indipendente dalle regole che queste "indossano".

2.2 Ludica e morfologia

2.2.1 La sintassi a posteriori

In questo paragrafo, sarà sviluppata sistematicamente l'idea della posteriorità delle regole rispetto agli artefatti logici, prima attraverso il recupero degli spazi coerenti e successivamente con l'esposizione di una visione "sintetica" e "locativa" del calcolo dei sequenti, ovvero con l'introduzione della ludica.

La revisione "esistenzialista" degli spazi coerenti In conclusione della precedente sezione, abbiamo avuto a che fare con esempi di derivazioni che potevano essere attribuite a sistemi logici diversi, dal momento che la loro interazione (la procedura di eliminazione del taglio) risultava ben definita con derivazioni di entrambi i sistemi LLL e ELL.

Dal punto di vista dell'interpretazione strategica introdotta nel paragrafo §1.2.3, alla rappresentazione Curry-Howard di un intero potranno essere associate diversi insiemi di interazioni, e dunque diversi insiemi di partite, che l'avversario considererà coerenti una volta come strategia nel gioco $\mathbb{N}_{\ell\ell\ell}$, e un'altra come strategia nel gioco $\mathbb{N}_{e\ell\ell}$: *quale sia la strategia di P è dunque determinato da quali strategie scelga di contrapporgli l'avversario O.* Nel primo caso, infatti, le strategie di P sono interpretate come derivazioni di LLL, nel secondo, invece, come derivazioni di ELL: ecco che dunque, considerando il concetto di interazione strategica come primitivo rispetto a quello di derivazione in un sistema formale, possiamo dare un qualche contenuto all'idea di una derivazione che, in funzione del contesto, sceglie quale vestito formale indossare.

Già in §1.2.4 si era accennato a come la prospettiva strategica inducesse una radicale inversione del punto di vista sulle dimostrazioni, nel momento in cui alla struttura sintattica in cui esse dovrebbero evolvere viene sostituita l'arena all'interno della quale i giocatori possono, attraverso le loro interazioni, riconoscersi come adottanti strategie l'uno relativamente alle strategie dell'altro. Piuttosto che concepire una derivazione come *a priori* appartenente a un linguaggio e a una data sintassi, la sua appartenenza a esso costituirà il risultato *a posteriori* di una interpretazione, ossia di un insieme di interazioni all'interno del quale la derivazione si costituisce come strategia. La questione che ci dovrà interessare nelle prossime pagine sarà allora quella di dare un senso matematico a questa idea di derivazione indipendente da una sintassi.

Un limite della definizione di spazio coerente, ossia della struttura matematica che finora ci ha guidato nelle nostre intuizioni strategiche, è dato dal fatto che la relazione di coerenza che lo istituisce piomba, in un certo senso, giù dal cielo, non costituendosi, in linea con quanto appena detto, come il risultato di un'attività di interpretazione strategica. Tuttavia, questo limite è più un limite della definizione 1.2.5 a pag. 57 che non un limite degli spazi coerenti stessi: si ricordi infatti la fondamentale osservazione per cui due avversari adottanti la stessa strategia non possono che dare luogo sempre alla stessa partita, espressa dalla 1.2.12 a pag. 57:

$$a \sqsubset X, b \sqsubset X^{\perp} \Rightarrow \sharp(a \cap b) \leq 1 \tag{1.2.12}$$

La 1.2.12 in effetti ci fornisce le esatte condizioni alle quali due strategie possono considerarsi contrapposte all'interno di uno stesso gioco, ossia le condizioni alle quali esse possono essere considerate polari, nel senso della definizione di polo data in §1.2.2. Considerando che una cricca non è altro che un sottoinsieme del supporto di uno spazio coerente, e che questo supporto può essere un insieme arbitrario, possiamo dare la seguente definizione:

Definizione 2.2.1. *Sia X un insieme e $a, b \subseteq X$. Allora a è* polare *a b, $a \overset{\downarrow}{\sim} b$ se e solo se $\sharp(a \cap b) \leq 1$.*

Consideriamo adesso un insieme X ed un qualche $\mathcal{A} \subset \wp(X)$; il polare di $\mathcal{A}$, ovvero l'insieme $\mathcal{A}^{\overset{\downarrow}{\sim}} := \{b \in \wp(X) | \forall a \in \mathcal{A}\ a \overset{\downarrow}{\sim} b\}$, è intuitivamente l'insieme di *tutte* le strategie che considerano gli elementi di $\mathcal{A}$ strategie avversarie. D'altra parte l'insieme $\mathcal{A}^{\overset{\downarrow}{\sim}\overset{\downarrow}{\sim}}$ sarà l'insieme di *tutte* le strategie che considerano le strategie che riconoscono le strategie in $\mathcal{A}$ come avversarie, come strategie avversarie; aldilà di questa contorta osservazione, quello che emerge è una nuova definizione di spazio coerente:

Definizione 2.2.2 (spazio coerente)**.** *Uno spazio coerente X è dato da un insieme supporto $|X|$ ed una famiglia $\mathcal{A} \subseteq \wp(|X|)$ uguale al suo bipolare, ossia tale che $\mathcal{A}^{\overset{|}{\sim}\overset{|}{\sim}} = \mathcal{A}$.*

di cui possiamo verificare l'equivalenza con la definizione 1.2.5 a pag. 57:

Proposizione 2.2.1. *Le definizioni 1.2.5 e 2.2.2 sono equivalenti.*

Dimostrazione. **(1.2.5⇒2.2.2)** Si tratta di dimostrare che $\mathcal{A} = \{a|a \sqsubset X\} = \mathcal{A}^{\overset{|}{\sim}\overset{|}{\sim}}$: l'osservazione decisiva è che $\mathcal{A}^{\overset{|}{\sim}} = \{b|b \sqsubset X^{\perp}\}$; la tesi deriva allora dalla involutività della negazione lineare, ossia da $X^{\perp\perp} = X$.

(2.2.2⇒1.2.5) Verifichiamo anzitutto che $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{\overset{|}{\sim}\overset{|}{\sim}}$ soddisfa tutte le proprietà della famiglia di cricche di uno spazio coerente secondo 1.2.5: innanzitutto si ha sicuramente $\emptyset \in \mathcal{A}$, in quanto banalmente $\sharp(\emptyset \cap b) \leq 1$, per ogni $b \in \mathcal{A}^{\overset{|}{\sim}}$; in secondo luogo, sia $a \in \mathcal{A}$ e $c \subseteq a$; allora, per ogni $b \in \mathcal{A}^{\overset{|}{\sim}}$, si ha $\sharp(c \cap b) \leq \sharp(a \cap b) \leq 1$, e dunque $c \in \mathcal{A}$. Questo prova anche che $\mathcal{A}$ è chiuso per intersezioni arbitrarie. Sia ora $(a_i)_{i\in I} \subset \mathcal{A}$ con I filtrante e supponiamo che, per un certo $b \in \mathcal{A}^{\overset{|}{\sim}}$ si abbia $\sharp(\uparrow \bigcup_{i\in I} a_i \cap b) > 1$; esistono allora $x, y \in |X|$ distinti tali che $x, y \in\uparrow \bigcup_{i\in I} a_i \cap b$; esistono allora $i, j \in I$ tali che $x \in a_i \in \mathcal{A}$ e $y \in a_j \in \mathcal{A}$ e dunque anche un $k \in I$ tale che $a_i, a_j \subseteq a_k \in \mathcal{A}$; ma allora si avrebbe $\sharp(a_k \cap b) > 1$, il che è assurdo.

Possiamo dunque considerare la relazione di coerenza $\frown_X$ data da $x \frown_X y \Leftrightarrow \{x, y\} \in \mathcal{A}$.

□

Ricordando le proprietà del polo (proposizione 1.2.6 a pag. 54), sappiamo già che, dato un arbitrario $\mathcal{A} \subseteq \wp(|X|)$, l'insieme $\mathcal{A}^{\overset{|}{\sim}}$ induce uno spazio coerente di supporto $|X|$, ovvero lo spazio $X^{\perp}$ delle interazioni in cui un giocatore riconosce gli elementi di $\mathcal{A}$ come strategie avversarie. A partire da (Girard, [33]) Girard si serve delle nozioni di *etica* e *comportamento* (o anche *condotta*): un'*etica per X* è un qualunque insieme $\mathcal{E} \subseteq \wp(X)$ e *comportamento per X* una etica per X uguale al suo bipolare. Intuitivamente, un comportamento non è altro che un'etica *completa* per X, ossia contenente *tutte* le strategie che l'avversario di X, ossia il giocatore di $X^{\perp}$, riconosce come polari alle sue. Si noti che, se ogni elemento di un'etica $\mathcal{E}$ corrisponde ad una derivazione in un qualche sistema formale S di una formula E, allora, se $\mathcal{E}$ è un comportamento, le derivazioni di S sono complete esattamente nel senso della dimostrazione del teorema 1.2.1 di completezza (pag. 46) attraverso l'analisi canonica: se non c'è una para-prova vincente di $\neg E$, allora esiste una derivazione di E. D'altra parte, questa forma di completezza si caratterizza per il fatto di essere determinata *in termini puramente interni al costituirsi stesso della normatività delle derivazioni.*

Vediamolo attraverso un esempio: consideriamo, dati gli spazi coerenti X, Y l'etica $\mathcal{E}_{X,Y} = \{tr(F) | F : X \to Y \text{ lineare}\}$.

Proposizione 2.2.2. $\mathcal{E}_{X,Y}^{\underset{\sim}{\downarrow}\underset{\sim}{\downarrow}} = \mathcal{E}_{X,Y}$.

Dimostrazione. Conseguenza del teorema 1.2.14 a pag. 64, in virtù di cui $\mathcal{E}_{X,Y}$ è l'insieme delle cricche di $X \multimap Y$. □

Questo teorema induce, attraverso l'interpretazione delle cricche di $X \multimap Y$ come derivazioni in LL di $A \multimap B$ (con $X = [\![A]\!]$ e $Y = [\![B]\!]$), un teorema di completezza del $\multimap$ (e dunque del $\parr$).

Tuttavia, per arrivare a una rigorosa formulazione di questo teorema di completezza interna del $\parr$ è necessario dare un senso matematico all' idea di una derivazione che non sia ancora una derivazione di una certa formula. Se infatti l'associazione:

$$\begin{aligned} \text{formula } A \text{ del linguaggio } \mathcal{L} &\longmapsto \text{ spazio coerente } [\![A]\!] \\ \text{derivazione } \pi \text{ di } A \text{ nel sistema } S &\longmapsto \text{ cricca } [\![\pi]\!] \sqsubset [\![A]\!] \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

aveva senso fintantochè gli spazi coerenti erano presentanti nella versione "sintattica a priori", ossia con una relazione di coerenza, una normatività, caduta dal cielo, nel momento in cui le strategie, come arbitrari sottoinsiemi di un insieme X, navigano in cerca di norme, non c'è modo di invertire l'associazione, perchè non abbiamo ancora dato alcun senso alla nozione di derivazione al di fuori del linguaggio e di un sistema formale!

La scommessa locativa Sappiamo già che l'interazione tra queste misteriose derivazioni senza formule, ossia la procedura dell'eliminazione del taglio, dovrà in qualche modo rappresentare quell'alternanza di mosse positive e negative che caratterizza l'interpretazione strategica della logica che stiamo adottando. Anzi, come vedremo, la polarizzazione costituirà la principale linea guida di una radicale rilettura del ruolo delle regole di inferenza.

Immaginando, d'altra parte, che tali derivazioni dovranno avere una struttura analoga a quella del calcolo dei sequenti, viene da chiedersi che cosa possa sostituire le formule che occorrono nei sequenti, dal momento che, non avendo a disposizione un linguaggio, non abbiamo a disposizione formule. Ricordando però la discussione del paragrafo §2.1.4, ed in particolare che, kantianamente parlando, la discussione sulle condizioni di possibilità della sintassi si situa nell' Estetica piuttosto che nell'Analitica Trascendentale, viene subito in mente che *il candidato a costituire il sostituto delle formule in un universo privo di linguaggio non possa che essere un elemento dello spazio manipolabile nel tempo.*

Consideriamo una arbitraria regola del calcolo dei sequenti, ad esempio la regola del tensore:

$$\frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Delta, B}{\vdash \Gamma, \Delta, A \otimes B}\ (\otimes) \tag{2.2.2}$$

La proprietà più visibile della regola è la sua "focalizzazione": essenzialmente, il fatto che alcune (occorrenze di) formule sono riunite nei "contesti" Γ e Δ, mentre la (occorrenza di) formula $A \otimes B$ e le sue sottoformule sono visibili. La differenza tra il "fuoco" $A \otimes B$ e i contesti è la seguente: il "fuoco" trasmette alle premesse le sue sottoformule, mentre i contesti sono spartiti tra le premesse, ma le (occorrenze di) formule in essi sono trasmesse per intero. Dimenticando per un momento il linguaggio, ovvero i "nomi" delle formule, possiamo scrivere la stessa regola come

$$\frac{\vdash \Gamma, \xi * 1 \quad \vdash \Delta, \xi * 2}{\vdash \Gamma, \Delta, \xi} \; (\otimes) \tag{2.2.3}$$

questa formulazione della regola rappresenta il modo con cui la 2.2.2 potrebbe apparire a chi, andando a leggerla, partendo dal basso, non potesse vedere le formule, e dunque la loro strutturazione in sottoformule. L'espressione "ξ" assume in questo caso il ruolo di via di accesso alle espressioni "$\xi * 1$" e "$\xi * 2$"; l'idea di Girard è quella di considerare queste espressioni come dei luoghi virtuali, degli astratti elementi di spazio, identificati attraverso degli indirizzi: come nel file-system di un sistema operativo, ogni contenuto, ogni file, è identificato da un indirizzo, il quale si specifica attraverso un albero di cartelle e sottocartelle, così l'accesso a questi luoghi virtuali avviene per mezzo di indirizzi come lo ξ, il quale identifica una cartella, le cui sottocartelle hanno indirizzo, rispettivamente $\xi * 1$ e $\xi * 2$. In tal modo, un indirizzo viene a consistere in una sequenza finita di espressioni, che corrisponde a un cammino all'interno di un file-system "logico". La regola 2.2.3, in questa lettura, individua uno dei modi attraverso cui è possibile suddividere le cartelle in sottocartelle, ed è identificata dalla coppia $\{1, 2\}$ di espressioni (in questo caso, numeri naturali) che specificano il modo in cui il luogo virtuale cui dà accesso ξ si ramifica.

Queste osservazioni ci portano in definitiva alla seguente definizione, che è il punto di partenza della revisione "locativa" della logica sviluppata da Girard a partire da (Girard, [33]):

Definizione 2.2.3 (loci)**.** *Un* bias*, indicato con le lettere $i, j, k, \ldots$ è un numero naturale; una* ramificazione*, indicata con le lettere $I, J, K, \ldots$, è un insieme finito di bias; una* directory *è un insieme arbitrario di ramificazioni. Un* locus*, o* posizione*, o* indirizzo*, indicato con le lettere $\sigma, \tau, \upsilon, \xi, \ldots$ è una sequenza finita $\langle i_1, \ldots, i_k \rangle$ di bias.*

La questione di come interpretare concretamente i loci è lasciata del tutto aperta da Girard. Prima di fare alcune osservazioni in merito, vale tuttavia la pena di analizzare le caratteristiche e le novità (per alcuni aspetti radicali) introdotte dall'approccio locativo.

Per farsi un'idea del funzionamento dei loci, si pensi alla differenza tra l'unione $a \cup b$ e la somma disgiunta $a + b$ di due insiemi a, b: solo la prima, infatti, ha senso da un punto di vista locativo, dal momento che, se pensiamo agli elementi di a e b come a dei loci, possiamo osservare che $a \cup b$ è un insieme costruito sugli stessi loci, il che è testimoniato dalla diseguaglianza:

$$\sharp(a \cup b) \leq \sharp(a) + \sharp(b) \tag{2.2.4}$$

che mostra la possibilità di una sorta di *interferenza* per cui uno stesso elemento, anche se preso due volte, conta come un unico elemento dell'unione. L'eguaglianza

$$\sharp(a + b) = \sharp(a) + \sharp(b) \tag{2.2.5}$$

d'altra parte, mostra l'aderenza della somma disgiunta a una normatività già costituita, il che è ben rappresentato dal fatto che le sue seguenti proprietà:

$$a + b \simeq b + a \qquad a + (b + c) \simeq (a + b) + c \tag{2.2.6}$$

hanno senso solo come isomorfismi, quindi solo all'interno di un quadro normativo già delineato. Al contrario, nel caso dell'unione, le proprietà:

$$a \cup b = b \cup a \qquad a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c \tag{2.2.7}$$

sono delle vere e proprie uguaglianze. Si noti che è sempre possibile trasformare una somma diretta in una unione, attraverso delle opportune funzioni iniettive (ad esempio $f : a \to a \times \{0, 1\}, g : b \to b \times \{0, 1\}$ con $f(x) =< x, 0 >, g(y) =< y, 1 >$:

$$a + b = f(a) \cup g(b) \tag{2.2.8}$$

Un caso analogo riguarda il prodotto cartesiano $a \times b$: le seguenti proprietà

$$a \times b \simeq b \times a \qquad a \times (b \times c) \simeq (a \times b) \times c \tag{2.2.9}$$

sono valide solo come isomorfismi, mentre se consideriamo il *prodotto locativo* (introdotto in (Girard, [33])) $a \boxtimes b := \{x \cup y | x \in a, y \in b\}$, valgono le identità:

$$a \boxtimes b = b \boxtimes a \qquad a \boxtimes (b \boxtimes c) = (a \boxtimes b) \boxtimes c \qquad \wp_f(a \cup b) = \wp_f(a) \boxtimes \wp_f(b) \tag{2.2.10}$$

e, per opportune funzioni iniettive f, g (si possono prendere le precedenti),

$$a \times b = f(a) \boxtimes g(b) \tag{2.2.11}$$

Se pensiamo alle equazioni 1.2.13 e 1.2.15 (pag. 60-61), ossia al fatto che le proprietà delle operazioni sugli spazi coerenti sono stabilite da isomorfismi, ci rendiamo conto di come la locatività introduca davvero qualcosa di nuovo nell'universo logico, che, nell'orizzonte della discussione linguistico-filosofica che accompagna i risultati tecnici di questa tesi, possiamo interpretare come l'esplicita presa in considerazione delle condizioni di identità dei supporti che possono soggiacere alle espressioni di un linguaggio: considereremo un locus come un'astratto elemento di spazio che può essere usato come componente "fisica" (ma questo aggettivo non deve qui essere presso alla lettera) di un segno. Possiamo vedere all'opera le diverse concezioni in gioco se pensiamo alla *morfologia* di una formula come $A \multimap A \multimap (A \otimes A)$:

linguistica La formula $A \multimap A \multimap (A \otimes A)$ contiene quattro *occorrenze* della sottoformula A;

categoriale L'oggetto $A \multimap A \multimap (A \otimes A)$ è costruito a partire da quattro oggetti arbitrari A_1, A_2, A_3, A_4 a due a due *isomorfi*;

locativa Il locus ξ di $A \multimap A \multimap (A \otimes A)$ possiede quattro sotto-loci distinti $\xi * 1, \xi * 2, \xi * 3, \xi * 4$ che si "comportano nello stesso modo".

Nella prima prospettiva, quella cui si rifà lo stesso giustificazionista nel momento in cui intende ricostruire il senso delle formule di un linguaggio già formato, la costituzione della formula è fuori discussione, in quanto il concetto morfologico di "occorrenza" è considerato un presupposto della discussione stessa. Si noti come, al livello delle occorrenze, non c'è differenza tra l'identità di due espressioni, in quanto identità dei loro supporti, e l'identità di due espressioni, in quanto identità del loro senso: due occorrenze di segni diversi della stessa formula sono indistinguibili da due occorrenze dello stesso segno.

Nella seconda prospettiva, quella in cui il linguaggio (come abbiamo visto in §2.1.2) scompare, e in cui le formule corrispondono a oggetti arbitrari, la morfologia della formula è espressa attraverso la richiesta di isomorfismi tra gli oggetti associati ad A. Anche in questo caso la questione dell'identità dei supporti è completamente al di fuori delle potenzialità espressive del formalismo.

E' solo la terza prospettiva quella che, partendo da quattro sotto-loci distinti, privi di alcuna relazione, tematizza esplicitamente la questione del loro reciproco rapporto come una questione genuinamente normativa: i quattro loci devono essere depositari di una stessa essenza, ma come è possibile assicurare ciò? Solo a questo livello assume un senso genuinamente matematico, e non solo semiotico, la distinzione tra *identità* e *isomorfismo* delle espressioni (vd. (Girard, [39])).

Dal punto di vista insiemistico, che come abbiamo mostrato, è un utile banco di prova per le questioni locative, il problema è rappresentato dalla identità $\{a, a, a, a\} = \{a\}$. Del resto, già la costruzione della coppia ordinata $< a, a >$ non a caso richiede un artificio innaturale come l'insieme $\{\{a, a\}, a\}$. La risposta data da Girard consiste in una generalizzazione delle funzioni iniettive viste sopra, attraverso l'introduzione delle *delocalizzazioni*:

Definizione 2.2.4 (delocalizzazione)**.** *Una* delocalizzazione *dal locus ξ al locus ξ' è una funzione iniettiva φ dai sotto-loci (ovvero le sottosequenze) di ξ ai sotto-loci di ξ' tale che:*

- $\varphi(\xi) = \xi'$
- *per ogni locus σ esiste una funzione iniettiva φ_σ da bias a bias tale che $\varphi(\sigma * i) = \varphi(\sigma) * \varphi_\sigma(i)$.*

Esempi di delocalizzazioni sono dati da $\varphi(i * \sigma) = 3i * \sigma, \psi(i * \sigma) = (3i + 1) * \sigma$, che ci permettono di formare, dati due insiemi X e Y di loci, la loro somma disgiunta $X + Y := \varphi(X) \cup \psi(Y)$ ed il loro prodotto cartesiano $X \times Y := \varphi(X) \boxtimes \psi(Y)$, senza pericolo di interferenze. Come vedremo (§2.2.3), le delocalizzazioni rappresenteranno uno strumento adeguato a garantire l'identità di essenza necessaria per introdurre la nozione di occorrenza, attraverso espressioni della forma $A \multimap \varphi_1(A) \multimap (\varphi_2(A) \otimes \varphi_3(A))$.

In termini informatici, una delocalizzazione corrisponde a una funzione che permette di spostare una cartella (e le relative sottocartelle) da un indirizzo a un altro. Si noti come, nella presentazione tradizionale della logica, non c'è spazio per le delocalizzazioni, in quanto una formula, potendo occorrere un numero arbitrario di volte senza pericolo di "interferenze" come quelle accennate sopra, non può essere considerata un indirizzo a un luogo ben determinato.

Come emergerà con ancor maggiore chiarezza nel quarto capitolo, *la struttura delle delocalizzazioni necessarie a rappresentare le espressioni di un linguaggio attraverso la manipolazione di loci costituisce una componente essenziale non solo per la caratterizzazione morfologica del linguaggio stesso, ma anche per le possibilità semantiche dei suoi artefatti*: il proposito da cui nasce l'impostazione locativa è quello di pensare la gestione dello spazio (e del tempo) dell'interazione logica come una questione di interesse puramente logico, non solo come un tema di ottimizzazione informatica; la locatività viene così di diritto a inserirsi all'interno di quel tentativo di ricostruire le condizioni di possibilità della sintassi (e delle norme che può esprimere) a partire dalla caratterizzazione di come questa si costituisca in quanto forma normativa di manipolazione di risorse spaziali e temporali.

Se, dunque,

> Fundamentally, the categorical approach's weak point is *essentialism*: it presupposes the form (to which the expression *morphism* refers) thence cannot analyse it. (Girard, [38])

l'impostazione locativa, rispetto alla quale la questione della normatività costituisce un problema da risolvere già a partire dal livello morfologico, ossia della definizione delle formule del linguaggio, può essere considerata come un prezioso strumento per una analisi più profonda delle condizioni che rendono possibile il costituirsi stesso delle norme, in quanto norme sintattiche e semantiche. Possiamo addirittura parlare di una *scommessa locativa*:

(**scommessa locativa**) *Le norme sono nascoste nella morfologia del linguaggio* (2.2.12)

La novità della ludica di Girard, vale a dire della ricostruzione locativa della logica portata avanti dal logico francese a partire dal 2001, è quella di mettere in discussione, probabilmente per la prima volta, la morfologia dei linguaggi di cui si servono i logici. La sfida è quella di riscoprire il linguaggio, le sintassi, il senso e la denotazione, a partire da condizioni di possibilità che, in quanto tali, non sono ancora parte del linguaggio; nel contesto del dibattito filosofico sui fondamenti della logica (e del linguaggio), questo tentativo potrà essere accostato a quello di *conferire dignità logica e matematica ai processi mediante cui più loci, nel momento in cui si identificano in quanto segni di una stessa essenza, occorrenze di una stessa formula, si semiotizzano*. L'approccio semiotico che seguiremo, nel descrivere la ludica, è quello secondo cui *una formula, prima ancora che veicolo di un senso linguisticamente fondato, è una porzione di spazio e tempo, non ancora un' occorrenza, non già un insieme di istruzioni e di regole*. Infatti, se l'oggetto matematico a partire dal quale muove la riflessione logica è già strutturato come una *espressione*, o una formula, è già linguaggio, è già sintassi, ed è già troppo tardi per avere accesso a ciò in virtù di cui possiamo prenderlo come tale.

I design-*dessins* e i "connettivi generalizzati" Dobbiamo a questo punto chiederci come costruire le nostre derivazioni in cerca di un linguaggio; la nozione centrale della *ludica*, del primo tentativo cioè, da parte di Girard, di elaborare una formulazione della logica concretamente situata nello spazio e nel tempo (vd. (Girard, [33, 34, 37])), è quella di *design*, che ci accingiamo a introdurre. Iniziamo con la definizione di *forza*, la "cugina" in ludica del sequente:

Definizione 2.2.5 (forca)**.** *Una* forca *è una espressione* $\Xi \vdash \Lambda$ *tale che:*

- Ξ *e* Λ *sono insiemi disgiunti di loci a due a due disgiunti;*
- Ξ*, detto* manico*, ha al più un elemento, mentre i loci di* Λ *sono detti* punte*.*

Una forca è detta positiva *se ha manico vuoto,* negativa *altrimenti.*

Le forche ricordano un po' quelli che in §1.2.5 abbiamo chiamato "sequenti di falsificazione", della forma $A \vdash \Gamma$. Alla base di questa scelta sta un fatto che deriva direttamente dalla reversibilità dei connettivi negativi, ovvero che $\vdash \Gamma$ è un sequente derivabile in cui occorrono soltanto formule negative se e solo se esiste una formula negativa A (se $\Gamma = A_1, \ldots, A_n$, possiamo scegliere $A := A_1 \parr \ldots A_n$) tale che $\vdash A$ è derivabile. Il significato di questo risultato, che è stato già sottolineato in precedenza, è che una sequenza di regole negative può essere condensata in un'unica regola negativa, come mostrato dal seguente esempio:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots & \vdots\\ \vdash A, B, \Gamma & \vdash A, C, \Gamma\end{matrix}}{\vdash A, B \,\&\, C, \Gamma}\,(\&)}{\vdash A \parr (B \,\&\, C), \Gamma}\,(\parr) \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots & \vdots\\ \vdash A, B, \Gamma & \vdash A, C, \Gamma\end{matrix}}{\vdash A \parr (B \,\&\, C), \Gamma}\,(\parr - \&) \tag{2.2.13}$$

Per quanto riguarda le regole positive, invece, l'irreversibilità impedisce di trasformare ogni sequente in un'unica formula positiva (si pensi ad esempio a $\Gamma = A_1, \ldots, A_n$ e $A := A_1 \otimes \cdots \otimes A_n$). Tuttavia, vale sempre che ogni sequenza di regole positive può essere condensata in una unica regola positiva, come mostrato dal seguente esempio:

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \vdash A, \Gamma_1\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ B, \Gamma_2\end{matrix}}{\vdash B \oplus C, \Gamma_2}\,(\oplus)}{\vdash A \otimes (B \oplus C), \Gamma}\,(\otimes) \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots & \vdots\\ \vdash A, \Gamma_1 & \vdash B, \Gamma_2\end{matrix}}{\vdash A \otimes (B \oplus C), \Gamma}\,(\otimes - \oplus) \tag{2.2.14}$$

In definitiva ogni regola negativa, e quindi reversibile, viene a essere caratterizzata dal numero di premesse e dalle sottoformule del "fuoco" che occorrono in ogni premessa: tale regola è quindi codificata da una directory $\mathcal{N}$, vale a dire un insieme arbitrario di ramificazioni, ovvero insiemi di bias. Ad esempio, nel caso 2.2.13 il "connettivo" $\parr - \&$ è caratterizzato dalla ramificazione $\{\{A, B\}, \{A, C\}\}$. Possiamo sbizzarrirci a costruire tutte le possibili directory. Ognuna di queste indurrà un "connettivo generalizzato", ovvero un connettivo negativo, descrivibile come composizione di più connettivi negativi tra quelli di $MALL$: per esempio, la directory $\{\emptyset, \emptyset\}$ dà luogo alla regola (che indicheremo con la coppia formata dal fuoco e dalla directory)

$$\frac{\vdash \Gamma \quad \vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, \bot \,\&\, \bot}\ (\bot \,\&\, \bot, \{\emptyset, \emptyset\}) \tag{2.2.15}$$

alla quale nessuno avrebbe pensato se non attraverso i "connettivi generalizzati".

Le regole positive, irreversibili, sono invece caratterizzate soltanto dal numero di premesse: in ognuno di queste andrà esattamente una sottoformula del "fuoco", e tali sottoformule dovranno essere tutte distinte. Una ramificazione I sarà sufficiente a caratterizzare la regola: ad esempio, la 2.2.14 è caratterizzazata dalla ramificazione $\{A, B\}$. Anche qui ci si può sbizzarrire con le combinazioni, ad esempio la directory $\{A, \emptyset, \emptyset\}$ induce la regola (che indicheremo con la coppia formata dal fuoco e dalla ramificazione)

$$\frac{\vdash \Gamma_1, A}{\vdash \Gamma, A \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}}\ (A \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, \{A, \emptyset, \emptyset\}) \tag{2.2.16}$$

La riformulazione corretta di questi esempi, con l'introduzione dei loci al posto delle formule, conduce quindi alla seguente definizione:

Definizione 2.2.6 (design-*dessin*)**.** *Un* design $\mathfrak{D}$ *è un albero i cui nodi sono etichettati da forche la cui radice è detta* base *del design e in cui ogni forca del design è la conclusione di (al più) una unica* regola *tra le seguenti:*

Demone

$$\frac{}{\vdash \Lambda}\ \maltese \tag{2.2.17}$$

Regola positiva *Sia I una ramificazione e sia, per ogni $i \in I$, $\Lambda_i \subseteq \Lambda$, con i Λ_i a due a due disgiunti,*

$$\frac{\dots \quad \xi * i \vdash \Lambda_i \quad \dots}{\vdash \Lambda, \xi}\ (+, \xi, I) \tag{2.2.18}$$

Regola negativa *Sia $\mathcal{N}$ una directory e, per ogni $I \in \mathcal{N}$, $\Lambda_I \subseteq \Lambda$,*

$$\frac{\dots \quad \vdash \Lambda_I, \xi * I \quad \dots}{\xi \vdash \Lambda}\ (-, \xi, \mathcal{N}) \tag{2.2.19}$$

dove $\xi * I$ sta per $\xi * i_1, \dots, \xi * i_k$, per ogni $i_h \in I$, $1 \leq h \leq k$.

Il locus ξ delle regole positive e negative è detto fuoco *della regola.*

I seguenti design sono la traduzione in ludica, rispettivamente, della 2.2.13 e della 2.2.14:

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \vdash \xi * 1, \xi * 2, \Gamma\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \vdash \xi * 1, \xi * 3, \Gamma\end{array}}{\xi \vdash \Gamma}\ (-, \xi, \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}) \qquad \frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \xi * 1 \vdash \Gamma_1\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \xi * 2 \vdash \Gamma_2\end{array}}{\vdash \xi, \Gamma}\ (+, \xi, \{1, 2\}) \tag{2.2.20}$$

Una delle caratteristiche più evidenti della ludica, che segue dal suo approccio decomposizionale, piuttosto che composizionale, è che non solo tra le regole non compare nessun analogo dell'assioma identità, ma non esiste nemmeno un analogo delle formule atomiche: l'unica realtà solo i loci, i quali possono essere a piacere decomposti in un numero arbitrario (finito) di sotto-loci. Su questa "scomparsa degli atomi", che ha motivazioni morfologiche molto serie, torneremo più avanti (vd. §4.1).

Inoltre, nella definizione di design non compare alcun riferimento alla regola del taglio: per introdurre la dinamica, avremo bisogno delle *reti di design*:

Definizione 2.2.7 (rete di design-*dessins*)**.** *Una* rete di design *è un insieme non vuoto finito di design* $\mathfrak{R} = \{\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_n\}$ *di base rispettivamente* $\Xi_i \vdash \Lambda_i, 1 \leq i \leq n$*, tale che:*

disgiunzione *i loci delle basi sono a due a due disgiunti o uguali;*

tagli *ogni locus appare in al più due basi, una volta in un manico, l'altra in una punta. In tal caso è detto* taglio

albero *il grafo che ha come vertici le basi* $\Xi_i \vdash \Lambda_i$ *e come lati i tagli è un albero.*

La base *di* $\mathfrak{R}$ *è la forca costituita dai loci che non sono tagli (la definizione è ben posta in quanto, inducendo* $\mathfrak{R}$ *un grafo connesso aciclico, c'è al più un design* $\mathfrak{D}_i$ *il cui manico non è costituito da tagli).*

L'unico design $\mathfrak{D}_i$ *la cui base è positiva o negativa (con l'unico manico senza tagli) è detto* design principale di $\mathfrak{R}$ *e la sua prima regola è detta* regola principale di $\mathfrak{R}$.

Altre due osservazioni: in primo luogo la definizione di design non fa alcun riferimento a questioni di ricorsività, decidibilità, finitezza, buon ordinamento ecc., ossia a tutte quelle condizioni che in §1.1.3 abbiamo identificato come caratteristiche di una sintassi. A partire dalla ludica, e in maniera ben più radicale con la Geometria dell'Interazione, l'obbiettivo di Girard sarà quello di definire degli ambienti "a-sintattici", e dunque sicuramente non aritmetizzabili, per ritrovare all'interno di questi le condizioni per l'esistenza delle sintassi logiche. *E' soltanto a partire da un dominio amorfo che ha senso cercare le condizioni di possibilità dei formalismi.*

In secondo luogo, si osservi che tanto la regola positiva quanto quella negativa reintroducono, a sorpresa, l'indebolimento (attraverso le clausole $\Lambda_i, \Lambda_I \subseteq \Lambda$), come regola strutturale ammessa. Del resto, in assenza di contrazione, la presenza dell'indebolimento non produce la banalizzazione classica dei connettivi lineari (vd. §1.2.5).

Veniamo ad alcuni semplici esempi di design:

- Il *demone*, $\mathfrak{Dai}$, è il più semplice design in base positiva:

$$\frac{}{\vdash \Lambda} \maltese \tag{2.2.21}$$

- Esiste un unico caso di design *parziale*, ossia la cui conclusione non è conclusione di alcuna regola, il design $\mathfrak{Fid}$:

$$\frac{}{\vdash \Lambda} \Omega \tag{2.2.22}$$

Vedremo come la dinamica della ludica distinguerà nettamente gli apparentemente identici design $\mathfrak{Dai}$ e $\mathfrak{Fid}$.

- Dati due loci disgiunti ξ, ξ', il design $\mathfrak{Fax}_{\xi,\xi'}$ in base $\xi \vdash \xi'$ è il seguente:

$$\dfrac{\dots \quad \dfrac{\dots \quad \dfrac{\vdots\ \mathfrak{Fax}_{\xi' * i, \xi * i}}{\xi' * i \vdash \xi * i} \quad \dots}{\vdash \xi', \xi * I}\,(+, \xi', I) \quad \dots}{\xi \vdash \xi'}\,(-, \xi, \wp_f(\mathbb{N})) \tag{2.2.23}$$

  Si noti che ogni delocalizzazione φ induce il design $\mathfrak{Fax}_{\xi,\varphi(\xi)}$, che corrisponde intuitivamente, modulo φ, a una derivazione del sequente identità $A \vdash \varphi(A)$ (per il quale non c'è nessun assioma).

L'introduzione del "connettivi generalizzati", o "connettivi sintetici", come sono chiamati in (Girard, [32]), costituisce una novità molto interessante nel panorama logico e, mi sembra, anche nella questione dei fondamenti. In effetti, uno dei "dogmi", in un certo senso, seguito da molti filosofi della logica, giustificazionisti in testa, è quello secondo il quale le regole generalmente adoperate nel descrivere la logica, quelle di LK o di NJ, costituiscano l' "autentica" traduzione del senso delle costanti logiche. Questo porta all'idea che chiunque adoperi un "e", un "o" o un "se, allora" nella sua pratica linguistica, nel farlo stia effettivamente applicando quelle regole. D'altra parte gli argomenti di Wittgenstein sul "seguire una regola" non sono qui i soli indizi che dovrebbero indurci a sospettare di questo "dogma": nell'ambito della filosofia analitica, vengono in mente ad esempio gli argomenti di Quine (vd. ad esempio (Quine, [62])) sull' indeterminazione della traduzione, in virtù dei quali insiemi distinti (e reciprocamente incompatibili) di *ipotesi analitiche* sulle regole di inferenza che un parlante sta seguendo nella sua pratica linguistica possono risultare adeguati per descrivere e interpretare l'uso che questi fa della sua lingua. Chi l'ha detto che nel pronunciare un enunciato:

o oggi piove e allora resto a casa, oppure, se c'è il sole vado al mare (2.2.24)

un parlante debba fare riferimento alle regole canoniche del "o" e del "se, allora", e non possa invece considerare una regola "sintetica" per il connettivo generalizzato "o... e allora..., oppure, se ..., ..."?

La ludica, nell'ambito della discussione sul ruolo delle regole di inferenza nel linguaggio che attraversa questo, nonchè i prossimi, capitoli, ci permette di considerare, anche e soprattutto da un punto di vista tecnico, un modo diverso di pensare le regole, ispirato a quella che Girard chiama la "sintassi a posteriori": tornando al caso dell'enunciato 2.2.24, ci si può chiedere per quali motivi dovremmo fare una seria differenza tra le diverse "ipotesi analitiche" che possiamo formulare sulle regole di inferenza che il parlante segue nel proferirlo. La risposta che mi sembra provenire dalla ludica, come vedremo, è che sono solo gli specifici contesti di interazione a dirci se l'una o l'altra ipotesi fanno tra loro una differenza: è solo di fronte a un altro parlante che, seguendo una delle due ipotesi, in un dato contesto, non riesca a comprendere l'enunciato (ciò che nella ludica sarà rappresentato da una interazione divergente, vd. sotto), che sarà possibile preferire una ipotesi all'altra, *in quel contesto*. Attraverso questo esempio vediamo come le regole vengano a essere interamente sottomesse ai contesti di interazione, nel senso che è solo a partire da questi che possiamo attribuire regole. In particolare, mi sembra che in questa ottica si riesca a dare senso al fatto che una stessa derivazione (vd. conclusione di §2.1.4) possa essere, in virtù del contesto, dell'uso che se ne fa, "decorata da regole" in modi diversi.

Una dinamica generalizzata E' ora di procedere alla descrizione della dinamica della ludica, ovvero alla procedura di eliminazione dei tagli nelle reti di design; si noti che non dimostreremo alcun analogo del teorema 1.2.1 di eliminazione del taglio (pag. 49), ovvero non proveremo affatto che la procedura che definisce la dinamica termina sempre: l'aspetto interessante sarà proprio costituito dal fatto che l'interazione potrà in molti casi *divergere*, ossia non terminare: la comprensione reciproca non sarà affatto un prerequisito dell'interazione ludica. D'altra parte, sarà facile rendersi conto di come le interazioni direttamente provenienti dal derivazioni logicamente corrette convergano sempre. E' in questo senso che la ludica schiude, nel dominio della logica, un universo completamente nuovo, vale a dire proprio quell'universo della scorrettezza la cui rilevanza è stata sottolineata più volte in §2.1.3.

Definizione 2.2.8 (normalizzazione chiusa)**.** *Sia $\mathfrak{R}$ una rete di design chiusa, ossia di base la forca vuota $\vdash$. Allora il suo design principale $\mathfrak{D}$ è positivo e la sua regola principale κ è positiva. Ci sono tre casi:*

Demone *κ è la regola ✠. Allora $\mathfrak{R}$ si normalizza nel design $\mathfrak{Dai}$, che si scrive $[\![\mathfrak{R}]\!] = \mathfrak{Dai}$;*

Fallimento immediato *$\kappa = (+, \xi, I)$, e dunque ξ è un taglio, ossia occorre nel manico di un design $\mathfrak{E}$, la cui ultima regola è $(-, \xi, \mathcal{N})$; se $I \notin \mathcal{N}$, allora la normalizzazione diverge, che si scrive $[\![\mathfrak{R}]\!] = \mathfrak{Fid}$;*

Conversione *Come sopra, ma $I \in \mathcal{N}$; sia, per $i \in I$, $\mathfrak{D}_i$ il sotto-design di $\mathfrak{D}$ la cui conclusione è la premessa di indice i di $(+, \xi, I)$ e sia $\mathfrak{E}'$ il sotto-design di $\mathfrak{E}$ indotto dalla premessa di indice I di $(-, \xi, \mathcal{N})$. Allora $\mathfrak{F}$ è il risultato della sostituzione di $\mathfrak{D}$ e $\mathfrak{E}$ rispettivamente con i $\mathfrak{D}_i$ e con $\mathfrak{E}'$. Dal momento che $\mathfrak{F}$ non è detto che sia connesso, sia $\mathfrak{F}'$ la componente connessa in $\mathfrak{F}$ di $\mathfrak{E}'$. Definiamo $[\![\mathfrak{R}]\!] = [\![\mathfrak{F}']\!]$.*

Possiamo rappresentare visivamente il caso generale della conversione come segue (servendoci della regola del *cut* per rappresentare i tagli nella rete:

$$
\dfrac{\dfrac{\cdots \quad \begin{array}{c}\vdots\ \mathfrak{E}' \\ \vdash \xi * i_1, \ldots, \xi * i_k\end{array} \quad \cdots}{\xi \vdash}\,(-,\xi,\mathcal{N}) \qquad \dfrac{\cdots \quad \begin{array}{c}\vdots\ \mathfrak{D}_i \\ \xi * i \vdash\end{array} \quad \cdots}{\vdash \xi}\,(+,\xi,I)}{\vdash}\,cut \quad \rightsquigarrow
$$

$$
\rightsquigarrow \quad \dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \mathfrak{E}' \\ \vdash \xi * i_1, \ldots, \xi * i_k\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\ \mathfrak{D}_{i_1} \\ \xi * i_1 \vdash\end{array}}{\vdash \xi * i_2, \ldots, \xi * i_k}\,cut \\ \vdots \\ \vdash \xi * i_k\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\ \mathfrak{D}_{i_k} \\ \xi * i_k \vdash\end{array}}{\vdash}\,cut \tag{2.2.25}
$$

Definizione 2.2.9 (normalizzazione aperta)**.** *Nel caso aperto, ossia in cui* $\mathfrak{R}$ *non ha base vuota, ci sono due ulteriori casi da considerare:*

Commutazione positiva $\mathfrak{R}$ *ha base positiva, con regola principale* $(+,\xi,I)$*, in cui* ξ *non è un taglio. Siano* $\mathfrak{D}_i$ *definite come nel caso chiuso e sia* $\mathfrak{R}'$ *il risultato della sostituzione in* $\mathfrak{R}$ *di* $\mathfrak{D}$ *con i* $\mathfrak{D}_i$*. Ogni* $\mathfrak{D}_i$ *si trova in una componente connessa* $\mathfrak{R}_i$ *di* $\mathfrak{R}'$*, che è una rete (le* $\mathfrak{R}_i$ *sono inoltre a due a due disgiunte). Allora la forma normale* $[\![\mathfrak{R}]\!]$ *di* $\mathfrak{R}$ *è il design che ha come ultima regola* $(+,\xi,I)$ *ed i cui sotto-design immediati sono gli* $[\![\mathfrak{R}_i]\!]$*, (che* $[\![\mathfrak{R}_i]\!]$ *esista segue dal caso successivo):*

$$
\dfrac{\cdots \quad \begin{array}{c}\vdots\ \mathfrak{D}_i \\ \xi * i \vdash \Lambda_i\end{array} \quad \cdots}{\vdash \xi, \Lambda}\,(+,\xi,I) \qquad \rightsquigarrow \qquad \dfrac{\cdots \quad \begin{array}{c}\vdots\ [\![\mathfrak{R}_i]\!] \\ \xi * i \vdash \Lambda_i\end{array} \quad \cdots}{\vdash \xi, \Lambda}\,(+,\xi,I) \tag{2.2.26}
$$

Commutazione negativa $\mathfrak{R}$ *ha base negativa, con regola principale* $(-,\xi,\mathcal{N})$*, in cui* ξ *non è un taglio. Sia, per* $I \in \mathcal{N}$*,* $\mathfrak{D}_I$ *il sotto-design indotto dalla premessa di indice* I *di* $(-,\xi,\mathcal{N})$ *e sia* $\mathfrak{R}'$ *il risultato della sostituzione in* $\mathfrak{R}$ *di* $\mathfrak{D}$ *con i* $\mathfrak{D}_I$*; sia* $\mathfrak{R}_I$ *la componente connessa di* $\mathfrak{D}_I$*; sia* $\mathcal{N}' \subseteq \mathcal{N}$ *l'insieme (eventualmente vuoto) degli* I *tali che* $\mathfrak{R}_I$ *ammette una forma normale* $[\![\mathfrak{R}_I]\!]$*; allora,* $[\![\mathfrak{R}]\!]$ *è definito come il design la cui ultima regola è* $(-,\xi,\mathcal{N}')$ *ed i cui sotto-design immediati sono gli* $[\![\mathfrak{R}_I]\!]$*, per* $I \in \mathcal{N}'$*:*

$$
\dfrac{\cdots \quad \begin{array}{c}\vdots\ \mathfrak{D}_I \\ \vdash \xi * I, \Lambda_I\end{array} \quad \cdots}{\xi \vdash \Lambda}\,(-,\xi,\mathcal{N}) \qquad \rightsquigarrow \qquad \dfrac{\cdots \quad \begin{array}{c}\vdots\ [\![\mathfrak{R}_I]\!] \\ \vdash \xi * I, \Lambda_I\end{array} \quad \cdots}{\xi \vdash \Lambda}\,(-,\xi,\mathcal{N}') \tag{2.2.27}
$$

Attraverso la procedura di normalizzazione possiamo verificare che il $\mathfrak{Fax}_{\xi,\varphi(\xi)}$ induce una delocalizzazione dei design $\mathfrak{D}$ in base $\vdash \xi$ e $\mathfrak{E}$ in base $\varphi(\xi) \vdash$, data da:

$$
[\![\mathfrak{Fax}, \mathfrak{D}]\!] = \varphi(\mathfrak{D}) \qquad [\![\mathfrak{Fax}, \mathfrak{E}]\!] = \varphi^{-1}(\mathfrak{E}) \tag{2.2.28}
$$

Possiamo a questo punto ricostruire anche nella ludica una nozione di polo: se $\mathfrak{D}$ è un design in base $\Xi \vdash \Lambda$, e $(\mathfrak{E}_\sigma)_{\sigma \in \Xi \cup \Lambda}$ è una famiglia di design in base $\vdash \sigma$, per $\sigma \in \Xi$ o $\sigma \vdash$, per $\sigma \in \Lambda$, allora indichiamo con $\ll \mathfrak{D} | (\mathfrak{E}_\sigma) \gg$ la forma normale $[\![\mathfrak{D}, \dots, \mathfrak{E}_\sigma, \dots]\!]$, definendo così una funzione simmetrica di immagine $\{\mathfrak{Dai}, \mathfrak{Fid}\}$; scegliamo il polo $\overset{\downarrow}{\sim} = \{\mathfrak{Dai}\}$. La notazione $\mathfrak{D} \overset{\downarrow}{\sim} (\mathfrak{E}_\sigma)$ starà dunque per $\ll \mathfrak{D} | (\mathfrak{E}_\sigma) \gg = \mathfrak{Dai}$.

L'ortogonalità indotta dal polo porta alla seguente definizione:

Definizione 2.2.10. *L'insieme dei design in base $\Xi \vdash \Lambda$ è dotato della topologia generata dagli insiemi $(\mathfrak{E}_\sigma)^{\overset{\downarrow}{\sim}}$, la quale induce una relazione di* precedenza *data da $\mathfrak{D} \preceq \mathfrak{D}' \Leftrightarrow \mathfrak{D}^{\overset{\downarrow}{\sim}} \subseteq \mathfrak{D}'^{\overset{\downarrow}{\sim}}$.*

Equivalentemente, si sarebbe potuto dire $\mathfrak{D} \preceq \mathfrak{D}' \Leftrightarrow \mathfrak{D}' \in \mathfrak{D}^{\overset{\downarrow}{\sim}\overset{\downarrow}{\sim}}$. L'idea che sta dietro la relazione di precedenza è che $\mathfrak{D} \preceq \mathfrak{D}'$ voglia dire che $\mathfrak{D}$ è "più definita" di $\mathfrak{D}'$ (vd. §C per una spiegazione più rigorosa), nel senso di avere delle directory più strette nelle sue regole negative oppure di avere delle regole positive laddove $\mathfrak{D}'$ ha delle regole demone. E' facile rendersi conto di come $\mathfrak{Dai}$ costituisca un massimo della relazione di precedenza: è infatti sicuramente il meno definito e, dunque, il più "opportunista" tra i design in una data base. Nel caso di base negativa, il design minimo è il cosiddetto $\mathfrak{Skunk}$:

$$\mathfrak{Skunk} \qquad \frac{}{\xi \vdash \Lambda}\ (-, \xi, \emptyset) \tag{2.2.29}$$

Nel caso di base positiva, il ruolo dello $\mathfrak{Skunk}$ è giocato dagli $\mathfrak{Skunk}^+_{(\lambda,I)}$:

$$\mathfrak{Skunk}^+_{(\lambda,I)} \qquad \frac{\dots \quad \dfrac{}{\lambda * i \vdash}\ (-, \lambda * i, \emptyset) \quad \dots}{\vdash \Lambda}\ (+, \lambda, I) \tag{2.2.30}$$

In generale, l'equazione che rivela il contenuto procedurale della precedenza è la seguente:

$$\Omega \preceq (+, \xi, I) \preceq \maltese \tag{2.2.31}$$

In analogia con quanto visto sopra, possiamo introdurre le *etiche* come insiemi di design in una data base ed i *comportamenti* come insiemi di design in una data base uguali al proprio bipolare. Esempi di comportamenti sono $\top$, ovvero l'insieme di tutti i design in una data base (negativa) e $\mathbf{0} := \{\mathfrak{Dai}\}$, il *demone*, ovvero il più piccolo comportamento in una base positiva.

Enunciamo alcune proprietà importanti dei comportamenti:

Proposizione 2.2.3 (proprietà dei comportamenti)**.** *Sia $\mathbf{G}$ un comportamento.*

(*i*) *se $\mathbf{E}$ è un'etica, allora $\mathbf{H} = \mathbf{E}^{\overset{\downarrow}{\sim}}$ è un comportamento;*

(*ii*) *se $\mathfrak{D} \in \mathbf{G}$, e $\mathfrak{D} \preceq \mathfrak{E}$, allora $\mathfrak{E} \in \mathbf{G}$;*

(*iii*) *se $K \neq \emptyset$ e $\mathfrak{D}_k \subset \mathfrak{D} \in \mathbf{G}$, per ogni $k \in K$, allora $\bigcap_k \mathfrak{D}_k \in \mathbf{G}$;*

(*iv*) *se* $\mathfrak{E} \in \mathbf{G}$*, allora esiste un* $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{E}$ *minimo tale che* $\mathfrak{D} \in \mathbf{G}$*:* $\mathfrak{D}$*, scritto come* $|\mathfrak{E}|_{\mathbf{G}}$*, è detto* incarnazione *di* $\mathfrak{E}$ *in* $\mathbf{G}$*;*

(*v*) *L'incarnazione è controvariante, ovvero, se* $\mathbf{H}$ *è un comportamento,* $\mathbf{G} \subset \mathbf{H}$ *e* $\mathfrak{D} \in \mathbf{G}$*, allora* $|\mathfrak{D}|_{\mathbf{H}} \subset |\mathfrak{D}|_{\mathbf{G}}$*.*

Dimostrazione. (*i*) Immediato dai risultati sul polo (vd. §1.2.2).

(*ii*) $\mathfrak{D} \in \mathbf{G}$ vuol dire che, per ogni $\mathfrak{F} \in \mathbf{G}^{\perp\!\!\sim}$, si ha $[\![\mathfrak{D}, \mathfrak{F}]\!] = \mathfrak{Dai}$; dunque $\mathbf{G}^{\perp\!\!\sim} \subseteq \mathfrak{D}^{\perp\!\!\sim}$; da $\mathfrak{D}^{\perp\!\!\sim} \subset \mathfrak{E}^{\perp\!\!\sim}$, segue allora $\mathbf{G}^{\perp\!\!\sim} \subset \mathfrak{E}^{\perp\!\!\sim}$, e dunque $[\![\mathfrak{E}, \mathfrak{F}]\!] = \mathfrak{Dai}$, ovvero $\mathfrak{F} \in \mathbf{G}$.

(*iii*) Per il teorema C.0.6 di stabilità (vd. §C), si ha che, per ogni $\mathfrak{F} \in \mathbf{G}^{\perp\!\!\sim}$, $[\![\bigcap_k \mathfrak{D}_k, \mathfrak{F}]\!] = \bigcap_k [\![\mathfrak{D}_k, \mathfrak{F}]\!] = \langle \maltese \rangle$, da cui la tesi.

(*iv*) L'insieme dei design $\mathfrak{D}$ in $\mathbf{G}$ tali che $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{E}$ è una famiglia non vuota la cui unione è un design; per (*iii*), la sua intersezione è l'incarnazione cercata, ovvero si ha

$$|\mathfrak{E}|_{\mathbf{G}} = \bigcap \{\mathfrak{D} | \mathfrak{D} \subset \mathfrak{E} \wedge \mathfrak{D} \in \mathbf{G}\} \tag{2.2.32}$$

(*v*) $\mathfrak{c} \in |\mathfrak{E}|_{\mathbf{H}}$ se e solo se, per ogni $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{E}$ tale che $\mathfrak{D} \in \mathbf{H}$, $\mathfrak{c} \in \mathfrak{D}$; d'altra parte, da $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{H}$, segue che se $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{E}$ e $\mathfrak{F} \in \mathbf{G}$, allora, poichè $\mathfrak{F} \in \mathbf{H}$, $\mathfrak{c} \in \mathfrak{F}$, e dunque $\mathfrak{c} \in |\mathfrak{E}|_{\mathbf{G}}$.

□

Da queste proprietà ricaviamo che $\top$ e $\mathbf{0}$ sono effettivamente comportamenti, in quanto vale $\top = \{\emptyset\}^{\perp\!\!\sim}$ e $\mathbf{0} = \top^{\perp\!\!\sim}$. D'altra parte, la nozione di incarnazione fa sì che ogni comportamento $\mathbf{G}$ induca una relazione di equivalenza $\simeq_{\mathbf{G}}$ sui suoi design:

$$\mathfrak{D} \simeq_{\mathbf{G}} \mathfrak{E} \Leftrightarrow |\mathfrak{D}|_{\mathbf{G}} = |\mathfrak{E}|_{\mathbf{G}} \tag{2.2.33}$$

In §2.2.3 vedremo un esempio di come uno stesso design possa avere diverse incarnazioni, o meglio, incarnazioni diverse in comportamenti diversi: possiamo cioè vedere nell'incarnazione una forma interattiva di selezione di quella componente del design che caratterizza il suo aderire alle *norme* del comportamento, secondo l'analogia

$$\text{incarnazione} \approx \text{essenza} \tag{2.2.34}$$

Questo carattere di ricerca e selezione (da parte del positivo nei confronti del negativo) è del resto già emerso dalle commutazioni che definiscono la normalizzazione dei design (definizione 2.2.9): la concreta interazione è dunque il terreno sul quale sono generate e modellate le essenze.

La rilevanza ed i rapporti con la teoria delle categorie indotti da questa analogia saranno messi in luce quando affronteremo il risultato principale riguardante le incarnazioni, ovvero il cosiddetto *mistero dell'incarnazione* (§2.2.3).

2.2.2 Dispute e interpretazioni

Attraverso l'introduzione dei più "geometrici" design-*desseins*, sarà mostrata la versione più sintetica ed elegante dell'architettura della ludica e, attraverso il concetto di "incarnazione", sarà discusso il modo con cui tale teoria modifica le prospettive sulla giustificazione logica, in parziale analogia con il pensiero di Wittgenstein.

I design-*desseins* La definizione di design 2.2.6 a pag. 138, nonostante il suo grado di astrazione, presenta tuttavia ancora una certa dose di ridondanza, relativamente alla teoria che le stiamo costruendo attorno: si può pensare infatti di eliminare l'intera struttura a sequenti, sostituendola con un albero i cui nodi sono le etichette delle regole $(\varepsilon, \xi, I/\mathcal{N})$; si può d'altra parte obiettare che, nella rappresentazione $(+, \xi, I)$ della regola positiva, non si fa esplicitamente riferimento alla separazione dei contesti dalla conclusione alle premesse, e che di conseguenza il ruolo che spetta di diritto ai sequenti sia proprio quello di rappresentare il modo con cui tale separazione è operata. In realtà, il problema della separazione dei contesti può essere fortemente ridimensionato: la soluzione consiste essenzialmente nello spostare ogni ramificazione negativa di un passo verso l'alto, così da avere solo ramificazioni positive; ad esempio

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\sigma * 2 \vdash \xi * 3 * 0}\,(-, \sigma * 2, \emptyset)}{\vdash \xi * 3 * 0, \sigma}\,(+, \sigma, \{2\}) \qquad \dfrac{}{\vdash \xi * 3 * 0, \xi * 3 * 5, \sigma}\,\maltese}{\xi * 3 \vdash \sigma, \tau}\,(-, \xi * 3, \{\{0\}, \{0, 5\}\}) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\vdash \tau}\,\maltese}{\xi * 7 \vdash \tau}\,(-, \xi * 7, \{\emptyset\})}{\vdash \xi, \sigma, \tau}\,(+, \xi, \{3, 7\}) \tag{2.2.35}$$

diventa in primo luogo:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(-, \sigma * 2, \emptyset)}{(+, \sigma, \{2\})} \quad \maltese}{(-, \xi * 3, \{\{0\}, \{0, 5\}\})} \qquad \dfrac{\maltese}{(-, \xi * 7, \{\emptyset\})}}{(+, \xi, \{3, 7\})} \tag{2.2.36}$$

e successivamente:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(-, \sigma * 2, \emptyset)}{(+, \sigma, \{2\})}}{(-, \xi * 3, \{0\})} \qquad \dfrac{\maltese}{(-, \xi * 3, \{0, 5\})} \qquad \dfrac{\maltese}{(-, \xi * 7, \{\emptyset\})}}{(+, \xi, \{3, 7\})} \tag{2.2.37}$$

L'osservazione decisiva è che l'informazione sulla separazione dei contesti è rilevante solo nel caso di loci che sono il focus di regole positive: ad esempio, in 2.2.35, nella spartizione del contesto $\{\sigma, \tau\}$ del sequente conclusione, soltanto l'informazione su σ è rilevante: τ può, in un certo senso, essere messo "dove vuole" senza mutare la proceduralità del design.

Nella versione 2.2.37, la più sintetica, possiamo riconoscere che il design risulta ora strutturato come una specie di grafo, i cui nodi, le etichette delle regole, sono detti *azioni*, e possono essere scritti come (ε, ξ, I), con I una ramificazione (non c'è infatti più bisogno delle directory) ed i cui lati congiungono una azione positiva a una negativa, e sono indotti dalle cosiddette *cronache* (per semplicità d'ora in poi dimenticheremo la polarità dell'azione, che sarà scritta semplicemente (ξ, I)):

Definizione 2.2.11 (cronaca)**.** *Una* cronaca *di base* $\Upsilon \vdash \Lambda$ *è una sequenza di azioni* $\langle \kappa_0, \ldots, \kappa_n \rangle$ *tale che:*

Alternanza *la polarità di* κ_p *è uguale alla polarità della base, se* p *è pari, al suo opposto se* p *è dispari;*

Demone *per* $p < n$*,* k_p *è* propria*, ossia* $k_p \neq \maltese$*;*

Azioni negative *il focus* ξ_p *di un'azione negativa è in* Υ *se* $p = 0$ *oppure è in* $\xi_{p-1} * I_{p-1}$*;*

Azioni positive *il focuse* ξ_p *di un'azione positiva è in* Λ *oppure in* $\xi_1 * I_q$*, dove* $q < p$ *e* (ξ_q, I_q) *è un'azione negativa;*

Distruzione dei fuochi $p \neq q \Rightarrow \xi_p \neq \xi_q$*, ovvero un fuoco non può essere riusato.*

Queste osservazioni e definizioni sono alla base di una ridefinizione (vd. Girard [33]) del vocabolario della ludica in un contesto molto più sintetico, "orientato alle azioni", ed ai loro rispettivi fuochi, e nel quale l'unica cosa che determina il design è la struttura delle connessioni tra le azioni stesse; come vedremo tra breve, risulterà possibile caratterizzare le "qualità" delle operazioni logiche moltiplicative ed additive in maniera radicalmente indipendente dall'assegnamento di una qualche formula o di una qualunque artefatto sintattico, semplicemente attraverso l'analisi della struttura del grafo da queste indotto. Se la scommessa 2.2.12 (pag. 136) è che la normatività del senso linguistico ha la sua origine nel sostrato che precede il costituirsi delle formule, la possibilità di ritrovare alcuni tra gli aspetti più caratteristici della logica in un dominio così astratto e lontano dal linguaggio e dalla sintassi come siamo abituati a pensarli, non può che costituire una piacevole sorpresa.

Avendo in mente la presentazione di un design come insieme di cronache, si tratta allora di specificare le condizioni affinchè due cronache distinte possano coesistere all'interno di uno stesso design; dal momento che l'aspetto determinante riguarda i casi in cui due cronache si trovano ad avere un segmento iniziale in comune, dobbiamo rivolgere l'attenzione alle possibili "ramificazioni" dell'albero che rappresenta il design; compaiono così immediatamente i due casi sopra menzionati:

ramificazione moltiplicativa

$$\dfrac{\begin{matrix} \vdots\ \mathfrak{d}_1 & & \vdots\ \mathfrak{d}_k \\ (\xi * i_1, I_1) & \ldots & (\xi * i_k, I_k) \end{matrix}}{(\xi, \{i_1, \ldots, i_k\})} \tag{2.2.38}$$

ovvero si ha $\mathfrak{c}_j = \cdots * (\xi, \{i_1, \ldots, i_k\}) * (\xi * i_j, I_j) * \mathfrak{d}_j$, per una certa cronaca $\mathfrak{d}_j$; la separazione moltiplicativa dei contesti richiede allora che, se $j \neq k$, i fuochi delle azioni di $\mathfrak{d}_j$ e $\mathfrak{d}_k$ siano tutti distinti.

ramificazione additiva

$$\dfrac{\dfrac{\vdots\, \mathfrak{d}_1}{(\sigma, J_1)} \quad \dots \quad \dfrac{\vdots\, \mathfrak{d}_n}{(\sigma, J_n)}}{(\xi, I)} \tag{2.2.39}$$

ovvero si ha $\mathfrak{c}_j = \cdots * (\xi, \{i_1, \dots, i_k\}) * (\sigma, J_j) * \mathfrak{d}_j$, per una certa cronaca $\mathfrak{d}_j$; in questo caso le azioni (σ, J_j) hanno tutte stesso fuoco, ovvero rappresentano una *sovrapposizione* di cronache: nell'interazione soltanto una delle $\mathfrak{c}_j$ sarà selezionata, e dunque non si richiede che i fuochi delle azioni nelle $\mathfrak{d}_j$ siano distinti.

Possiamo quindi dotare l'insieme delle cronache di una struttura di spazio coerente (positivo) attraverso la seguente:

Definizione 2.2.12 (coerenza)**.** *Le cronache $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}'$ sono coerenti quando sono una sottocronaca dell'altra, oppure differiscono a partire da una regola negativa, ovvero $\mathfrak{c} = \mathfrak{d} * \kappa * \mathfrak{e}, \mathfrak{c}' = \mathfrak{d} * \kappa' * \mathfrak{e}'$, con $\kappa \neq \kappa'$ azioni negative e, inoltre, se κ, κ' hanno fuochi distinti, allora anche tutti i fuochi di $\mathfrak{e}$ e $\mathfrak{e}'$ sono distinti.*

Siamo adesso in grado di presentare la seconda definizione di design, il quale non sarà altro che una particolare cricca di cronache:

Definizione 2.2.13 (design-*dessein*)**.** *Un design di base $\Upsilon \vdash \Lambda$ è un insieme $\mathfrak{D}$ di cronache a due a due coerenti di base $\Upsilon \vdash \Lambda$ tale che:*

- *$\mathfrak{D}$ è chiuso per restrizioni: se $\langle k_1, \dots, k_n \rangle \in \mathfrak{D}$, allora ogni sottocronaca $\langle k_1, \dots, k_p \rangle$, con $p < n$, è in $\mathfrak{D}$;*
- *se $\mathfrak{c} \in \mathfrak{D}$ non ha estensioni strette in $\mathfrak{D}$, allora la sua ultima regola è positiva.*

Attraverso i design-*desseins* è possibile introdurre un nuovo ordine sui design, l'*ordine stabile*, definito semplicemente dall'inclusione $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}'$, che corrisponde, dal punto di vista dei design-*dessins*, al fatto di avere regole negative più strette o, equivalentemente, meno cronache.

Introduciamo, anche per i design-*desseins*, la nozione di rete di design:

Definizione 2.2.14 (rete di design-*desseins*)**.** *Una rete $\mathfrak{R}$ di design-*desseins *è definita come in 2.2.7, con in più la seguente condizione:*

- *se ξ è una punta sia in $\Xi_p \vdash \Lambda_p$ che in $\Xi_q \vdash \Lambda_q$, e se in $\mathfrak{D}_p$ e $\mathfrak{D}_q$ ci sono azioni di fuoco ξ, allora $p = q$.*

Possiamo pensare alla rete $\mathfrak{R}$ come all'unione $\mathfrak{D}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{D}_n$ dei suoi design, ossia all'insieme di tutte le cronache nei $\mathfrak{D}_i$.

Definiremo adesso una nozione, quella di *porzione*, che ci permetterà di considerare davvero i design in termini grafici: una porzione corrisponderà infatti a un grafo diretto aciclico, ovvero a un ordine arborescente[2].

[2]Un ordine è detto arborescente se ogni suo segmento iniziale è linearmente ordinato.

Definizione 2.2.15 (porzione)**.** *Una* porzione *è un design o una rete di design in cui le directory delle regole negative sono al più singoletti.*

Una porzione non è altro che un design (o una rete) in cui tutte le ramificazioni sono moltiplicative, vale a dire un design (o una rete) privo di sovrapposizioni. Di conseguenza, in una rete di porzioni, ogni azione occorre al più due volte, una volta positivamente, l'altra negativamente. Ha senso dunque introdurre un ordine tra le azioni proprie (ossia diverse dal demone) di una porzione $\mathfrak{S}$:

$$\kappa <_{\mathfrak{S}} \kappa' \Leftrightarrow \exists \mathfrak{c}, \mathfrak{c}' \text{ t.c. } \mathfrak{c} * \kappa * \mathfrak{c}' * \kappa' \in \mathfrak{S} \tag{2.2.40}$$

L'ordine su una porzione $\mathfrak{S}$ induce una sua rappresentazione sotto forma di un grafo diretto, il cui insieme di nodi $V_{\mathfrak{S}}$ è costituito dalle azioni nelle cronache di $\mathfrak{S}$ ed il cui insieme di lati $E_{\mathfrak{S}}$ è definito da

$$< \kappa, \kappa' > \in E_{\mathfrak{S}} \Leftrightarrow \kappa <_{\mathfrak{S}} \kappa' \text{ e non esiste } \iota \in V_{\mathfrak{S}} \text{ t.c. } \iota <_{\mathfrak{S}} \kappa' \text{ e } \kappa <_{\mathfrak{S}} \iota \tag{2.2.41}$$

Il grafo $G_{\mathfrak{S}}$ è aciclico, ossia è una foresta (si noti che questo non avremmo potuto dirlo nel caso di un arbitrario design, per via delle sovrapposizioni additive).

Chiameremo *nascosta* un'azione propria il cui fuoco sia un sotto-locus di un taglio e useremo la notazione $\tilde{\kappa}$ per intendere la versione di polarità opposta dell'azione κ.

Definizione 2.2.16 (porzione bilanciata, maglio)**.** *Una porzione finita $\mathfrak{S}$ è detta* bilanciata *quando, per ogni azione nascosta κ si ha, $\kappa \in \mathfrak{S} \Rightarrow \tilde{\kappa} \in \mathfrak{S}$. Il* maglio *di una porzione bilanciata $\mathfrak{S}$ è il quoziente $\ll_{\mathfrak{S}}$ di $\mathfrak{S}$ (e di $<_{\mathfrak{S}}$) modulo l'identificazione $\kappa \sim \tilde{\kappa}$.*

Mostreremo adesso una procedura di normalizzazione delle reti di design-*desseins*, che rappresenteremo attraverso delle *dispute* $[\mathfrak{D} \rightleftharpoons \mathfrak{E}_\sigma]$, ovvero delle porzioni bilanciate tali che $\ll_{\mathfrak{S}}$ sia un ordine totale. Intuitivamente, una disputa è dunque un cammino nella rete che, in virtù del quoziente indotto dal maglio, "salta" continuamente da un design all'altro; come avremo modo di discutere più avanti, queste dispute non sono altro che la versione formale, in ludica, delle dispute di cui stiamo intuitivamente discutendo fin dal §1.2.1:

Definizione 2.2.17 (dispute indotte da una rete di design)**.** *Sia $\mathfrak{R}$ una rete di design-*desseins*. Costruiremo, a partire da $\mathfrak{R}$, una successione di insiemi di dispute $\mathfrak{S}_n$: la procedura è la seguente:*

$\mathfrak{S}_0$ **base positiva** $\mathfrak{S}_0 = \{\langle\kappa\rangle\}$*, dove $\langle\kappa\rangle$ è l'unica sequenza di lunghezza 1 tra le cronache di $\mathfrak{R}$.*

base negativa *Sia ξ il manico principale: esiste allora una cronaca di lunghezza 1 del tipo $\langle(\xi, I)\rangle$; poniamo $\mathfrak{S}_0 = \{\langle(\xi, I)\rangle\}$;*

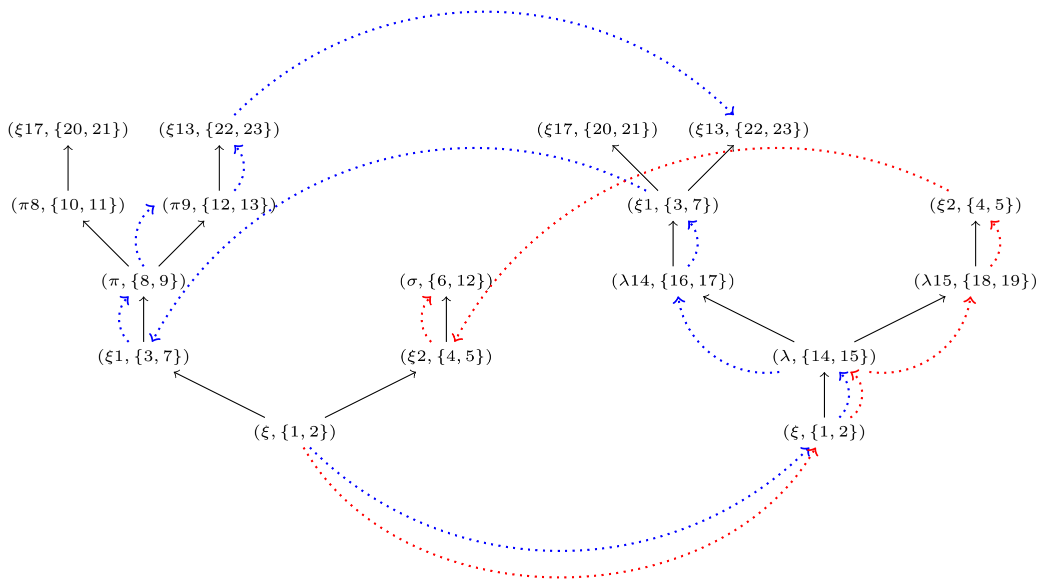
$\mathfrak{S}_{n+1}$ *Sia $\mathfrak{c} * (\xi, I)$ una cronaca di $\mathfrak{S}_n$:*

(ξ, I) **non nascosta e negativa** *Per definizione di design-*dessein *c'è in $\mathfrak{S}_n$ una unica azione positiva κ che estende (ξ, I); allora $\mathfrak{c} * (\xi, I) * \kappa \in \mathfrak{S}_{n+1}$;*

(ξ, I) **non nascosta e positiva** *Se esiste* κ *negativa che estende* (ξ, I)*, allora* $\mathfrak{c} * (\xi, I) * \kappa \in \mathfrak{S}_{n+1}$*, altrimenti* $\mathfrak{c} * (\xi, I) \in \mathfrak{S}_{n+1}$*. Si noti che* κ*, se esiste, è sicuramente non nascosta, in quanto ha fuoco* $\xi * i$*, per* $i \in I$*.*

(ξ, I) **nascosta** (ξ, I) *è sicuramente positiva, in quanto, da una azione non nascosta positiva non si può accedere a una azione nascosta. C'è allora al più una azione* (ξ, I) *negativa che si estende unicamente in una azione* κ *positiva: poniamo allora* $\mathfrak{c} * (\xi, I) * \kappa \in \mathfrak{S}_{n+1}$*.*

Ecco un esempio di rete con un paio di dispute evidenziate:



(2.2.42)

La definizione 2.2.17 rappresenta un modo più costruttivo di vedere all'opera il contenuto del seguente teorema, la cui dimostrazione è omessa (la si può trovare in (Girard, [33])):

Teorema 2.2.4. *Se* $\mathfrak{S}$ *è una porzione bilanciata, allora* $\ll_{\mathfrak{S}}$ *è un ordine arborescente.*

Possiamo a questo punto definire la normalizzazione dei design-*desseins* come segue:

Definizione 2.2.18 (normalizzazione dei design-*desseins*)**.** *Sia* $\mathfrak{R}$ *una rete di design; allora la sua forma normale* $[\![\mathfrak{R}]\!]$ *è ottenuta prendendo tutte le dispute* $\mathfrak{c}$ *la cui ultima azione è non nascosta e cancellando in esse tutte le azioni nascoste.*

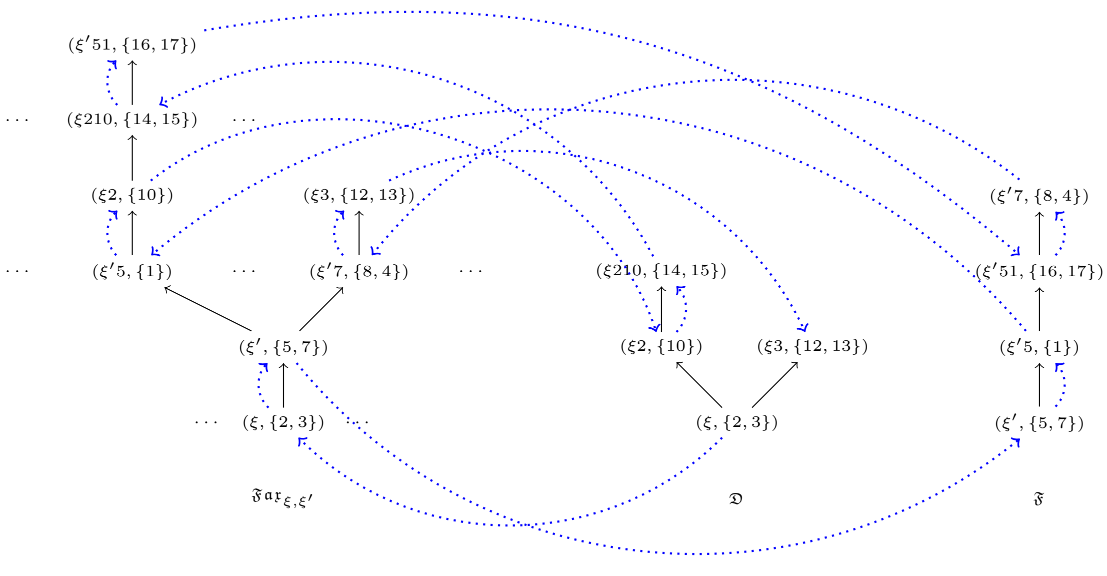
Omettiamo la dimostrazione che $[\![\mathfrak{R}]\!]$ è un design-*desseins*; possiamo d'altra parte osservare, tanto nella costruzione delle dispute, quanto nella 2.2.42, come sicuramente le dispute in $[\![\mathfrak{R}]\!]$ siano coerenti, in quanto l'unica forma di libertà nella costruzione, e dunque gli unici punti in cui possono iniziare a differire, sono le azioni negative. D'altra parte, per lo stesso motivo, vale seguente proposizione:

Proposizione 2.2.5. *Se* $\mathfrak{c} \in [\![\mathfrak{R}]\!]$*, allora c'è un'unica cronaca* $\mathfrak{d} \in \mathfrak{R}$*, detta* protoporzione di $\mathfrak{c}$ *le cui azioni non nascoste sono quelle di* $\mathfrak{c}$*, nello stesso ordine.*

Dimostrazione. E' una conseguenza immediata dell'ultima osservazione, ovvero che l'unica libertà è il passaggio da una azione non nascosta positiva a una non nascosta negativa (o la scelta di una prima azione negativa), le quali sono dunque entrambe in $\mathfrak{c}$. □

Si noti che è possibile riconoscere, nella procedura 2.2.18 di normalizzazione, una versione sintetica degli stessi passi di normalizzazione definiti per i design-*dessins*: i casi non nascosti corrispondono infatti alle due commutazioni ed al caso del demone, mentre il caso nascosto corrisponde alla conversione; ogni disputa corrisponderà allora a una delle possibili sequenze di azioni di P e di O (vd. §1.2.3) che caratterizzano la procedura di eliminazione del taglio.

D'altra parte, se $\mathfrak{D}, \mathfrak{E}$ sono design rispettivamente nelle basi $\vdash \xi$ e $\xi \vdash$, tali che $[\![\mathfrak{D}, \mathfrak{E}]\!] = \mathfrak{Dai}$; allora, in virtù della proposizione 2.2.5 possiamo associare a questa interazione l'unica protoporzione di $\langle \maltese \rangle$, ovvero la disputa $[\mathfrak{D} \rightleftharpoons \mathfrak{E}]$ tra $\mathfrak{D}$ e $\mathfrak{E}$, che corrisponde alla sequenza $\langle \kappa_0, \ldots, \kappa_{n-1}, \maltese \rangle$ delle conversioni seguita da un demone finale, come mostrato dal seguente esempio della rete chiusa $\mathfrak{R} = \{\mathfrak{Fax}_{\xi,\xi'}, \mathfrak{D}, \mathfrak{F}\}$, dove $\mathfrak{F}$ è un design in base $\xi' \vdash$:



(2.2.43)

I teoremi analitici Tra i risultati che conferiscono maggiore eleganza alla ludica, sono i cosiddetti *teoremi analitici*, i quali garantiscono che l'approccio sintetico, che sostituisce i loci al linguaggio e i grafi come 2.2.42 e 2.2.43 alla sintassi, è sufficientemente potente da soddisfare tutti i requisiti che sono normalmente richiesti a un calcolo:

- *separazione*, ovvero l'analogo in ludica del *teorema di Bohm* nel λ-calcolo (vd. Krivine, [49]);
- *associatività*, ovvero la *proprietà di Church-Rosser*;
- *stabilità*, ovvero il perno della sequenzialità di un calcolo (vd. §1.2.3).

La dimostrazione di questi teoremi è data in §C.

Dispute valutative e dispute normative Si consideri ora la seguente proposizione:

Proposizione 2.2.6. *Siano* $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}' \in \mathbf{G}$*; allora si ha* $\mathfrak{D} \simeq_{\mathbf{G}} \mathfrak{D}'$ *se e solo se, per ogni* $\mathfrak{E} \in \mathbf{G}^{\perp\!\sim}$*, si ha* $[\mathfrak{D} \rightleftharpoons \mathfrak{E}] = [\mathfrak{D}' \rightleftharpoons \mathfrak{E}]$.

Dimostrazione. Basta osservare che $[\mathfrak{D} \rightleftharpoons \mathfrak{E}] \neq [\mathfrak{D}' \rightleftharpoons \mathfrak{E}]$ se e solo se esiste una certa $\mathfrak{c}$ tale che $\mathfrak{c} \in |\mathfrak{D}|_{\mathbf{G}}$ e $\mathfrak{c} \notin |\mathfrak{D}'|_{\mathbf{G}}$. □

Questa proposizione dà senso al recupero della prospettiva strategica: possiamo infatti identificare il design $\mathfrak{D} \in \mathbf{G}$ con l'insieme delle sue dispute: $Dsp_{\mathbf{G}}(\mathfrak{D}) := \{[\mathfrak{D} \rightleftharpoons \mathfrak{E}] | \mathfrak{E} \in \mathbf{G}^{\perp\!\sim}\}$; le dispute costituiranno dunque i punti dello spazio coerente $\mathbf{G}$, e $\mathfrak{D}$ non sarà altro che la cricca $Dsp_{\mathbf{G}}(\mathfrak{D}) \sqsubset \mathbf{G}$ (le dispute in $Dsp_{\mathbf{G}}(\mathfrak{D})$ saranno infatti, per un'osservazione già fatta, sicuramente coerenti).

Si noti che, secondo queste definizioni, non vi è alcuna differenza tra una disputa intesa come l'interazione tra due (o più) design già costituiti, ovvero come una forma di eliminazione dei tagli, e una disputa intesa come un processo di *proof-search* interattiva: il cammino colorato in blu in 2.2.43 può essere inteso tanto come un cammino tra azioni già costituite quanto come una sequenza di domande e risposte in cui i giocatori propongono, ogni qual volta gli viene richiesto, una nuova azione con cui continuare l'interazione; in particolare, ogni singolo design sarà ogni volta interpellato negativamente, e la sua azione negativa si estenderà nella scelta di una unica azione positiva, ossia di una nuova interpellanza a un altro dei giocatori.

Nel recuperare, a questo punto, tutte le osservazioni sulle partite in uno spazio coerente fatte in §1.2.2 e §1.2.3, si deve osservare come la possibilità di una *divergenza* dell'interazione modifichi in maniera essenziale il quadro: anzichè giocare una partita in un gioco le cui regole sono già stabilite, possiamo pensare a una disputa come a una partita in cui le regole stesse sono in questione.

> Indeed, the idea of a game is so rich that normativity itself can be the thing at stake! To sum up, game semantics reduces the debate to the question "Is this true?" an *evaluative* query; whereas the alternative approach developed, e.g., in *ludics* poses the more general question "Is this appropriate?", a *normative* query which encompasses the evaluative questioning of truth. (Girard, [44])

Una *disputa valutativa* è quella che si costituisce all'interno di un insieme di norme già specificato: dati due design $\mathfrak{D} \in \mathbf{G}, \mathfrak{E} \in \mathbf{G}^{\perp}$, sappiamo già che la loro interazione convergerà, e dunque l'unica informazione è "chi vince?". In effetti, che l'interazione debba convergere costituisce proprio una delle norme cui $\mathfrak{D}, \mathfrak{E}$ devono accordarsi. Ma in virtù di cosa vi si accordano? In virtù del fatto che l'interazione dell'uno con ogni altro design nel comportamento opposto converge: possiamo quindi scrivere

$$\mathfrak{D} \textit{ è una derivazione corretta di } \mathbf{G} \textit{ se e solo se } \forall \mathfrak{D}' \textit{ derivazione corretta di } \mathbf{G}^{\perp} \ll \mathfrak{D}|\mathfrak{D}' \gg = \mathfrak{Dai} \tag{2.2.44}$$

Questa formulazione rappresenta una giustificazione negativa della correttezza: questo è dovuto al fatto che la possibilità di design non vincenti, e dunque scorretti, come avevamo previsto cambia radicalmente la situazione: possiamo infatti parlare di design "legittimi", ovvero compatibili con un insieme di norme, e, dualmente, di design "deontici" (quelli vincenti), vale a dire design che "devono" essere accettati da chiunque. Come abbiamo osservato in §2.1.3, in assenza di derivazioni "perdenti", gli unici oggetti legittimi sono quelli deontici, e dunque la giustificazione della correttezza è di tipo positivo. Il caso tipico che abbiamo affrontato era il seguente

$$\pi \textit{ è (logicamente) corretta se e solo se } \exists \pi' \textit{ (logicamente) corretta (e canonica) t.c. } \pi \rightsquigarrow \pi' \tag{2.2.45}$$

La correttezza di una derivazione legittima non è equivalente alla correttezza logica, dal momento che anche paraprove come la seguente:

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash A}\,(\maltese) \quad \dfrac{}{\vdash B}\,(\maltese)}{\vdash A \otimes B}\,(\otimes) \tag{2.2.46}$$

sono da considerarsi come legittime. Per evitare ambiguità, parleremo di derivazioni *logicamente legittime* per intendere derivazioni giustificate negativamente, e di derivazioni *logicamente corrette* per intendere derivazioni giustificate positivamente, vale a dire derivazioni logicamente legittime e vincenti.

Recuperando le due tesi giustificazioniste da cui è partita la discussione:

(i) *Il senso di un enunciato E è determinato dalle derivazioni corrette (dimostrazioni) di E*

(ii) *La correttezza delle derivazioni di E è determinata dalle regole di inferenza in cui occorrono le componenti sintattiche di E*

possiamo vedere come le forme di giustificazione appenda discusse, con l'aiuto degli strumenti della ludica, conducono a una revisione della tesi (i) e all'abbandono della tesi (ii): per quanto riguarda la prima, dovremmo infatti riformularla (sostituendo i comportamenti agli enunciati) come:

(i') *Il senso associato a un comportamento* **G** *è determinato dalle derivazioni legittime in* **G**

Si osservi ora che, nel caso in cui **G** sia il polare di un'etica **E**, che possiamo considerare come proveniente da un sistema deduttivo (in effetti, come sottolinea lo stesso Girard, il ruolo delle etiche è proprio quello di derivare da sistemi deduttivi concreti), i design in $\mathbf{E}$ possono essere aritmetizzati, e dunque la leggitimità logica, rispetto a $\mathbf{E}$ di un design diventa equivalente a una formula Π^0_1 della gerarchia aritmetica, ossia, per il secondo teorema di Dedekind 1.1.12 (pag. 34), equivalente a una formula Σ^1 della gerarchia logica. Per il teorema di Σ^1-incompletezza, allora, non c'è modo di ridurre la verifica della legittimità logica entro i confini effettivi di un sistema deduttivo. Questo mi sembra del resto incompatibile con la tesi (*ii*), in quanto nessun insieme di regole di inferenza (computabili) può determinare, per ogni design $\mathfrak{D}$, se $\mathfrak{D} \in \mathbf{G}$.

D'altra parte, lo "spirito" della ludica è proprio quello di una teoria priva di requisiti di sintatticità o computabilità (come osservato già in §2.2.1), e questo ben si accompagna con l'idea, connessa con la "sintassi a posteriori", secondo cui l'aderenza di un design alle norme di un comportamento non è costitutiva del design stesso, non è qualcosa che sia necessario riconoscere per poter comprendere ed usare il design (qui mi sembra difficile non notare affinità con la posizione di Wittgenstein sul "seguire una regola"). Inoltre, questa non sintatticità dei design in un comportamento si manifesta nel fatto che, come la questione delle incarnazioni dimostra, un design $\mathfrak{D}$ legittimo per $\mathbf{G}$ può contenere, oltre a quelle presenti nella loro incarnazione $|\mathfrak{D}|_{\mathbf{G}}$, cronache arbitrarie, e questo corrisponde al fatto che le regole negative (nella versione design-*dessins*) secondo cui $\mathfrak{D}$ è costruito possono avere directory arbitrariamente ampie: i design in $\mathbf{G}$ seguono in ogni caso regole diverse!

Rimane del resto aperta, e sarà tema di indagine dei prossimi capitoli, la questione del rapporto tra la (eventuale) sintatticità delle derivazioni e la non effettività delle norme che sono chiamate a rispettare.

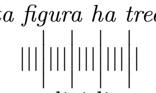
Possiamo inoltre osservare, nella 2.2.44, il carattere "interno" delle norme: l'essere in accordo di $\mathfrak{D}$ con le norme di $\mathbf{G}$ è determinato dal fatto che, per ogni $\mathfrak{D}'$ *che sia in accordo* con le norme di $\mathbf{G}^{\downarrow\sim}$, l'interazione converga. Non riusciamo mai cioè a giustificare l'accordo di un design con un insieme di norme senza accettare prima che qualcos'altro sia in accordo con qualche norma. Mi sembra che fosse proprio questo tipo di circolarità a essere alla base degli argomenti wittgensteiniani in §2.1.3. D'altra parte, la sintassi a posteriori che caratterizza la ludica può essere pensata come uno strumento per rappresentare la stessa interazione logica per mezzo di derivazioni colte nel pieno del loro stesso semiotizzarsi, prima ancora, cioè, che sia stato stabilito il contesto semantico entro il quale il loro uso dovrà essere valutato: è il caso delle *dispute normative*, quelle in cui è in causa la questione della possibile divergenza, ovvero dell'incomprensione. Possiamo dunque chiederci se questi risultati nell'ambito della logica abbiano qualcosa da dirci nel merito della questione, rimasta aperta in §2.1.3, del paradosso posto dalle obiezioni di Wittgenstein al "modello a binari" del senso linguistico, ovvero al problema di come giustificare l'oggettività delle norme una volta che si sia escluso (punto 1.) che l'intendere un certo senso con una data espressione, da parte di un parlante, coincida con il riconoscere, da parte di quel parlante, l'accordo dell'uso di tale espressione con un insieme di norme, ed allo stesso tempo che l'attribuzione di senso possa ridursi alla sola convinzione di aver attribuito un senso e di essere, di conseguenza, costretti ad agire in conformità ad esso (punto 2.).

In vari luoghi (Wittgenstein, [74, 73, 72]) Wittgenstein distingue due tipologie di asserzioni, per illustrare il modo in cui vengono utilizzate nozioni come “analogo”, “simile”, “identico”, ad esempio in [74]:

> *1)Descriviamo un certo disegno su della carta da parati, ad esempio, dicendo: ≪E' analogo a un altro così e così≫*
> *2)≪Questo è un caso analogo, non quello≫. [...]* (Wittgenstein, [74])

Cosa cambia? “*Nel primo caso [...] sto dicendo qualcosa che può risultare falso*” (Wittgenstein,[74]), nel secondo “*la risposta è [...]: ≪Dipende≫*” (Wittgenstein,[74]). Un altro esempio:

1) ≪*Questa figura ha tredici linee*≫



2) ≪*Questa figura ha tredici linee*≫(Wittgenstein, [74])

Nei casi di tipo 1) siamo portati a considerare l’asserzione come intesa a dirci qualcosa che sapremmo immediatamente, in virtù del contesto, come verificare o falsificare; ci viene data una informazione chiara, si tratta solo di vedere se è vera. Nei casi di tipo 2), invece, l’asserzione, secondo Wittgenstein, viene normalmente interpretata come intenta a mostrarci qualcosa circa l’uso che il parlante intende fare di una certa espressione, o di una certa rappresentazione: nell’esempio di tipo 1) è come se ci venisse detto: ≪Adotterò il termine “analogo” così e così≫, nel secondo ≪Adotterò questa figura come rappresentazione della formula $4\times3+1=13$≫. La distinzione tra i due tipi di asserzione, essendo di natura interpretativa, non può che essere di grado.

Il filosofo austriaco, come abbiamo già osservato, ritiene che, nel procedere lungo una dimostrazione, il matematico non faccia altro che affermare a ogni passo di inferenza la sua *decisione* di accettare quel passo come indubitabile, piuttosto che ricavare questa indubitabilità da una qualche forma di evidenza originaria, che non potrebbe svolgere alcun ruolo interattivo. Colui che afferma che, ad esempio, il pentagono regolare è costruibile con riga e compasso non sta dicendo di avere evidenza del fatto che una tale costruzione possa aver luogo, bensì sta dicendo che è in condizione di produrre qualcosa che ha deciso di considerare in ogni caso un pentagono regolare. Ci comunica la sua intenzione di accettare una tale costruzione come pentagono (si ricordi che tali intenzioni non possono avere alcun senso privato, ma sono a priori considerate pubblicamente manifestabili - anche se la loro attribuzione costituisce sempre un azzardo interpretativo).

> Se davvero abbiamo dimostrato che l’eptagono non può essere costruito [con riga e compasso], allora deve trattarsi di una dimostrazione che ci induca a rinunciare a ogni tentativo, il che è una faccenda empirica. Lo stesso dicasi della dimostrazione che una certa proposizione è indimostrabile. [...] Invece di dire che non è possibile tracciare una retta per tre punti qualsiasi, si potrebbe dire che non esiste una costruzione per i punti $\therefore$ analoga a $\underline{\ldots}$. Allo stesso modo, quando si dice che è impossibile costruire un eptagono, si sta affermando che non esiste in questo caso un analogo alla costruzione del pentagono. In ciascun caso, stiamo fornendo l’uso della parola “analogo”. (Wittgenstein, [74])

Questo ultimo caso, in particolare, è da confrontare con ≪Questo enunciato non è dimostrabile≫.

> *In questo caso sarebbe come descrivere il Polo Est. Il risultato della ricerca della costruzione è che uno scopre che il problema era privo di significato.* (Wittgenstein, [74])

Mi sembra di poter dire che le asserzioni del tipo 2) ricordano da vicino quelle che danno luogo alle *dispute normative*, quelle in cui è in questione la divergenza dell'interazione, in cui cioè l'interpretazione (l'attribuzione di pertinenza, e dunque di un comportamento) svolge un ruolo determinante. Le asserzioni del tipo 1) invece richiamano un'interpretazione già condivisa dagli interlocutori, si muovono cioè in un universo che potremmo descrivere, in un certo senso, come *già tipato*, quello delle *dispute valutative*, in cui la divergenza è stata preliminarmente bandita sulla base di un precedente accordo: il fatto che, nelle dispute valutative, la divergenza sia esclusa è stato stabilito a priori, dal momento che un comportamento è l'insieme di tutti i design polari a quelli nel comportamento duale.

Nell'ambito di una disputa valutativa, un giocatore è chiamato a riconoscere a ogni passo ciò che il suo avversario si aspetta da lui, proprio in quanto gli è avversario, ovvero in quanto si confrontano in un gioco le cui regole sono preliminarmente stabilite. In una disputa normativa, invece, il giocatore non è chiamato ad alcuna forma di riconoscimento: egli *sceglie*, a ogni sollecitazione, la risposta da dare, e con essa la sollecitazione con cui continuare l'interazione. E' il fatto di esser convenuti a un accordo a mostrare, infine, che una qualche forma di riconoscimento comune c'è stato.

Possiamo parafrasare così "alla Wittgenstein" la generazione di una disputa come un processo di reciproca *interpretazione* tra i giocatori, secondo l'analogia:

$$\begin{array}{rcl} \text{asserzione} & \approx & \text{design} \\ \text{senso dell'enunciato asserito} & \approx & \text{comportamento associato al design} \end{array} \tag{2.2.47}$$

(*i*) il giocatore P propone un'asserzione, ossia un design $\mathfrak{D}_0$ in base $\vdash \xi$ e suppone $\mathfrak{D}_0 \in \mathbf{G}$, per un certo comportamento $\mathbf{G}$ (questa sarà la sua *intenzione*, che non è caratterizzata da altro che da una certa disposizione a reagire e ad accettare ciò che gli viene replicato). P afferma così la sua decisione di non considerare pertinente una risposta che sia al di fuori di $\mathbf{G}^{\overset{|}{\sim}}$ (sebbene sarà lui a dover valutare se la risposta che otterrà sia effettivamente in $\mathbf{G}^{\overset{|}{\sim}}$). Possiamo assumere che $\mathfrak{D}_0$ corrisponda al design $\{\langle(\xi, I)\rangle\}$.

(*ii*) il suo avversario O interpreta l'asserzione $\mathfrak{D}_0$ come $\mathfrak{D}_0 \in \mathbf{H}$, per un certo $\mathbf{H}$, e risponde di conseguenza con una contro-asserzione (un design in base $\xi \vdash$) $\mathfrak{E}_0$, supponendo (questa sarà la sua intenzione) $\mathfrak{E}_0 \in \mathbf{H}^{\overset{|}{\sim}}$. O sta affermando la sua decisione di non considerare pertinente una ulteriore reazione da parte di P che non sia in $\mathbf{H}$. Assumiamo che $\mathfrak{E}_0 = \{\langle(\xi, J_1)\rangle, \ldots, \langle(\xi, J_n)\rangle\}$, con $J_i \in \mathcal{N}, 1 \leq i \leq n$.

(*iii*) Ha luogo il primo passo di interazione: P, che al momento gioca in base positiva, si rivolge a O, chiedendogli di scoprire la sua directory $\mathcal{N}$; se $I \in \mathcal{N}$, allora P formula la sua *ipotesi interpretativa* $\mathfrak{E} \in \mathbf{G}^{\downarrow\sim}$ e passa la mano all'avversario; O, a questo punto dovrà aggiornare il suo design, eliminando le cronache non scelte da P ed estendendo la cronaca da lui scelta; avremo dunque $\mathfrak{E}_1 = \{\langle(\xi, I), (\sigma, K)\rangle\}$; O continua la sua mano aggiornando il suo design, finchè non incontra un'azione nascosta (sicuramente positiva), ed a quel punto si rivolge a P, chedendogli di scoprire la sua directory... in generale avremo un processo di continuo aggiornamento dei $\mathfrak{D}_n, \mathfrak{E}_n$. Se invece $I \notin \mathcal{N}$, ovvero si ha immediata divergenza, entrambi i giocatori si rendono conto che $\mathbf{G} \neq \mathbf{H}$, ovvero che c'è un'incomprensione in atto.

(*iv*) Prima di ogni passo di interazione il processo interpretativo $(i) - (ii) - (iii)$ ha luogo.

Caso 1: a un certo punto uno dei due (ad esempio P) è costretto a usare il demone: l'interazione finisce, P riconosce la ragione di O (sulla base delle sue scelte interpretative) e O riconosce di aver avuto ragione su P (sulla base delle sue scelte interpretative). Ma è per questo dimostrato che $\mathbf{G} = \mathbf{H}$? Assolutamente no, e c'è solo un modo per scoprirlo: continuare a interagire, vale a dire, a discutere, con altri design, ben sapendo che, nella stragrande maggioranza dei casi, solo un numero infinito di dialoghi è sufficiente a dimostrare al di fuori di ogni dubbio la correttezza delle interpretazioni.

Caso 2: l'interazione sembra non finire più, i due contendenti decidono di fermarsi e concludono $\mathbf{G} \neq \mathbf{H}$: ≪E' inutile andare avanti, non ci stiamo capendo!≫. Anche in questo caso, per via dell'indecidibilità del problema della fermata, non c'è alcuna garanzia della conclusione interpretativa dei due, ossia che valga davvero $\mathbf{G} \neq \mathbf{H}$ (nè che davvero la loro interazione diverga!).

Questo schema, che abbozza la descrizione di una disputa normativa intesa come processo interpretativo, pur nella sua genericità, appare in accordo con entrambe le ipotesi 1. e 2. in §2.1.3 richiamate sopra: da una parte, la valutazione del rispetto delle regole da parte dell'avversario O non costituisce parte di un riconoscimento di P dell'aderenza di O a regole stabilite a priori; in effetti, un tale riconoscimento, che coincide con un il fatto che $\mathbf{G} = \mathbf{H}$, non può mai essere il prodotto di un insieme (finito) di interazioni. D'altra parte, che un certo design $\mathfrak{D}$ sia in un dato comportamento $\mathbf{G}$ è stabilito dall'insieme di *tutte* le dispute $[\mathfrak{D} \rightleftharpoons \mathfrak{E}]$, per $\mathfrak{E} \in \mathbf{G}^{\downarrow\sim}$, e non dipende quindi affatto dalle credenze, basate su una evidenza sempre parziale, che può farsi un giocatore.

Si noti che, qualora l'interazione converga, la disputa prodotta indurrà design *incarnati* nelle ipotesi interpretative dei due giocatori. Questa è un forte indizio procedurale a favore della tesi, qui sostenuta, secondo cui il processo (i)-(iv) possa davvero essere considerato un processo interpretativo, nel senso di selezione semiotica dell'essenza.

Il completamento normativo Questo modo di vedere le regole di inferenza, o meglio di ricostruire i processi interattivi che ne sono all'origine, non sembra peraltro andare incontro ai problemi connessi con quella che abbiamo chiamato “soggettività della sintassi”: in effetti, nel momento in cui la scelta di una sintassi logica non è più il presupposto per la formulazione della nostra teoria, la questione dell’incomparabilità di soggetto (sintassi, ovvero Π^1) e oggetto (semantica, ovvero Σ^1, vd.§1.1.3) è risolta osservando che possiamo pensare al soggetto come a un’etica, e all’oggetto come al suo biortogonale, ovvero al comportamento da essa indotto; si noti che, come mostrato in (Girard, [33]), possiamo riformulare la definizione del biortogonale di un’etica come una formula Σ^1 (dal momento che la quantificazione sui design non può essere rappresentata come una quantificazione numerica, essendo l’insieme dei design non numerabile):

$$\mathbf{E}^{\perp\perp} = \{\mathfrak{D} | \exists \mathfrak{D}' \in \mathbf{E}\ \mathfrak{D}' \preceq \mathfrak{D}\} \tag{2.2.48}$$

In analogia con quanto visto nel caso delle logiche leggere LLL e ELL, i “testimoni” dell’incompletezza, ovvero gli eventuali elementi di $\mathbf{E}^{\perp\perp} - \mathbf{E}$, sono tali che colui che, come il giustificazionista, ricorresse a una certa etica (una sintassi) per giustificare il proprio uso di un certo insieme di design, si ritroverebbe, *proprio in virtù dei criteri normativi che attribuisce a tali design*, a interagire e riconoscersi in accordo con design che la sua stessa procedura non potrebbe giustificare: possiamo in definitiva leggere nell’interazione “al di fuori delle regole” presentata in §2.1.4 un esempio in sostegno della *tesi di Wright* (vd. §2.1.3), ovvero della indipendenza della conoscenza che si ha del senso delle proprie asserzioni, rappresentata dall’etica costituita dalle regole di inferenza con cui il parlante giustificherebbe la sua pratica linguistica, e del senso stesso che con tali asserzioni viene espresso.

L’idea che sta alla base di queste considerazioni e quella secondo cui un’etica costituisce una rappresentazione delle regole che sono alla base di quello che un parlante già riconosce come una forma strutturata di accordo comune, per dirla con Wittgenstein, un *gioco linguistico*. Questa rappresentazione potrà allora manifestare limiti “soggettivi”, dando luogo a contesti in cui il senso espresso, ma mai interamente interiorizzato, dal parlante, porta quest’ultimo a considerare forme di accordo non previste. In definitiva, nel tentativo di servirci della ludica per elaborare una alternativa al “modello a binari”, queste osservazioni costituiscono un primo argomento (altri argomenti saranno discussi nel prossimo capitolo) contro la tesi di inferenzialità delle norme secondo cui le norme costitutive del senso linguistico si identificano con le regole adoperate per generare segni dotati di senso.

$$\text{regole} \xrightarrow{\text{determinano la}} \text{conoscenza del senso} \neq \text{senso espresso} \xleftarrow{\text{determinano il}} \text{norme} \tag{2.2.49}$$

Queste regole di inferenza, infatti, adoperate nell’ambito della procedura (soggettiva) di giustificazione, non corrispondono ad altro che a un modello idealizzato del gioco linguistico nel quale un parlante si trova sin dal principio coinvolto. E’ questo modello a guidarci, in caso di incomprensione, nel tentativo di risolvere l’impasse, attraverso l’applicazione di procedure come quelle descritte da Dummett e Prawitz o attraverso forme meno complesse come nel caso menzionato da Dummett (vd. §2.1.3) di incomprensione sul risultato di sette più cinque. Quello che l’incompletezza e l’incomprensione, sotto la forma di disputa normativa divergente da una parte, e gli argomenti di Wittgenstein sul "rule-following" dall'altra, ci spingono a concludere è allora che, in accordo con quanto sostenuto da Wright, il "modello a binari" può rivelarsi inadeguato ai fini esplicativi che si propone.

La diseguaglianza tra sintassi (Π^1) e semantica (Σ^1) ha così ormai perso il suo stato di paradosso, nel momento in cui si accetti che la sintassi a posteriori ci dà a accesso a un universo logico di per sè privo di regole di inferenza nel quale tuttavia possiamo assistere al costituirsi di norme; sono quest'ultime a rendere possibile la semiotizzazione dell'interazione, dando luogo a processi interpretativi come le dispute normative e valutative.

Tutte queste osservazioni, d'altra parte, lasciano completamente aperta la questione di come si costituiscano le regole stesse, o meglio, di cosa davvero costituisca una sintassi e caratterizzi al contempo, tanto la necessità del ricorso ad essa, quanto i limiti che un tale ricorso porta inevitabilmente con sè. Il tema della contemporanea indispensabilità e parzialità della sintassi, rispetto al quale le riflessioni sullo spazio e sul tempo in cui essa evolve sembrano promettere sviluppi interessanti, richiederà il superamento della stessa prospettiva della ludica, per via delle difficoltà nel trattare in essa la questione, che si è rivelata determinante in §2.1.4, delle regole esponenziali (sulle possibili estensioni esponenziali della ludica si vedano (Girard, [37]), (Maurel, [53]) e (Basaldella, Faggian, [5])).

2.2.3 Interferenza e completezza interna

Ci occuperemo adesso di come i comportamenti permettano di dimostrare la *completezza interna* delle costanti logiche di $MALL$, nella seguente forma:

Definizione 2.2.19 (completezza interna). *Un'etica* $\mathbf{E}$ *è* completa *se, per ogni* $\mathfrak{D} \in \mathbf{E}^{\perp\perp}$*, si ha* $|\mathfrak{D}|_{\mathbf{E}^{\perp\perp}} \in \mathbf{E}$.

L'idea sottostante è quella di considerare l'insieme delle derivazioni in un qualche sistema deduttivo di una formula A come un'etica $\mathbf{E}$; i contro-modelli di A corrisponderanno allora all'ortogonale $\mathbf{E}^{\perp}$ dell'etica, e dunque il biortogonale $\mathbf{E}^{\perp\perp}$ sarà l'insieme di ciò che è validato da tutti i modelli di A.

D'altra parte questa forma di completezza, che non è altro che la realizzazione nella sintassi a posteriori di ciò di cui il teorema di completezza 1.2.1 (pag. 46) dimostrato con l'analisi canonica ci appare ora come una prima grossolana approssimazione, è un risultato più forte di quello ottenuto con la semantica dei modelli: infatti si tratta di un risultato *interno alle stesse norme* indotte dall'etica, dal quale i risultati classici di completezza sono derivabili. Del resto, a sancire la correttezza del presente approccio sta un *teorema di completezza piena*, che non riporteremo, ma che può essere trovato in (Girard, [33]), e che possiamo formulare, modulo alcuni dettagli tecnici qui tralasciati, come segue (supponendo di aver associato a ogni formula A del linguaggio di $MALL$ un comportamento $\mathbf{A}$):

Teorema 2.2.7 (correttezza e completezza piena della ludica)**. correttezza** *Se π è una derivazione in MALL di una formula A, allora esiste un design* vincente $\mathfrak{D}_\pi \in \mathbf{A}$.

completezza *Se A è una formula chiusa del linguaggio di MALL e se $\mathfrak{D} \in \mathbf{A}$ è un design* vincente*, allora $|\mathfrak{D}|_{\mathbf{A}} = \mathfrak{D}_\pi$, ovvero è l'interpretazione di una derivazione π in MALL di A.*

Il caso additivo Nel precedente paragrafo, abbiamo osservato come la ludica interpreti le operazioni logiche come delle azioni sui loci, e come, in particolare, distingua azioni additive e moltiplicative sulla base di requisiti di coerenza tra le cronache: la natura moltiplicativa o additiva di un'azione non può essere determinata se non andando a vedere le cronache in cui questa azione occorre, e verificando così che i fuochi delle azioni di queste cronache rispettino il requisito moltiplicativo, ossia l'*estraneità* reciproca, oppure quello additivo, ossia la *sovrapposizione*.

Per caratterizzare al meglio questi aspetti, ci serviremo dei seguenti design (rappresentati, per semplicità, nella versione *dessins*):

$$\mathfrak{Ram}_{(\lambda,I)} \qquad \cfrac{\dots \quad \cfrac{\dots \quad \cfrac{}{\vdash \lambda * i * J}\maltese \quad \dots}{\lambda * i \vdash}(-,\lambda * i, \wp_f(\mathbb{N})) \quad \dots}{\vdash \Lambda}(+,\lambda,I) \tag{2.2.50}$$

$$\mathfrak{Dir}_{\mathcal{N}} \qquad \cfrac{\dots \quad \cfrac{}{\vdash I}\maltese \quad \dots}{\langle\rangle \vdash}(\langle\rangle,\mathcal{N}) \tag{2.2.51}$$

Un caso particolare di $\mathfrak{Dir}_{\mathcal{N}}$ è il *demone negativo* $\mathfrak{Dai}^-$:

$$\mathfrak{Dai}^- \qquad \cfrac{\dots \quad \cfrac{}{\vdash \xi * I, \Lambda}\maltese \quad \dots}{\xi \vdash \Lambda}(\xi, \wp_f(\mathbb{N})) \tag{2.2.52}$$

Definizione 2.2.20. *Se* **G** *è un comportamento positivo (ossia in base positiva), la sua* directory *è l'insieme* $\P\mathbf{G} := \{I|\mathfrak{Ram}_{(\langle\rangle,I)} \in \mathbf{G}\}$*. Se* **G** *è negativo, allora la sua* directory *è* $\P\mathbf{G} = \mathcal{N}$ *per quell'unico* $\mathcal{N}$ *tale che l'incarnazione* $|\mathfrak{Dai}^-|_{\mathbf{G}}$ *è uguale a* $\mathfrak{Dir}_{\mathcal{N}}$*, ovvero tale che si abbia* $|\mathfrak{Dai}^-|_{\mathbf{G}} = \mathfrak{Dir}_{\P\mathbf{G}}$.

Il senso di questa definizione è dato dalla seguente:

Proposizione 2.2.8 (caratterizzazione delle directory)**.** *Se* **G** *è positivo, allora* $\P\mathbf{G}$ *è l'insieme degli I che occorrono nella prima azione di ogni design* $\mathfrak{D} \in \mathbf{G}$*. Se* **G** *è negativo, allora* $\P\mathbf{G}$ *è la directory che occorre nella prima regola dell'incarnazione* $|\mathfrak{D}|$ *di ogni design* $\mathfrak{D} \in \mathbf{G}$*.*

Dimostrazione. **G positivo** Se $(+,\langle\rangle,I)$ è la prima azione di un design $\mathfrak{D} \in \mathbf{G}$, allora si ha $\mathfrak{D} \preceq \mathfrak{Ram}_{(\langle\rangle,I)}$, da cui la tesi.

G negativo In primo luogo, si ha che $\mathfrak{E} \preceq \mathfrak{F}$ vale se e solo se vale $|\mathfrak{E}_{\mathbf{G}}| \preceq |\mathfrak{F}_{\mathbf{G}}|$. Dal fatto che $|\mathfrak{Dai}^-| : \mathbf{G} = \mathfrak{Dir}_{\mathcal{N}}$ segue che $I \in \mathcal{N}$ se e solo se I occorre nella prima azione di una cronaca $\mathfrak{c} \in |\mathfrak{D}|_{\mathbf{G}}$, per ogni design $\mathcal{D} \in \mathbf{G}$; dall'osservazione iniziale segue allora la tesi.

$\square$

Dalla proposizione precedente segue immediatamente $\P\mathbf{G} = \P\mathbf{G}^{\sim\downarrow}$.

Definiamo la versione "locativa" delle operazioni additive come segue:

Definizione 2.2.21 (additivi locativi)**.** *Sia $\mathbf{G}_k$, $k \in K$, una famiglia di comportamenti nella stessa base; allora definiamo i due seguenti comportamenti:*

$$\begin{aligned} ⩀_k \mathbf{G}_k &:= \bigcap_k \mathbf{G}_k \\ \uplus_k \mathbf{G}_k &:= (\bigcup_k \mathbf{G}_k)^{\sim\downarrow\sim\downarrow} \end{aligned} \tag{2.2.53}$$

Proposizione 2.2.9 (proprietà degli additivi locativi)**.** (i) *$⩀$ e $\uplus$ sono commutativi ed associativi, con elementi neutri rispettivamente $\top$ e $\{\mathfrak{Dai}\}$;*

(ii) $|\mathfrak{D}|_{⩀_k \mathbf{G}_k} = \bigcup_k |\mathfrak{D}|_{\mathbf{G}_k}$*;*

(iii) *Se i $\mathbf{G}_k$ sono positivi, $\P$ è covariante, ovvero:*

$$\begin{aligned} \P ⩀_k \mathbf{G}_k &= \bigcap_k \P\mathbf{G}_k \\ \P \uplus_k \mathbf{G}_k &= \bigcup_k \P\mathbf{G}_k \end{aligned} \tag{2.2.54}$$

(iv) *Se i $\mathbf{G}_k$ sono negativi, $\P$ è controvariante:*

$$\begin{aligned} \P ⩀_k \mathbf{G}_k &= \bigcup_k \P\mathbf{G}_k \\ \P \uplus_k \mathbf{G}_k &= \bigcap_k \P\mathbf{G}_k \end{aligned} \tag{2.2.55}$$

Dimostrazione. (i) Si tratta di semplici (ma lunghe) verifiche.

(ii) Se $\mathfrak{E} \in \bigcup_k \mathbf{G}_k^{\sim\downarrow}$, si ha senz'altro $[\![\mathfrak{E}, \bigcup_k |\mathfrak{D}|_{\mathbf{G}_k}]\!] = \mathfrak{Dai}$, e dunque $\bigcup_k |\mathfrak{D}|_{\mathbf{G}_k} \in \bigcap_k \mathbf{G}_k$, da cui $|\mathfrak{D}|_{⩀_k \mathbf{G}_k} \subset \bigcup_k |\mathfrak{D}|_{\mathbf{G}_k}$. Per il viceversa, si osservi che $\bigcup_k |\mathfrak{D}|_{\mathbf{G}_k} \subset |\mathfrak{D}|_{\bigcup_k \mathbf{G}_k} \subset |\mathfrak{D}|_{⩀_k \mathbf{G}_k}$, in cui l'ultimo passaggio non è altro che la controvarianza dell'incarnazione.

(iii) $\P ⩀_k \mathbf{G}_k = \{I | \forall k \in K\ \mathfrak{Ram}_{(\langle\rangle, I)} \in \mathbf{G}_k\} = \bigcap_k \{I | \mathfrak{Ram}_{(\langle\rangle, I)} \in \mathbf{G}_k\} = \bigcap_k \P\mathbf{G}_k$ e $\P \uplus_k \mathbf{G}_k = \{I | \exists k \in K\ \mathfrak{Ram}_{(\langle\rangle, I)} \in \mathbf{G}_k\} = \bigcup_k \{I | \mathfrak{Ram}_{(\langle\rangle, I)} \in \mathbf{G}_k\} = \bigcup_k \P\mathbf{G}_k$.

(iv) Conseguenza immediata di (iii), per via della dualità e del fatto che, per ogni $\mathbf{G}$, $\P\mathbf{G} = \P(\mathbf{G}^{\sim\downarrow})$.

$\square$

Una componente fondamentale per la costruzione delle costanti logiche è l'eliminazione delle *interferenze* rese possibili dalla distinzione, indotta dall'approccio locativo, di *identità* e *isomorfismo* (vd. §2.2.1). Si è già parlato di interferenza in §1.1.4, in relazione al modo con cui i modelli standard "tradivano" le intenzioni delle teorie di cui erano pur sempre modelli, ed alla questione di come le "stranezze" del contesto potessero avere conseguenze sulla valutazione di semplici asserzioni di tipo percettivo. In quei casi avevano interpretato queste forme di interferenza come riguardanti la relazione semiotica istituita tra un segno e la sua denotazione e rivelate dall'esistenza di contesti "non standard" nei quali tale relazione è violata a causa della "soggettività" delle sintassi cui tale segno appartiene.

La relazione semiotica che ci ha occupato nel corso del presente capitolo è invece quella che si istituisce tra un segno e una essenza; l'approccio locativo, del resto, si caratterizza per la possibilità di ammettere interferenze già discusse come la 2.2.4 (pag. 133):

$$\sharp(a \cup b) \leq \sharp(a) + \sharp(b) \tag{2.2.4}$$

La scoperta e la soluzione (attraverso strumenti e artifici come le delocalizzazioni) di quelle che possiamo considerare interferenze tra segno ed essenza, e dunque la ricostruzione della relazione normativa tra questi, è il tratto più caratteristico di quella svolta morfologica che ha inizio con la ludica (e che darà i suoi massimi frutti nella Geometria dell'Interazione, che sarà discussa fra due capitoli). In particolare, in ludica, parleremo di interferenza tutte le volte in cui essenze distinte (formule distinte), si ritrovano a condividere un qualche locus: questo infatti compromette il rispetto, da parte dei loci, delle loro rispettive normatività.

L'eliminazione delle interferenze, nel caso additivo, può essere espressa attraverso le proprietà delle directory:

Definizione 2.2.22 (comportamenti alieni)**.** *Due comportamenti* $\mathbf{G}, \mathbf{H}$*, della stessa polarità, sono* alieni *quando* $\P\mathbf{G} \cap \P\mathbf{H} = \emptyset$*.*

Lo strumento tipico, e già discusso, per ottenere comportamenti alieni sono le delocalizzazioni:

Definizione 2.2.23 (delocalizzazione di design e comportamenti)**.** *Sia* $\mathfrak{c} \in \mathfrak{D} \in \mathbf{G}$ *e* φ *una delocalizzazione. Definiamo induttivamente le seguenti delocalizzazioni:*

($\varphi(\mathfrak{c})$) *sia* $\mathfrak{c} = \langle \ldots (\sigma_p, I_p) \ldots \rangle$ *in base* $\vdash \xi$ *(o* $\xi \vdash$*); allora* $\varphi(\mathfrak{c})$ *è la seguente cronaca in base* $\vdash \varphi(\xi)$ *(o* $\varphi(\xi) \vdash$*):* $\varphi(\mathfrak{c}) = \langle \ldots, (\varphi(\sigma_p), \varphi_{\sigma_p}(I_p)), \ldots \rangle$*. Nel caso in cui* $\mathfrak{c} = \mathfrak{d} * \maltese$*, ossia termini con un demone, poniamo* $\varphi(\mathfrak{c}) = \varphi(\mathfrak{d}) * \maltese$*;*

($\varphi(\mathfrak{D})$) *Poniamo semplicemente* $\varphi(\mathfrak{D}) = \{\varphi(\mathfrak{c}) | \mathfrak{c} \in \mathfrak{D}\}$*;*

($\varphi(\mathbf{G})$) $\varphi(\mathbf{G}) = \{\varphi(\mathfrak{D}) | \mathfrak{D} \in \mathbf{G}\}$.

Attraverso le delocalizzazioni, possiamo dunque recuperare la natura non locativa, categoriale, delle costanti logiche di $MALL$ (una natura che Girard chiama provocatoriamente "spirituale"): dati due comportamenti $\mathbf{G}, \mathbf{H}$, possiamo ad esempio trovare delocalizzazioni φ, θ tali che, $\P\varphi(\mathbf{G}) \subset 2\mathbb{N}$ e $\P\theta(\mathbf{H}) \subset 2\mathbb{N}+1$, ossia tali che $\varphi(\mathbf{G})$ e $\theta(\mathbf{H})$ siano alieni.

Definizione 2.2.24 (additivi "spirituali")**.** *Siano* $\mathbf{G}, \mathbf{H}$ *comportamenti alieni sulla stessa base; allora* $\mathbf{G} \,\&\, \mathbf{H} := \mathbf{G} \Cap \mathbf{H}$ *e* $\mathbf{G} \oplus \mathbf{H} := \mathbf{G} \uplus \mathbf{H}$.

Teorema 2.2.10 (completezza interna del &)**.** $|(\mathbf{G} \,\&\, \mathbf{H})^{\overset{\downarrow}{\sim}\overset{\downarrow}{\sim}}| \subseteq \mathbf{G} \,\&\, \mathbf{H}$.

Dimostrazione. In realtà, dimostreremo un risultato diverso, da cui il teorema è immediatamente deducibile, chiamato in (Girard, [33]) *mistero dell'incarnazione*:

$$|\mathbf{G} \,\&\, \mathbf{H}| = |\mathbf{G}| \times |\mathbf{H}| \tag{2.2.56}$$

Si noti che, essendo $\P\mathbf{G} \cap \P\mathbf{H} = \emptyset$, possiamo usare la versione locativa del prodotto cartesiano, ossia il prodotto $\boxtimes$. Sia dunque $\mathfrak{D} \in |\mathbf{G} \,\&\, \mathbf{H}|$; allora $|\mathfrak{D}|_{\mathbf{G}}, |\mathfrak{D}|_{\mathbf{H}} \subset \mathfrak{D}$, da cui $|\mathfrak{D}|_{\mathbf{G}} \cup |\mathfrak{D}|_{\mathbf{H}} \subset \mathfrak{D}$, e dunque $\mathfrak{D} \in |\mathbf{G}| \boxtimes |\mathbf{H}|$.

Per il viceversa, si osservi anzitutto che se $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ sono incarnazioni rispettivamente in $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$, allora sono aliene: se infatti i due comportamenti sono positivi, allora si verifica facilmente che sono alieni se e solo se $\mathbf{G} \cap \mathbf{H} = \mathbf{0}$; se sono negativi, sono alieni se e solo se, per ogni $\mathfrak{G} \in \mathbf{G}, \mathfrak{H} \in \mathbf{H}$, si ha $|\mathfrak{G}|_{\mathbf{G}} \cap |\mathfrak{H}|_{\mathbf{H}} = \emptyset$.

Ne concludiamo che $\mathfrak{D} := \mathfrak{E} \cup \mathfrak{F} \in \mathbf{G} \cap \mathbf{H}$. Supponiamo che $\mathfrak{D} \notin |\mathbf{G} \,\&\, \mathbf{H}|$; ma allora avremmo, per opportuni $\mathfrak{E}'$ e $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{E}' \cup \mathfrak{F}' \subsetneq \mathfrak{D}$, e dunque almeno uno tra $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ non sarebbe un'incarnazione.

□

La dimostrazione del *mistero della incarnazione* 2.2.10 fa uso dell'isomorfismo $A \boxtimes B \simeq A \times B$ che ha senso solo nel caso in cui si abbia $\forall x \in A, \forall y \in B\ x \cap y = \emptyset$, ovvero solo nel caso "spirituale" ammesso dal teorema. Questo teorema è dunque un ottimo esempio per verificare la rilevanza normativa del vincolo sulle directory, ossia della eliminazione delle interferenze nel caso additivo. Si pensi ad esempio al caso $B = A$, ovvero alla apparentemente inquietante equazione, che riassume e sintetizza tutta la questione riguardante le "occorrenze di formula":

$$|A \cap A| \simeq |A| \times |A| \tag{2.2.57}$$

la quale certamente non può essere una identità, ma solo un isomorfismo, a meno che non si adoperi una delocalizzazione "ad hoc" φ:

$$|A \cap \varphi(A)| = |A| \times |\varphi(A)| \tag{2.2.58}$$

Il mistero dell'incarnazione ci permette inoltre di cogliere un aspetto importante della concezione semiotica che stiamo sviluppando attorno alle nozioni centrali della ludica: in effetti, esso sostituisce all'idea che avere un segno per $\mathbf{G} \,\&\, \mathbf{H}$ corrisponda ad avere, di fatto, due segni, uno per $\mathbf{G}$ e l'altro per $\mathbf{H}$, l'idea che un segno per il prodotto non sia altro che un unico segno $\mathfrak{D}$ che, *a seconda del contesto può essere interpretato (e dunque incarnato) come* $|\mathfrak{D}|_{\mathbf{G}}$ *o* $|\mathfrak{D}|_{\mathbf{H}}$. Come era già emerso nella discussione delle dispute "wittgensteiniane", il processo di interazione-interpretazione permette di associare a uno stesso segno essenze diverse, in funzione del contesto.

Locatività e incompletezza La questione delle interferenze risulta ancora più decisiva nel caso duale, ovvero del $\oplus$:

Teorema 2.2.11 (completezza interna del $\oplus$)**.** $\mathbf{G} \oplus \mathbf{H} = \mathbf{G} \cup \mathbf{H}$.

Dimostrazione. Se $\mathfrak{D} \in (\mathbf{G} \cup \mathbf{H})^{\overset{|\,|}{\sim\sim}} - (\mathbf{G} \cup \mathbf{H})$, allora esistono $\mathfrak{E} \in \mathbf{G}^{\overset{|}{\sim}}, \mathfrak{F} \in \mathbf{H}^{\overset{|}{\sim}}$, che possiamo considerare incarnati senza perdita di generalità, tali che $\mathfrak{D}$ non è polare a nessuno dei due. Per il teorema 2.2.10, allora, $\mathfrak{E} \cup \mathfrak{F} \in \mathbf{G}^{\overset{|}{\sim}} \cap \mathbf{H}^{\overset{|}{\sim}}$ e $[\![\mathfrak{D}, \mathfrak{E} \cup \mathfrak{F}]\!] = \mathfrak{Fid}$, il che è assurdo.

$\square$

E' interessante osservare più da vicino il fallimento della completezza interna nel caso non alieno, ovvero nel caso generale di $\mathbf{G} \cup \mathbf{H}$. Supponiamo infatti che $I \in \P\mathbf{G} \cap \P\mathbf{H}$. Costruiremo esplicitamente un design $\mathfrak{D}$ che sta nel biortogonale di $\mathbf{G} \cup \mathbf{H}$ ma non in $\mathbf{G} \cup \mathbf{H}$. La ramificazione I, potremmo dire, ci permette di raggiungere tanto i design in $\mathbf{G}$, quanto quelli in $\mathbf{H}$. Consideriamo il seguente esempio:

$$\mathfrak{D}_0 \in \mathbf{G} \qquad \dfrac{\dfrac{}{(\xi * 1, I)}\maltese \quad \dfrac{}{(\xi * 1, J)}\maltese}{(\xi, \{1\})} \qquad\qquad \mathfrak{D}_1 \in \mathbf{H} \qquad \dfrac{\dfrac{}{(\xi * 1, J)}\maltese \quad \dfrac{}{(\xi * 1, K)}\maltese}{(\xi, \{1\})} \tag{2.2.59}$$

in cui $\{1\} \in \P\mathbf{G} \cap \P\mathbf{H}$ e i due design $\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_1$ sono per assunzione incarnati nei loro rispettivi comportamenti. Il generico elemento di $(\mathbf{G} \cup \mathbf{H})^{\overset{|}{\sim}} = \mathbf{G}^{\overset{|}{\sim}} \cap \mathbf{H}^{\overset{|}{\sim}}$ è il seguente:

$$\mathfrak{E} \in \mathbf{G}^{\overset{|}{\sim}} \cap \mathbf{H}^{\overset{|}{\sim}} \qquad \dfrac{\dfrac{}{(\xi * 1, J)}}{(\xi, \{1\})} \tag{2.2.60}$$

Si verifica allora che $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_0 \cap \mathfrak{D}_1$ è un design tale che $\mathfrak{D} \overset{|}{\sim} \mathfrak{E}$, da cui $\mathfrak{D} \in (\mathbf{G} \cup \mathbf{H})^{\overset{|\,|}{\sim\sim}}$. Si osservi in particolare che $|\mathfrak{D}|_{(\mathbf{G} \cup \mathbf{H})^{\overset{|\,|}{\sim\sim}}} = \mathfrak{D}$. D'altra parte, sicuramente si ha $\mathfrak{D} \notin \mathbf{G}, \mathbf{H}$: basta infatti osservare che, dati i seguenti design:

$$\mathfrak{D}_I \qquad \dfrac{\dfrac{}{(\xi * 1, I)}\maltese}{(\xi, \{1\})} \qquad\qquad \mathfrak{D}_K \qquad \dfrac{\dfrac{}{(\xi * 1, K)}\maltese}{(\xi, \{1\})} \tag{2.2.61}$$

si ha (essendo $\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_1$ incarnati) che $\mathfrak{D}_I \in \mathbf{G}^{\overset{|}{\sim}}, \mathfrak{D}_K \in \mathbf{H}^{\overset{|}{\sim}}$, ma sicuramente non vale $\mathfrak{D} \overset{|}{\sim} \mathfrak{D}_I$ nè $\mathfrak{D} \overset{|}{\sim} \mathfrak{D}_K$ (si noti che non si ha nemmeno $\mathfrak{D}_I \cup \mathfrak{D}_K \in \mathbf{G}^{\overset{|}{\sim}} \cap \mathbf{H}^{\overset{|}{\sim}}$). Ne concludiamo che $\mathfrak{D} \in (\mathbf{G} \cup \mathbf{H})^{\overset{|\,|}{\sim\sim}} - \mathbf{G} \cup \mathbf{H}$.

Questo argomento si estende immediatamente al caso di unioni arbitrarie:

Definizione 2.2.25 (quantificatori locativi)**.** *Sia* $(\mathbf{G}_d)_{d \in \mathbb{D}}$ *una famiglia di comportamenti della stessa polarità, indiciata da un insieme* $\mathbb{D}$ *arbitrario. Allora definiamo i* *seguenti comportamenti:*

$$\begin{aligned} \forall d \in \mathbb{D}\ \mathbf{G}_d &:= \bigcap_{d\in\mathbb{D}} \mathbf{G}_d \\ \exists d \in \mathbb{D}\ \mathbf{G}_d &:= (\bigcup_{d\in\mathbb{D}} \mathbf{G}_d)^{\perp\perp} \end{aligned} \tag{2.2.62}$$

I quantificatori locativi ereditano le loro proprietà, comprese completezza e incompletezza, dalle operazioni additive. In particolare, l'argomento di incompletezza mostrato poco sopra per l'unione diventa adesso niente meno che la versione locativa della Σ^1-incompletezza: l'esempio più naturale è quello di una ramificazione $I \in \bigcap_{d\in\mathbb{D}} \P\mathbf{G}_d$, la quale induce un design $\mathfrak{D} = \bigcap_{d\in\mathbb{D}} \mathfrak{D}_d$, dati i design $\mathfrak{D}_d \in \mathbf{G}_d$ (nel caso di $\mathbb{D}$ infinito, adoperiamo l'assioma di scelta) che non appartiene all'unione $\bigcup_{d\in\mathbb{D}} \mathbf{G}_d$, ma solo al suo biortogonale. Se pensiamo a $\mathcal{N}$ come a una via di accesso a ognuno dei $\mathbf{G}_d$, possiamo vedere nella ricerca della sua esistenza una specie di diagonalizzazione alla Cantor; in definitiva *l'incompletezza, da un punto di vista locativo, si manifesta come una complessa forma di interferenza, possibile, come abbiamo visto, già nel caso in cui $\sharp\mathbb{D} \geq 2$ (e dunque radicalmente indipendente da questioni aritmetiche*).

Il caso moltiplicativo Concludiamo la trattazione della completezza interna con il caso, un po' più tecnico da dimostrare, delle costanti moltiplicative. Definiamo anzitutto l'operazione moltiplicativa fondamentale:

Definizione 2.2.26 (prodotto tensoriale di design)**.** *Siano $\mathfrak{D}, \mathfrak{E}$ design positivi; il prodotto tensoriale $\mathfrak{D} \otimes \mathfrak{E}$ è il design definito come segue:*

- *se uno dei due design è un demone, allora $\mathfrak{D} \otimes \mathfrak{E} = \mathfrak{Dai}$;*
- *siano altrimenti $(\langle\rangle, I), (\langle\rangle, J)$ le prime azioni di $\mathfrak{D}, \mathfrak{E}$; se $I \cap J \neq \emptyset$, allora $\mathfrak{D} \otimes \mathfrak{E} = \mathfrak{Dai}$; altrimenti $\mathfrak{D} \otimes \mathfrak{E} = \mathfrak{D}' \cup \mathfrak{E}'$, dove $\mathfrak{D}', \mathfrak{E}'$ sono il risultato della sostituzione in $\mathfrak{D}, \mathfrak{E}$, delle azioni $(\langle\rangle, I), (\langle\rangle, J)$ con l'azione $(\langle\rangle, I \cup J)$.*

In quanto segue adotteremo per semplicità la convenzione per cui ogni azione negativa ha come directory la directory più ampia possibile, ovvero $\wp_f(\mathbb{N})$; lasceremo cioè al positivo ogni potere di scelta, relegando il negativo alla pura passività.

Proposizione 2.2.12. *Siano $\mathfrak{F}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}$ design, il primo negativo, gli altri positivi. Allora esiste un unico design negativo $(\mathfrak{F})\mathfrak{E}$ tale che:*

$$\ll \mathfrak{F}|\mathfrak{D} \otimes \mathfrak{E} \gg = \ll (\mathfrak{F})\mathfrak{D}|\mathfrak{E} \gg \tag{2.2.63}$$

Dimostrazione. Se $\mathfrak{D}$ è un demone, allora $(\mathfrak{F})\mathfrak{E} = \mathfrak{Dai}^-$. Altrimenti, sia $(+, \langle\rangle, I)$ la prima azione di $\mathfrak{D}$ e $\mathfrak{D}_i$ i sotto-design di $\mathfrak{D}$ in base $i \vdash$, per ogni $i \in I$. D'altra parte $\mathfrak{F}$ ammette, per ogni $J \in \mathcal{N}$, dove $(-, \langle\rangle, \mathcal{N})$ è la sua prima regola, un sotto-design $\mathfrak{F}_J$ in base $\vdash J$. Definiamo allora, per ogni ramificazione K, $(\mathfrak{F})\mathfrak{D}_K$ come segue:

- se $I \cap K = \emptyset$, si può formare una rete $\mathfrak{R}$ di base $\vdash K$ tra $\mathfrak{F}_{I\cup K}$ e i $\mathfrak{D}_i$; $(\mathfrak{F})\mathfrak{D}_K$ è allora definito come $[\![\mathfrak{R}]\!]$:
- se $I \cap K \neq \emptyset$, allora poniamo $(\mathfrak{F})\mathfrak{D}_K := \mathfrak{Dai}$.

L'unicità di $(\mathfrak{F})\mathfrak{D}_K$ è un corollario del teorema C.0.5 di separazione (vd. §C). □

Proposizione 2.2.13 (proprietà del prodotto tensoriale)**.** (i) *$\otimes$ è commutativo, associativo, con elemento neutro il design $\mathfrak{Bomb}$:*

$$\mathfrak{Bomb} \qquad \frac{}{\vdash \xi}\,(+,\xi,\emptyset) \tag{2.2.64}$$

(ii) *$\mathfrak{F} \overset{\perp}{\sim} \mathfrak{D} \Leftrightarrow \langle(\langle\rangle,\emptyset)\rangle \in (\mathfrak{F})\mathfrak{A}$;*

(iii) *$((\mathfrak{F})\mathfrak{D})\mathfrak{E} = ((\mathfrak{F})\mathfrak{E})\mathfrak{D} = (\mathfrak{F})(\mathfrak{E} \otimes \mathfrak{D}) = (\mathfrak{F})(\mathfrak{D} \otimes \mathfrak{E})$.*

Dimostrazione. La (i) è una semplice verifica, mentre le (ii) e (iii) sono una diretta conseguenza della procedura di normalizazzione delle reti (tanto di *dessins* quanto di *desseins*). □

Definizione 2.2.27 (operazioni moltiplicative)**.** *Se $\mathbf{G}, \mathbf{H}$ sono comportamenti positivi,*

$$\mathbf{G} \otimes \mathbf{H} := \{\mathfrak{D} \otimes \mathfrak{E} | \mathfrak{D} \in \mathbf{G}, \mathfrak{E} \in \mathbf{H}\}^{\overset{\perp}{\sim}\overset{\perp}{\sim}} \tag{2.2.65}$$

Se $\mathbf{G}, \mathbf{H}$ sono comportamenti negativi,

$$\mathbf{G} \parr \mathbf{H} := \{\mathfrak{D} \otimes \mathfrak{E} | \mathfrak{D} \in \mathbf{G}^{\overset{\perp}{\sim}}, \mathfrak{E} \in \mathbf{H}^{\overset{\perp}{\sim}}\}^{\overset{\perp}{\sim}} \tag{2.2.66}$$

Possiamo a questo punto verificare che le operazioni definite soddisfano tutte le proprietà che ci aspettiamo:

Proposizione 2.2.14 (proprietà delle operazioni moltiplicative)**.** (i) *$\otimes$ è commutativo, associativo, con elemento neutro $\mathbf{1} := \{\mathfrak{Bomb}\}^{\overset{\perp}{\sim}\overset{\perp}{\sim}}$;*

(ii) *$\parr$ è commutativo, associativo, con elemento neutro $\perp := \{\mathfrak{Bomb}^-\}^{\overset{\perp}{\sim}\overset{\perp}{\sim}}$, dove $\mathfrak{Bomb}^-$ è il seguente design:*

$$\mathfrak{Bomb}^- \qquad \frac{\frac{}{\vdash}\,\maltese}{\langle\rangle \vdash}\,(\langle\rangle,\{\emptyset\}) \tag{2.2.67}$$

(iii) *Se $\mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{I}$ sono comportamenti positivi, si ha*

$$\mathbf{G} \otimes (\mathbf{H} \uplus \mathbf{I}) = (\mathbf{G} \otimes \mathbf{H}) \uplus (\mathbf{G} \otimes \mathbf{H}) \tag{2.2.68}$$

(iv) *Se $\mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{I}$ sono comportamenti negativi, si ha*

$$\mathbf{G} \parr (\mathbf{H} \Cap \mathbf{I}) = (\mathbf{G} \parr \mathbf{H}) \Cap (\mathbf{G} \parr \mathbf{H}) \tag{2.2.69}$$

Immediata conseguenza delle definizioni e delle proprietà del prodotto tensoriale è la seguente:

Teorema 2.2.15 (completezza interna del $\parr$)**.** *Se* $\mathbf{G}$ *è positivo e* $\mathbf{H}$ *è negativo,*

$$\mathfrak{F} \in \mathbf{G} \multimap \mathbf{H} := \mathbf{G}^{\overset{\downarrow}{\sim}} \parr \mathbf{H} \Leftrightarrow \forall \mathfrak{D} \in \mathfrak{G}\ (\mathfrak{F})\mathfrak{D} \in \mathbf{H} \tag{2.2.70}$$

D'altra parte, la completezza di $\otimes$ richiede qualche sforzo in più:

Definizione 2.2.28 (riserva)**.** *La* riserva *di un comportamento* $\mathbf{G}$ *è definita come* $\S\mathbf{G} := \bigcup \P\mathbf{G}$*. Più in generale, una riserva* X *è un insieme di bias.*

Definizione 2.2.29 (proiezione di un design su una riserva)**.** *Sia* X *una riserva e sia* $\mathfrak{D}$ *un design positivo la cui prima azione è* $(\langle\rangle, I)$*; allora* $\mathfrak{D}$ *si scrive unicamente come* $\mathfrak{D}' \otimes \mathfrak{D}''$*, con* $\mathfrak{D}'$ *avente come prima regola* $(\langle\rangle, I \cap X)$ *e* $\mathfrak{D}''$ *avente come prima regola* $(\langle\rangle, I - X)$*.*

Chiamiamo allora $\mathfrak{D}'$*, scritto,* $\mathfrak{D} \upharpoonright X$*,* proiezione di $\mathfrak{D}$ su X*.*

Il lemma decisivo per la completezza del tensore è il seguente:

Lemma 2.2.16. *Sia* $\mathbf{E}$ *un'etica. Se* $\sharp\P\mathbf{E} = 1$*, allora si ha, per ogni riserva* X*,* $(\mathbf{E} \upharpoonright X)^{\overset{\downarrow\downarrow}{\sim\sim}} = (\mathbf{E})^{\overset{\downarrow\downarrow}{\sim\sim}} \upharpoonright X$ *(dove* $\mathbf{E} \upharpoonright X := \{\mathfrak{D} \upharpoonright X | \mathfrak{D} \in \mathbf{E}\}$*).*

Dimostrazione. Sia $(\langle\rangle, K)$ la prima azione di $\mathbf{E}$.

$(\mathbf{E})^{\overset{\downarrow\downarrow}{\sim\sim}} \upharpoonright X \subset (\mathbf{E} \upharpoonright X)^{\overset{\downarrow\downarrow}{\sim\sim}}$: Sia $\mathfrak{F} \in (\mathbf{E} \upharpoonright X)^{\overset{\downarrow}{\sim}}$; consideriamo la sua incarnazione $|\mathfrak{F}|_{\mathbf{E}}$, possiamo estendere la sua ultima regola $(\langle\rangle, K \cap X)$ a $(\langle\rangle, K)$, ottenendo il design $\mathfrak{F}'$. Se $\mathfrak{D} \in \mathbf{E}$, allora $[\![(\mathfrak{D} \upharpoonright X), \mathfrak{F}']\!] = [\![\mathfrak{D}, \mathfrak{F}]\!]$, da cui concludiamo $\mathfrak{F}' \in \mathbf{E}^{\overset{\downarrow}{\sim}}$. Se dunque assumiamo $\mathfrak{D} \in \mathbf{E}^{\overset{\downarrow\downarrow}{\sim\sim}}$, otteniamo lo stesso $[\![(\mathfrak{D} \upharpoonright X), \mathfrak{F}']\!] = [\![\mathfrak{D}, \mathfrak{F}]\!]$, ovvero $\mathfrak{D} \overset{\downarrow}{\sim} \mathfrak{F}$, e di conseguenza $\mathfrak{D} \upharpoonright X \in (\mathbf{E} \upharpoonright X)^{\overset{\downarrow\downarrow}{\sim\sim}}$.

$(\mathbf{E} \upharpoonright X)^{\overset{\downarrow\downarrow}{\sim\sim}} \subset (\mathbf{E})^{\overset{\downarrow\downarrow}{\sim\sim}} \upharpoonright X$: Sia $\mathfrak{F} \in \mathbf{E}^{\overset{\downarrow}{\sim}}$ e sia $\mathfrak{F}' = (\mathfrak{F})\mathfrak{A}$, dove $\mathfrak{A} = \mathfrak{Ram}_{(\langle\rangle, K-(K\cap X))}$. Se $\mathfrak{D} \in \mathbf{E}$, allora $\mathfrak{D} \preceq (\mathfrak{D} \upharpoonright X) \otimes \mathfrak{A}$, e dunque $\mathfrak{F} \overset{\downarrow}{\sim} (\mathfrak{D} \upharpoonright X) \otimes \mathfrak{A}$. Ne segue che $\mathfrak{F}' \overset{\downarrow}{\sim} (\mathfrak{D} \upharpoonright X)$, ovvero che $\mathfrak{F}' \in (\mathbf{E} \upharpoonright X)^{\overset{\downarrow}{\sim}}$. Se ora $\mathfrak{D} \in (\mathbf{E} \upharpoonright X)^{\overset{\downarrow\downarrow}{\sim\sim}}$, sappiamo che $\mathfrak{D} \otimes \mathfrak{A} \overset{\downarrow}{\sim} \mathfrak{F}$, cioè $\mathfrak{D} \otimes \mathfrak{A} \in \mathbf{E}^{\overset{\downarrow\downarrow}{\sim\sim}}$; ma, dal momento che $(\mathfrak{D} \otimes \mathfrak{A}) \upharpoonright X = \mathfrak{D}$, concludiamo che $\mathfrak{D} \in \mathbf{E}^{\overset{\downarrow\downarrow}{\sim\sim}} \upharpoonright X$.

□

Se nel caso additivo la proprietà che assicura l'assenza di interferenza è l'alienità, nel caso moltiplicativo è l'*estraneità*:

Definizione 2.2.30 (estraneità)**.** *Siano* $\mathbf{G}, \mathbf{H}$ *comportamenti della stessa polarità; allora sono* estranei *quando* $\S\mathbf{G} \cap \S\mathbf{H} = \emptyset$*.*

Siamo finalmente in grado di provare il seguente:

Teorema 2.2.17 (completezza interna di $\otimes$)**.** *Siano* $\mathbf{G}, \mathbf{H}$ *comportamenti positivi ed estranei; definiamo* $\mathbf{G} \odot \mathbf{H} := \{\mathfrak{D} \otimes \mathfrak{E} | \mathfrak{D} \in \mathbf{G}, \mathfrak{E} \in \mathbf{H}\}$*; allora si ha:*

$$|\mathbf{G} \otimes \mathbf{H}| \subseteq \mathbf{G} \odot \mathbf{H} \tag{2.2.71}$$

Dimostrazione. Proviamo anzitutto il teorema nel caso in cui $\sharp\P\mathbf{G} = 1$ e $\sharp\P\mathbf{H} = 1$; siano I, J rispettivamente le ramificazioni di $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$. Se $\mathfrak{D} \in \mathbf{G} \otimes \mathbf{H}$, allora $\mathfrak{D} = \mathfrak{D} \upharpoonright I \otimes \mathfrak{D} \upharpoonright J$ con $\mathfrak{D} \upharpoonright I \in (\mathbf{G} \otimes \mathbf{H}) \upharpoonright I$ e $\mathfrak{D} \upharpoonright J \in (\mathbf{G} \otimes \mathbf{H}) \upharpoonright J$; allora, per il lemma 2.2.16, si ha $\mathfrak{D} \upharpoonright I \in (\mathbf{G} \odot \mathbf{H}) \upharpoonright I$ e $\mathfrak{D} \upharpoonright J \in (\mathbf{G} \odot \mathbf{H}) \upharpoonright J$, e dunque $\mathfrak{D} \in \mathbf{G} \odot \mathbf{H}$.

Mostriamo adesso che il caso generale si riduce al caso precedente: osservando anzitutto che si ha

$$\P(\mathbf{G} \otimes \mathbf{H}) = \{I \cup J | I \in \P\mathbf{G}, J \in \P\mathbf{H}, I \cap J = \emptyset\} \tag{2.2.72}$$

si ottiene (con $K = \P(\mathbf{G} \otimes \mathbf{H})$) $\mathbf{G} \odot \mathbf{H} = \bigcup_K (\bigcup_{I \cup J = K} G \upharpoonright I \odot \mathbf{H} \upharpoonright J)$. Per la completezza di $\oplus$, posso restringermi a mostrare che $\bigcup_{I \cup J = K} G \upharpoonright I \odot \mathbf{H} \upharpoonright J$ è un comportamento. Ora, se I, J sono le rispettive riserve di $\mathbf{G}, \mathbf{H}$, $\bigcup_{I \cup J = K} (G \upharpoonright I \odot \mathbf{H} \upharpoonright J) = (\mathbf{G} \upharpoonright K \cap I) \odot (\mathbf{H} \upharpoonright K \cap J)$, e dunque ci ritroviamo nel caso già dimostrato.

$\square$

Parte II

Una svolta geometrica?

Capitolo 3

Logica e grafi: la topologia delle regole

In questo capitolo, attraverso la teoria dei proof-net, assisteremo all'irruzione nella logica di criteri genuinamente geometrici, nel senso topologico di criteri “non locali”: ci avvieremo cioè a considerare le derivazioni logiche nella loro forma geometrica globale, indipendente dalla strutturazione interna di queste secondo regole sintattiche. L'obbiettivo sarà allora quello di confrontare queste novità teoriche con le posizioni più diffuse sulla natura generativa delle sintassi e sulla dipendenza, da questa natura, delle stesse valutazioni semantiche.

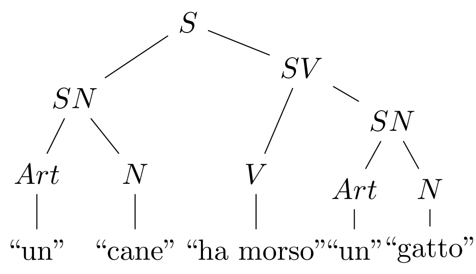
Il titolo del paragrafo §3.1, che strizza l'occhio al celebre articolo di Quine “Two dogmas of empiricism”, annuncia come i temi del confronto saranno due: il primo “dogma” è quello secondo cui, dal momento che la competenza sintattica di un parlante richiede, in virtù di quello che ho chiamato l'“argomento generativista”, di essere rappresentata con il ricorso a un numero finito di regole applicabili iterativamente, la stessa correttezza sintattica di una derivazione deve in ultima analisi dipendere dalla procedura che, attraverso tali regole, ha permesso di generarla. Il secondo “dogma” è quello che, a partire dalla tesi, già implicita in Frege, della composizionalità del senso linguistico, considera la valutazione semantica di una derivazione, e dunque la sua stessa correttezza logica, come dipendente dalla stessa procedura che l'ha generata, dalla sua “storia sintattica”, per così dire. Dopo aver introdotto le strutture dimostrative in §3.2, in §3.3 sarà dimostrato il teorema di sequenzializzazione dei proof-net, il quale mostra un criterio, essenzialmente topologico, di correttezza sintattica per le derivazioni di MLL (senza le costanti $\perp$ e $\mathbf{1}$) radicalmente indipendente dalle regole del calcolo dei sequenti. In §3.4, attraverso le strutture di demoni, che costituiscono un personale tentativo di formalizzare alcune importanti osservazioni dello stesso Girard, sarà evidenziato come il criterio di correttezza sintattica mostrato dal teorema di sequenzializzazione ha un diretto contenuto semantico: i grafi sintatticamente corretti sono esattamente quelli che, nei termini della dinamica delle strutture dimostrative, convergono con ogni grafo duale. Questo permette di riformulare, nei termini dei grafi, la questione della completezza interna discussa in §2.2.3, e di produrre un esplicito controesempio all'argomento generativista. In §3.5

sarà infine presentata una riformulazione algebrica della teoria dei proof-net, la quale costituisce una prima, semplificata, via d'accesso alla Geometria dell'Interazione, una teoria che, sviluppata nel capitolo seguente, ci permetterà di mettere esplicitamente a tema l'innovativa connessione tra correttezza sintattica e correttezza logica emersa dalla discussione del fondamentale teorema di sequenzializzazione.

3.1 "I due dogmi del generativismo"

Che cos'è una derivazione sintatticamente corretta? Questa domanda, genuinamente sintattica, va al di là dei ristretti confini della logica, e costituisce uno dei temi attorno ai quali si sono focalizzate le ricerche di molta linguistica contemporanea, soprattutto quella di ispirazione chomskyana. D'altra parte, i risultati della teoria dei proof-net, uno dei cavalli di battaglia degli sviluppi della logica lineare, costituiscono un radicale cambiamento di prospettiva nel modo stesso di pensare non solo la questione della correttezza sintattica, ma anche lo stesso rapporto tra questa e la valutazione semantica, attraverso il recupero del punto di vista della dualità, che a partire dalla discussione della relazione esistente tra le derivazioni e i loro contro-modelli (§1.2.2), abbiamo approfondito fino ad arrivare alla ludica: laddove il limite che in §2.2.2 abbiamo attribuito alla ludica stessa è proprio l'incapacità di correlare efficacemente la dualità con la questione della correttezza sintattica, mi sembra che il percorso tecnico che, a partire dalla teoria dei proof-net conduce fino ai più recenti sviluppi della Geometria dell'Interazione (che sarà presentato in questo e nel prossimo capitolo), possa essere interpretato proprio come una risposta (genuinamente geometrica, come si vedrà) a questa carenza.

La competenza generativa Le grammatiche formali, che rappresentano il principale strumento di indagine della linguistica generativa, sono le sintassi entro le quali sono costruiti oggetti chiamati, come nella logica, derivazioni. Per quel che ci interessa, una grammatica formale può essere pensata in tutto e per tutto come un sistema deduttivo del tipo di quelli descritti in §A, il cui linguaggio è costituito da formule dette "simboli terminali" oppure "simboli non terminali" (intuitivamente, simboli terminali sono "casa","Alberto","il", simboli non terminali "sintagma nominale","sintagma verbale", ecc.). Possiamo quindi pensare alle derivazioni sintattiche in analogia con le derivazioni nel calcolo dei sequenti: alla derivazione



(3.1.1)

possiamo ad esempio associare la seguente derivazione in un appropriato sistema deduttivo nel calcolo dei sequenti:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash \text{“un”}}{\vdash Art} \quad \dfrac{\vdash \text{“cane”}}{\vdash N}}{\vdash SN}\,(SN \to Art, N) \qquad \dfrac{\dfrac{\vdash \text{“ha morso”}}{\vdash V} \quad \dfrac{\dfrac{\vdash \text{“un”}}{\vdash Art} \quad \dfrac{\vdash \text{“gatto”}}{\vdash N}}{\vdash SN}\,(SN \to Art, N)}{\vdash SV}\,(SV \to V, SN)}{\vdash S}\,(S \to SN, SV) \tag{3.1.2}$$

Per una introduzione alle grammatiche formali, si veda (Chomsky,[9]).

D'altra parte, questi formalismi sono in genere considerati come una rappresentazione astratta della *competenza sintattica* di un parlante nativo di una data lingua. Informalmente, la competenza del parlante individua ciò che questi *sa* quando di questa persona diremmo che *conosce* quella lingua. Scrive ad esempio Chomsky,

> Linguistic theory is concerned primarily with an ideal speaker-listener, in a completely homogeneous speech-community, who knows its language perfectly and is unaffected by such grammatically irrelevant conditions as memory limitations, distractions, shifts of attention and interest, and errors (random or characteristic) in applying his knowledge of the language in actual performance. (Chomsky, [9])

Questa conoscenza idealizzata è contrapposta dal linguista americano alla *performance*, ovvero alla concreta esecuzione delle direttive imposte da tale conoscenza, tanto che

> Only under the idealization set forth in the preceding paragraph is performance a direct reflection of competence. In actual facts, it obviously could not reflect competence. (Chomsky, [9])

In tal modo, la competenza sintattica non può essere identificata con un insieme di disposizioni, ossia di ciò che possiamo esprimere attraverso formule del tipo

Se a Luigi viene chiesto di dire quanto fa $6 + 5$*, Luigi risponderà: "Undici!"* (3.1.3)

dal momento che possiamo immaginare infiniti motivi per i quali Luigi potrebbe rispondere diversamente, senza che per questo si possa mettere in discussione la sua competenza aritmetica (potrebbe ad esempio aver sentito male, oppure potrebbe semplicemente essere molto ma molto stanco...).

Esempi come questo hanno portato alcuni commentatori di Wittgenstein, come Kripke e Wright, a sostenere che quella di competenza, così come è descritta dalla linguistica chomskyana, contrariamente a quanto ritiene Chomsky stesso (si veda ad esempio (Chomsky, [11])), sia da considerare una nozione intrinsecamente normativa:

> But what *is* important here is that the notion of "competence" is itself not a dispositional notion. It is normative, not descriptive, in the sense explained in the text. (Kripke, [47])

> [...] such an account would immediately restore the idea that [...] there ought to be some fact about what in any particular case, independently of our actual

> dispositions to response to it, the *proper* exercise of the relevant cognitive skills and informational states wuold culminate in [...] the Central Project [of Theoretical Linguistics] [...] would thus appear to demand the view that the correctness of the relevant rule-informed judgements [...] is objective but best-opinion determined. (Wright, [76])

Per quel che ci riguarda, l'aspetto normativo della competenza sintattica è quello per il quale colui che la possiede è in grado di riconoscere derivazioni *sintatticamente corrette.*

Una delle proprietà principali tanto delle sintassi delle lingue naturali quanto di quelle logiche, per la cui spiegazione molti linguisti ritengono sia necessario adottare la nozione chomskyana di competenza è il cosidetto "aspetto creativo del linguaggio" (Chomsky, [11]), che Katz e Fodor sintetizzano così:

> A fluent speaker's mastery of his language exhibits itself in his ability to produce and understand the sentences of his language, *including indefinitely many that are wholly novel to him.* [...] That is to say, what qualifies one as a fluent speaker is not the ability to imitate previously heard sentences but rather the ability to produce and understand sentences never before encountered. (Fodor, Katz, [19])

Questa citazione è un esempio di quello che viene generalmente chiamato *argomento della produttività*:

> Productivity is the property that a system of representation has when it contains an infinite number of syntactically and semantically distinct symbols (as, for example, English contains the open-ended sequence of nonsynonymous expressions: "missile shield","anti-missile shield", "anti-anti-missile-shield-shield", "anti-anti-anti-missile-shield-shield-shield", and so forth until President Bush bankrupts us all). (Fodor e Lepore, [20])

Accettando l'implausibilità di attribuire a un parlante una competenza che non possa essere descritta finitamente, l'argomento della produttività è generalmente considerato una forte ragione per sostenere che la competenza sintattica consista nella capacità di *generare* e *riconoscere* espressioni servendosi di un insieme finito di regole:

> [...] it follows that the speaker's knowledge of his language takes the form of rules which project the finite set of sentences he has fortuitously encountered to the infinite set of sentences of the language. A description of the language which adequately represents the speaker's linguistic knowledge must, accordingly, state these rules. (Fodor e Katz, [19])

Ancora più esplicito è Chomsky:

> Al momento attuale, la teoria migliore sostiene che [...] lo stato maturo di competenza linguistica consiste in una procedura generativa che assegna descrizioni strutturali alle espressioni [...] (Chomsky, [11])

L'argomento della produttività è spesso addotto come prova del fatto che la descrizione delle sintassi basata sulle regole di un sistema deduttivo è adeguata a rappresentare la competenza sintattica e, attraverso questa, i criteri secondo i quali è possibile riconoscere la correttezza sintattica di una derivazione. Possiamo così sintetizzare la tesi generativista:

Una derivazione π è sintatticamente corretta se e solo se è possibile generare π applicando iterativamente le regole sintattiche

(3.1.4)

Un ulteriore argomento adottato dai sostenitori di questa linea in favore del principio 3.1.4 è il cosiddetto *argomento della sistematicità*:

> Roughly, the fact that any natural language that can express the proposition P will also be able to express propositions that are semantically close to P. [...] if it can express the proposition that $P \to Q$, than it can express the proposition that $Q \to P$; and so forth. (Fodor e Lepore, [20])

Questa osservazione porta a concludere che la competenza di un parlante, dal momento che, se permette di generare un' espressione, allora permette di generarne diverse altre, debba essere basata su un insieme (finito) di regole sintattiche e consistere nell'abilità di produrre espressioni concatenando ricorsivamente istanze di un insieme (finito) di regole primitive.

Possiamo riassumere la linea argomentativa generativista come segue:

(*i*) *L'insieme delle derivazioni sintatticamente corrette è infinito (produttività);*

(*ii*) *La competenza necessaria a riconoscere la correttezza sintattica di una derivazione π è sufficiente per riconoscere la correttezza sintattica di almeno un'altra derivazione π';*

(*iii*) *La competenza sintattica di un parlante deve essere finitamente descrivibile;*

(*i+ii+iii*) *La derivazione π è sintatticamente corretta se e solo se esiste una procedura che genera π applicando iterativamente un numero finito di regole sintattiche.*

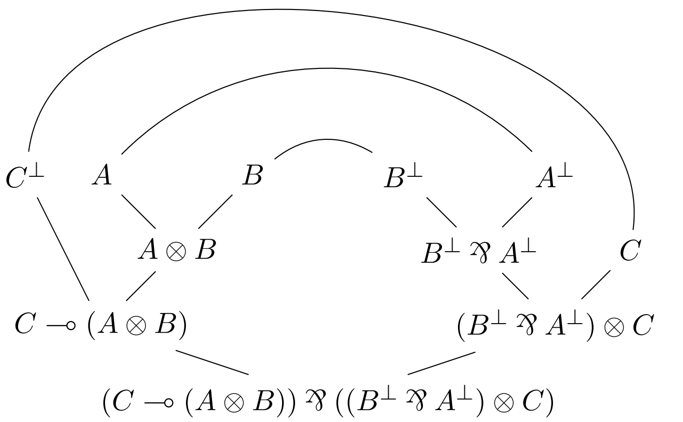
Le argomentazioni generativiste possono essere considerate una giustificazione, nei termini degli obiettivi scientifici della linguistica, del modo con cui sono abitualmente descritte le sintassi formali e di come questa descrizione, basata sulle regole sintattiche, sia adeguata a rappresentare la capacità di un parlante di verificare la correttezza sintattica di un'espressione.

Già a un livello così generale, mi sembra opportuno il parallelo con gli sviluppi della teoria dei proof-net: possiamo in effetti facilmente rielaborare il vocabolario generativista nei termini della teoria dei grafi: alle formule (simboli terminali e non terminali) che occorrono in una derivazione associamo i nodi di un grafo, e alle regole sintattiche in cui occorrono tali formule associamo lati (come vedremo più avanti, *link*), che connettono tali nodi.

In questi termini, ad esempio, la derivazione

$$
\dfrac{\dfrac{}{\vdash C^{\perp}, C}\,(Ax) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash A, A^{\perp}}\,(Ax) \quad \dfrac{}{\vdash B, B^{\perp}}\,(Ax)}{\vdash A \otimes B, B^{\perp}, A^{\perp}}\,(\otimes)}{\vdash A \otimes B, B^{\perp} \parr, A^{\perp}}\,(\parr)}{\dfrac{\vdash C^{\perp}, A \otimes B, (B^{\perp} \parr A^{\perp}) \otimes C}{\dfrac{\vdash C \multimap (A \otimes B), (B^{\perp} \parr A^{\perp}) \otimes C}{\vdash (C \multimap (A \otimes B)) \parr ((B^{\perp} \parr A^{\perp}) \otimes C)}\,(\parr)}\,(\parr)}\,(\otimes) \tag{3.1.5}
$$

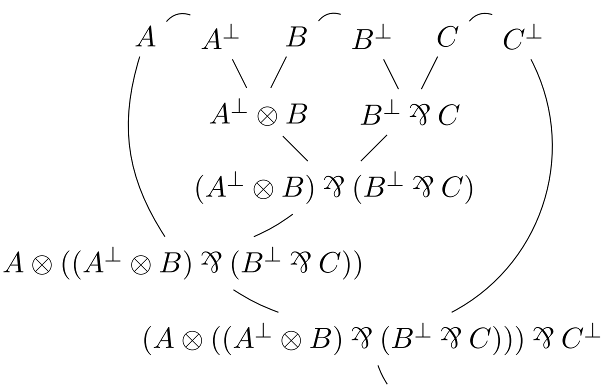
diventerebbe qualcosa di simile al seguente grafo



(3.1.6)

Si osservi la natura profondamente diversa del grafo 3.1.6 rispetto alla derivazione 3.1.5: laddove nella seconda è subito evidente la via secondo la quale può essere generata (che sia dal basso verso l'alto o dall'alto verso il basso), il primo si presenta come un oggetto geometrico del quale è ben visibile la forma *globale*, mentre le possibili vie di generazione sono nascoste. In effetti, la 3.1.5 ben si adatta all'idea chomskyana secondo cui la verifica della correttezza sintattica presuppone una competenza di tipo essenzialmente procedurale, laddove il grafo 3.1.6 risulta piuttosto mal configurato, rispetto a questo punto di vista.

Si noti che, a differenza che con le sintassi preferite dai generativisti, con i grafi, è facile costruire oggetti sintatticamente scorretti, come il seguente:



(3.1.7)

che, per motivi che saranno presentati nel dettaglio in §3.3, non corrisponde ad alcuna derivazione sintatticamente corretta nel calcolo dei sequenti.

L'*argomento generativista* è allora quello che conduce alla tesi secondo cui la correttezza sintattica di un grafo è funzione della procedura con cui il grafo è stato generato. In particolare, possiamo dire che

Il grafo G è sintatticamente corretto se e solo se esiste una procedura p che genera G, tale che ogni passo di p corrisponde a una regola sintattica.

(3.1.8)

Nel caso delle derivazioni, la procedura p è implicita alla derivazione stessa, e dunque la 3.1.8, che è della forma $\exists\forall\exists$, può essere semplificata in

La derivazione π è sintatticamente corretta se e solo se ogni passo della generazione di π corrisponde a una regola sintattica

(3.1.9)

che è della forma $\forall\exists$. In tal modo, la verifica della correttezza sintattica di π è ricondotta nei termini di una *analisi locale*. Con il ricorso alla teoria dei proof-net, in questo capitolo ci chiederemo se davvero la verifica della correttezza sintattica può essere pensata in termini puramente locali, e se davvero è funzione della procedura generativa. Mi propongo cioè di applicare i risultati della teoria "non locale" dei proof-net, così lontana, anche visivamente, dai canoni della linguistica generativa, alla questione, in un certo senso, al "dogma", della località delle regole.

La composizionalità In §1.1.1 abbiamo discusso la nozione, implicita già in Frege, di *composizionalità*, che abbiamo espresso come la richiesta che il senso di una espressione sia determinato da regole commutanti con le regole sintattiche che occorrono nella generazione di tale espressione; tale nozione è evidentemente situata nel cuore del rapporto tra sintassi e semantica. A partire da questo tipo di richiesta, nell'ambito degli studi sulla semantica, anche qui, tanto delle lingue naturali quanto delle sintassi logiche, gli argomenti generativisti hanno esercitato una notevole influenza, al punto che molti studiosi (vd. ad esempio (Fodor, Lepore, [20])) ritengono che l'argomento presentato sopra, basato sulle tesi della produttività e della sistematicità, possa essere esteso in un vero e proprio argomento in favore della composizionalità del senso linguistico. Nei termini adoperati in questa tesi, possiamo così rielaborare la tesi della composizionalità:

$$\textit{La valutazione di una derivazione è funzione della sua procedura generativa} \tag{3.1.10}$$

In effetti, un parlante competente è generalmente considerato in grado di valutare (nel senso di stabilire le condizioni di verità) una quantità infinita di enunciati e di valutare (nel senso di stabilire la correttezza logica) una quantità infinita di derivazioni (produttività). Inoltre, qualora questi sia in grado di valutare (nei due sensi) un certo enunciato o una certa derivazione, sarà in grado di valutarne anche altre (sintatticamente simili). Infine, dal momento che una tale competenza (semantica?) non potrà essere descritta in termini infinitari, dovremo concluderne che questa sarà caratterizzata da un insieme finito di regole semantiche applicabili iterativamente (in funzione della struttura sintattica dell'enunciato e di quella della derivazione).

In favore di questa linea di argomentazione, vi è il fatto che la teoria semantica di gran lunga più considerata, la teoria dei modelli, è composizionale e, in particolare, in accordo con la 3.1.10. In effetti, la valutazione della validità di una formula è svolta, nel teorema di correttezza per LK, attraverso un argomento per induzione sulla complessità, e dunque sulla costruzione, della formula e, concordemente, sulla complessità, e dunque sulla costruzione, delle derivazioni della formula. In particolare, si mostra che, se le premesse di una regola di inferenza logica sono valide, allora la conclusione è valida, vale a dire che la validità è preservata dall'alto verso il basso da tutte le regole logiche. La conseguenza è che ogni derivazione π di LK sintatticamente corretta sarà anche logicamente corretta, in quanto la sua conclusione è valida e la procedura di generazione di π preserva la validità.

Del tutto analogo, da questo punto di vista, può essere considerato l'argomento con il quale viene mostrata la correttezza (chiamata "validità" in (Prawitz, [58])) delle derivazioni di NJ: ciò che si dimostra è che se le premesse di una qualunque regola di inferenza logica sono derivazioni logicamente corrette (nel senso mostrato in §2.1.1), allora anche la derivazione ottenuta applicando tale regola è logicamente corretta. In questo senso la stessa semantica giustificazionista è impegnata in questa lettura della composizionalità.

> In a compositional meaning-theory [...] The meaning of a sentence must be explicable in a way that presupposes the meanings only of a restricted range of other sentences - sentences with a lower degree of complexity [...]. It is this that requires us to distinguish between *direct* and *indirect* verifications of a statement, or, in mathematics, between canonical proofs and demostrations of a more general kind. (Dummett, [17])

D'altra parte, come si è osservato in §1.1.3, si noti, incidentalmente, che il requisito su cui poggia questa distinzione, vale a dire la possibilità di assegnare, attraverso grandezze ordinali, una complessità alle derivazioni, *non riguarda direttamente le singole regole* *che generano le derivazioni, ma è piuttosto un requisito che deve valere* tra *le regole di inferenza del sistema deduttivo.* Se ci rivolgiamo al sostrato logico che sostiene gli argomenti di Dummett, ovvero, in questo caso, al teorema 1.2.1 di eliminazione del taglio (pag. 49), dobbiamo osservare che, alla sua base, vi è una complessa procedura di manipolazione delle derivazioni che non sembra riconducibile al tipo di analisi locale preferita dal generativista. Questa osservazione si rivelerà decisiva in seguito.

In linea del tutto generale, vale a dire indipendente dalla particolare prospettiva semantica adottata, possiamo dire che la conseguenza principale del principio di composizionalità, che si manifesta nella natura induttiva delle dimostrazioni di correttezza logica, è la validità della seguente tesi:

> π *è una derivazione logicamente corretta se e solo se* π *è sintatticamente corretta e le regole con cui* π *è generata preservano la correttezza logica.*

(3.1.11)

In tal modo anche la correttezza logica viene ad essere funzione della procedura generativa associata a π: la verifica di essa consisterà anche in questo caso in una *analisi locale.* La teoria dei proof-net ci permetterà di porre in questione anche questo secondo "dogma", e più in generale, come vedremo, di ridiscutere la questione del rapporto tra correttezza logica (o, più in generale, valutazione semantica) e correttezza sintattica: laddove la lettura qui proposta della tesi della composizionalità mi sembra venga ad assumere il ruolo, in autori che seguono prospettive molto lontane tra loro come Fodor e Lepore da una parte, e Dummett e Prawitz dall'altra, di un punto fermo, di un risultato definitivo sul rapporto tra sintassi e semantica, cercheremo di far vedere come i recenti risultati di Girard sulla logica moltiplicativa, possano servire per reintrodurre un punto di domanda nella discussione. In particolare, sosterrò che il teorema 3.3.7 di sequenzializzazione (pag. 197) dei proof-net identifica una via completamente diversa di intendere questo rapporto, una via che, con i recenti sviluppi della Geometria dell'Interazione (esposti nel capitolo quarto), sarà portata alle sue più radicali conseguenze.

3.2 Dimostrazioni e grafi

Questo paragrafo è dedicato alla introduzione **PS**, o strutture dimostrative, vale a dire di quella classi di grafi che sono oggetto della teoria dei proof-net.

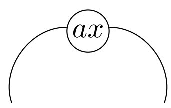
Le strutture dimostrative Che le (porzioni delle) derivazioni, al netto dell'eliminazione di alcune inessenziali decorazioni linguistiche e sintattiche, potessero corrispondere a dei grafi era già emerso in §2.2.2 attraverso la nozione di design-*dessein.* Le intuizioni grafiche cui dà accesso la ludica poggiano in particolare su due aspetti importanti: in primo luogo la locatività, ovvero la sostituzione delle formule del linguaggio con i loci, con delle astratte porzioni di spazio, la cui determinazione morfologica, ovvero l'etichettatura mediante le formule, viene ad essere funzione delle proprietà dinamiche della rete che è costruita su questi stessi loci. Le novità teoriche connesse questa proposta radicale, la "scommessa locativa" 2.2.12 (pag. 136) sono state già discusse in §2.2.1. In secondo luogo la sintesi operata dai design-*desseins* rispetto al calcolo dei sequenti ha come conseguenza che il senso logico di un'azione κ, ovvero la sua natura moltiplicativa o additiva, non è rappresentato nella descrizione (locale) dell'azione stessa, ma è funzione della struttura di tutte le azioni che seguono κ in una qualche cronaca del design: alla dimensione ancora locale della giustificazione normativa attraverso il riconoscimento dell'aderenza delle azioni a regole si sostituisce la natura non-locale delle nozioni logiche di "estraneità" e "alienità", o "sovrapposizione"; proprietà, queste, che, scongiurando il pericolo di interferenza, possono essere considerate, da un punto di vista semiotico, come garanti della fedeltà di una derivazione a un senso determinato (espresso dalle ramificazioni moltiplicative o additive).

D'altra parte, si deve osservare che la sintesi operata dai design-*desseins* non costituisce ancora quella decostruzione del carattere sintattico delle derivazioni che sola può permettere di guardare alle spalle, alle condizioni di possibilità, kantianamente, della sintatticità stessa di queste. Pur avendo perso il carattere più tipico della sintassi (il Π^1, ovvero la computabilità), il design-*dessein*, a partire dal quale è sempre possibile ricostruire il design-*dessin* associato, rimane ancorato ai canoni, e ai limiti, del calcolo dei sequenti.

Il generativista considera la natura produttiva delle regole applicabili iterativamente il fondamento della competenza sintattica. Questa concezione induce, come abbiamo visto, una analogia in termini di teoria dei grafi. Vedremo adesso come dare un senso concreto a tale analogia, in continuità con le principali conquiste della ludica, servendoci della nozione di struttura dimostrativa, che costituisce il punto di partenza di quella revisione "geometrica" della logica operata da Girard a partire da (Girard, [27]):

Definizione 3.2.1 (struttura dimostrativa)**.** *Una* struttura dimostrativa*, o* **PS** *(* proof-structure*), indicata con lettere greche* $\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}$*, è un grafo i cui nodi sono detti* link*, costruito a partire dai seguenti componenti:*

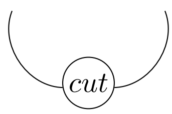
(*ax*-link)



(3.2.1)

i cui due lati sono detti conclusioni *dell' ax-link;*

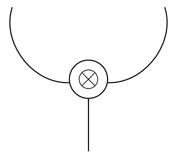
(*cut*-link)



(3.2.2)

i cui due lati sono detti premesse *del cut-link;*

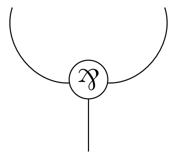
(⊗-link)



(3.2.3)

che ha esattamente due premesse *ed una* conclusione*;*

(⅋-link)



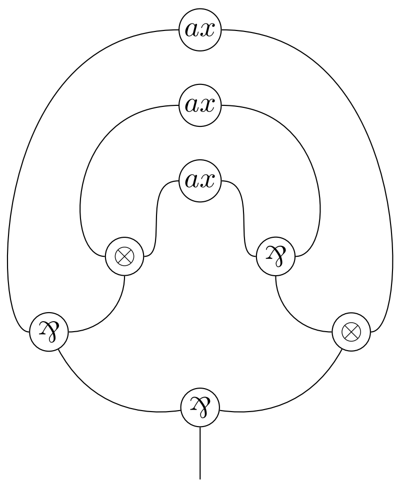
(3.2.4)

che ha esattamente due premesse *ed una* conclusione*;*

Si richiede inoltre che una **PS** *soddisfi il seguente requisito:* ogni lato è conclusione di esattamente un link e premessa di al più un link*.*

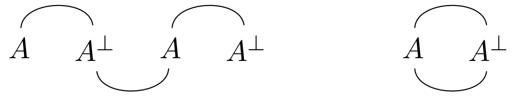
I lati di una **PS** $\boldsymbol{\pi}$ *che non sono premessa di alcun link sono detti* conclusioni di $\boldsymbol{\pi}$*.*

Le strutture dimostrative qui presentate sono duali, nel senso dello scambio di nodi e lati, ai grafi accennati nel paragrafo precedente. Questa scelta privilegia infatti l'approccio locativo: consideriamo ad esempio la versione **PS** del grafo 3.1.6 a pag. 176:



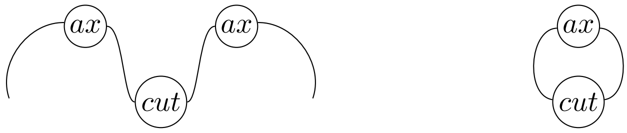
(3.2.5)

Questo grafo è esattamente il duale del 3.1.6, con il vantaggio, non indifferente, di non essere vincolato a nessun linguaggio, in quanto non vi occorre alcuna formula. La locatività delle **PS** si può osservare attraverso il seguente esempio: consideriamo i seguenti due grafi, nel senso del paragrafo precedente



(3.2.6)

Per sapere se si tratta in realtà dello stesso grafo dobbiamo andare a verificare che le due occorrenze di A (e $A^{\perp}$) nel primo sono in realtà le stesse, ovvero *occupano gli stessi loci.* D'altra parte, le due **PS** seguenti sono *a priori* distinte:



(3.2.7)

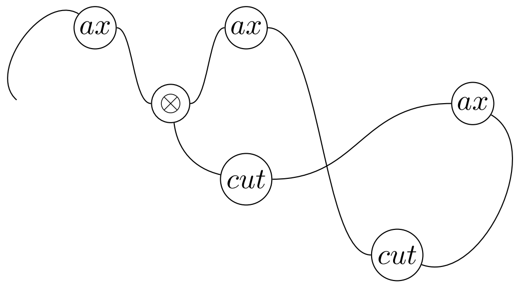
Dobbiamo chiederci se possiamo sempre decorare una **PS** con le formule del linguaggio:

Definizione 3.2.2 (etichettatura)**.** *Sia* $\boldsymbol{\pi}$ *una* **PS**; *una* etichettatura *di* $\boldsymbol{\pi}$ *è una funzione* $\epsilon : L_{\boldsymbol{\pi}} \to \mathcal{L}_{MLL} - \{\perp, \mathbf{1}\}$ *(in cui* $L_{\boldsymbol{\pi}}$ *è l'insieme dei lati di* $\boldsymbol{\pi}$*) tale che:*

- *se* $l_1, l_2 \in L_{\boldsymbol{\pi}}$ *sono le conclusioni di un ax-link, allora* $\epsilon(l_1)^{\perp} = \epsilon(l_2)$;
- *se* $l_1, l_2 \in L_{\boldsymbol{\pi}}$ *sono le premesse di un cut-link, allora* $\epsilon(l_1)^{\perp} = \epsilon(l_2)$;
- *se* $l_1, l_2, l_3 \in L_{\boldsymbol{\pi}}$ *sono rispettivamente le premesse e la conclusione di un* $\otimes$*-link, allora* $\epsilon(l_3) = \epsilon(l_1) \otimes \epsilon(l_2)$;
- *se* $l_1, l_2, l_3 \in L_{\boldsymbol{\pi}}$ *sono rispettivamente le premesse e la conclusione di un* $\parr$*-link, allora* $\epsilon(l_3) = \epsilon(l_1) \parr \epsilon(l_2)$.

Una **PS** *che ammetta una etichettatura è detta* etichettabile.

Che non ogni **PS** sia etihettabile è mostrato dal seguete esempio:



(3.2.8)

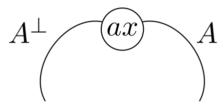
Passiamo a questo punto ad accertarci che ci sia una **PS** etichettabile per ogni derivazione del calcolo dei sequenti MLL senza le costanti $\mathbf{1}$ e $\perp$:

Teorema 3.2.1. *a ogni derivazione* π *di un sequente* Γ *in* MLL *(senza costanti) è associata una* **PS** $\boldsymbol{\pi}$ *ed una etichettatura* ϵ_{π}*, tale che le etichette delle conclusioni di* $\boldsymbol{\pi}$ *sono esattamente le formule in* Γ*.*

Dimostrazione. Per induzione sulle regole di MLL:

(Ax)

$$\dfrac{}{\vdash A^{\perp}, A}\ (Ax) \qquad \mapsto$$



(3.2.9)

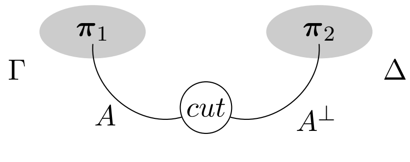
(cut)

$$\pi = \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi_1\\ \vdash \Gamma, A\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\ \pi_2\\ \vdash A^{\perp}, \Delta\end{array}}{\vdash \Gamma, \Delta}\ (cut) \tag{3.2.10}$$

per ipotesi esistono due **PS** etichettate $\boldsymbol{\pi}_1$ e $\boldsymbol{\pi}_2$ le etichette delle cui conclusioni sono esattamente le formule in Γ più A, per $\boldsymbol{\pi}_1$, e le formule in Δ più $A^{\perp}$, per $\boldsymbol{\pi}_2$:

(3.2.11)

la **PS** etichettata $\boldsymbol{\pi}$ è allora la seguente



(3.2.12)

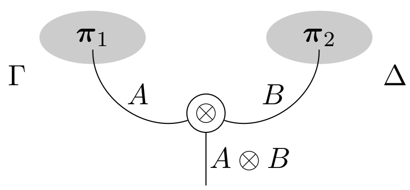
($\otimes$)

$$\pi = \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi_1\\ \vdash \Gamma, A\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\ \pi_2\\ \vdash \Delta, B\end{array}}{\vdash \Gamma, \Delta, A \otimes B}\ (\otimes) \tag{3.2.13}$$

per ipotesi esistono due **PS** etichettate $\boldsymbol{\pi}_1$ e $\boldsymbol{\pi}_2$ le etichette delle cui conclusioni sono esattamente le formule in Γ più A, per $\boldsymbol{\pi}_1$, e le formule in Δ più B, per $\boldsymbol{\pi}_2$:

(3.2.14)

la **PS** etichettata $\boldsymbol{\pi}$ è allora la seguente

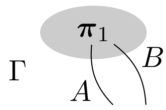


(3.2.15)

($\parr$)

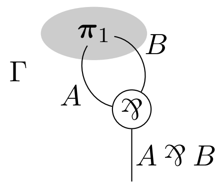
$$\pi = \quad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi_1 \\ \vdash \Gamma, A, B\end{array}}{\vdash \Gamma, A \parr B}\ (\parr) \tag{3.2.16}$$

per ipotesi esiste una **PS** etichettata $\boldsymbol{\pi}_1$, le etichette delle cui conclusioni sono esattamente le formule in Γ più A e B:



(3.2.17)

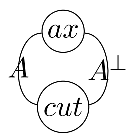
la **PS** etichettata $\boldsymbol{\pi}$ è allora la seguente



(3.2.18)

□

D'altra parte, che non ogni **PS** provenga da una derivazione di MLL, è una conseguenza della non etichettabilità della 3.2.8. Esistono anche delle **PS** etichettabili che non provengono da derivazioni di MLL: si prenda ad esempio la 3.2.7 a pag. 182:



(3.2.7)

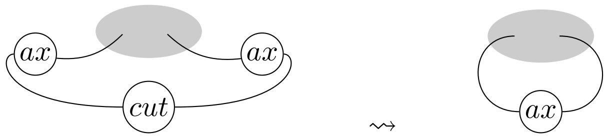
Nel calcolo dei sequenti l'applicazione della regola *cut* richiede due *distinte* derivazioni, quale non è certamente qui il caso.

Questi esempi mostrano come le **PS** costituiscano un dominio all'interno del quale dovremo selezionare quei grafi che rispondono alle norme del calcolo dei sequenti, ovvero quei grafi che possiamo considerare *sintatticamente corretti*.

La dinamica dei grafi Anche nel caso delle **PS** possiamo parlare di eliminazione dei tagli: in analogia con la ludica, la procedura di eliminazione di questi tagli costituirà una definizione piuttosto che un teorema, dal momento che, come vedremo, non in tutti i casi tale procedura risulterà convergente.

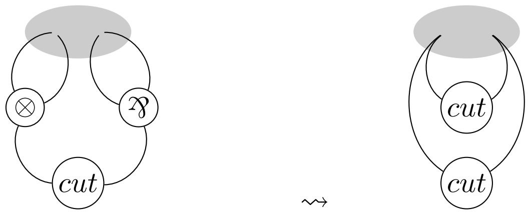
Definizione 3.2.3 (eliminazione dei *cut*-link)**.** *Sia* $\boldsymbol{\pi}$ *una* **PS** *in cui occorre almeno un cut-link. La procedura indotta dalle seguenti clausole trasforma* $\boldsymbol{\pi}$ *in una* **PS** $\boldsymbol{\pi'}$ *che ha le stesse conclusioni di* $\boldsymbol{\pi}$*:*

(i) *le premesse del cut-link sono conclusioni di ax-link:*



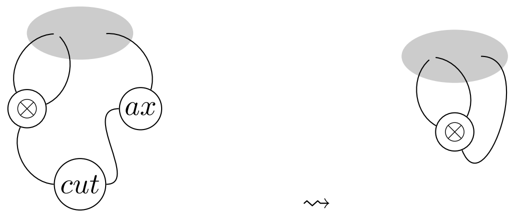
(3.2.19)

(ii) *le premesse del cut-link sono conclusioni di* $\otimes$ *o* ⅋*-link (nel caso seguente esattamente un* $\otimes$*-link e un* ⅋*-link):*



(3.2.20)

(iii) *le premesse del cut-link sono una una conclusione di un ax-link, l'altra conclusione di un* $\otimes$ *o* ⅋*-link:*



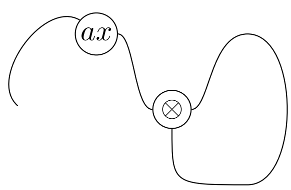
(3.2.21)

E' importante verificare che l'assegnazione di etichette linguistiche sia compatibile con l'eliminazione dei *cut*-link:

Proposizione 3.2.2. *L'etichettatura è stabile per eliminazione dei cut-link, ovvero se* $\boldsymbol{\pi}$ *è etichettabile e* $\boldsymbol{\pi} \rightsquigarrow \boldsymbol{\pi}'$, *esiste una etichettatura di* $\boldsymbol{\pi}'$ *che assegna a ogni suo lato "proveniente" da* $\boldsymbol{\pi}$ *la stessa etichetta che ha in* $\boldsymbol{\pi}$.

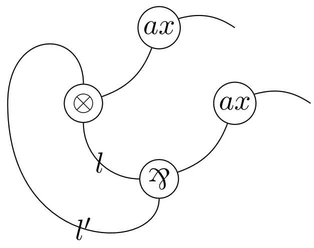
Dimostrazione. Si tratta semplicemente di andare a verificare nella procedura 3.2.3 la preservazione delle etichette dei lati che non sono cancellati. □

Ci si può d'altra parte facilmente convincere che se $\boldsymbol{\pi}$ non è etichettabile, come ad esempio la 3.2.8, ogni sua ridotta non sarà etichettabile. In particolare la 3.2.8 a pag. 182 si riduce in due passi alla seguente:



(3.2.22)

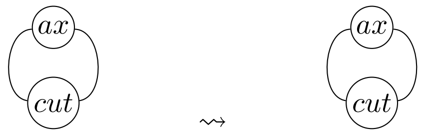
nella quale un lato è conclusione e premessa *dello stesso* link. E' immediato che in una **PS** etichettabile questo non può accadere. In particolare, nelle **PS** etichettabili, dato un qualsiasi lato l, ha senso parlare dei lati che si trovano "sopra" l, ovvero che sono *premesse ereditarie* e di quelli che sono "sotto" l, ovvero che sono sue *conclusioni ereditarie*. Il seguente controesempio, che mostra un lato l' che è contemporaneamente sopra e sotto il lato l, è del resto sicuramente non etichettabile.



(3.2.23)

Per questo motivo, da qui in poi per **PS** intenderemo strutture dimostrative etichettabili.

Prendiamo adesso ancora una volta la **PS** scorretta 3.2.7 a pag. 182 e applichiamole la procedura di eliminazione dei *cut*-link:



(3.2.24)

La **PS** si riproduce e dunque la procedura va immediatamente in loop: abbiamo già trovato un primo, apparentemente banale, caso di divergenza. D'altra parte, è facile verificare come la procedura converga sempre nel caso delle **PS** corrette:

Proposizione 3.2.3. *Se $\boldsymbol{\pi}$ è una* **PS** *che proviene da una derivazione π in MLL (senza costanti), allora la procedura di eliminazione dei cut-link applicata a $\boldsymbol{\pi}$ converge.*

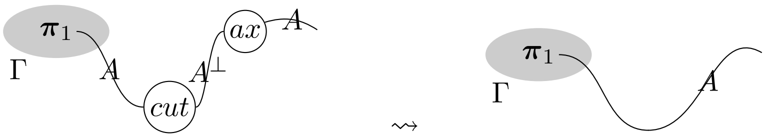
Dimostrazione. Dobbiamo verificare che, nella eliminazione dei *cut*-link nelle **PS** indotte dalle derivazioni di MLL, la coppia $(cr(\boldsymbol{\pi}), n(\boldsymbol{\pi}))$, in cui il primo elemento è il rango di taglio $cr(\boldsymbol{\pi})$, definito come la complessità massima delle formule che etichettano i lati dei *cut*-link di $\boldsymbol{\pi}$, il secondo $n(\boldsymbol{\pi})$ è il numero di *cut*-link, ordinata lessicograficamente, decresce strettamente.

I casi da verificare sono due:

(Ax)

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\ \pi_1\\ \vdash \Gamma, A\end{matrix} \qquad \dfrac{}{\vdash A^{\perp}, A}\,(Ax)}{\vdash \Gamma, A}\,cut \qquad \rightsquigarrow \qquad \begin{matrix}\vdots\ \pi_1\\ \vdash \Gamma, A\end{matrix} \tag{3.2.25}$$

induce la seguente riduzione $\boldsymbol{\pi} \rightsquigarrow \boldsymbol{\pi'}$:



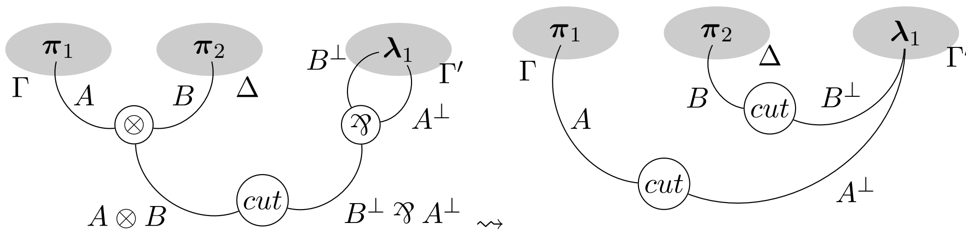
(3.2.26)

in cui il numero di *cut*-link decresce strettamente.

$(\otimes/\parr)$

$$\cfrac{\cfrac{\overset{\vdots\,\pi_1}{\vdash \Gamma, A} \quad \overset{\vdots\,\pi_2}{\vdash \Delta, B}}{\vdash \Gamma, \Delta, A\otimes B}\,(\otimes) \qquad \cfrac{\overset{\vdots\,\lambda_1}{\vdash \Gamma', A^\perp, B^\perp}}{\vdash \Gamma', A^\perp \parr B^\perp}\,(\parr)}{\vdash \Gamma, \Delta, \Gamma'}\,\mathit{cut} \quad \rightsquigarrow \quad \cfrac{\overset{\vdots\,\pi_1}{\vdash\Gamma,A} \qquad \cfrac{\overset{\vdots\,\pi_2}{\vdash \Delta, B} \quad \overset{\vdots\,\lambda_1}{\vdash\Gamma',A^\perp,B^\perp}}{\vdash \Delta, A^\perp, \Gamma'}\,\mathit{cut}}{\vdash \Gamma,\Delta,\Gamma'}\,\mathit{cut} \tag{3.2.27}$$

induce la seguente riduzione $\boldsymbol{\pi} \rightsquigarrow \boldsymbol{\pi'}$:



(3.2.28)

in cui il rango di taglio decresce strettamente. Si noti come, se nell’eliminazione del taglio in MLL c’è una forma di indeterminismo nel poter decidere se effettuare prima il taglio su A e poi quello su B o viceversa, nelle corrispondenti **PS** entrambe le possibilità danno luogo alla stessa $\boldsymbol{\pi'}$.

□

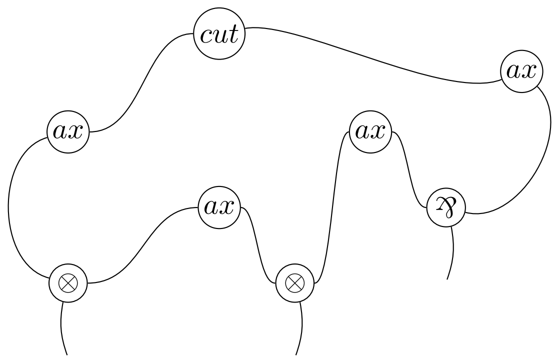
Si osservi la natura sintetica della eliminazione dei *cut*-link rispetto all’eliminazione del taglio in MLL: non solo il processo è puramente locale, ma “quozienta”, per così dire, tutti quei casi in cui l’algoritmo per MLL presenta degli indeterminismi irrilevanti, come nel caso $\otimes/\parr$.

Abbiamo dunque trovato un primo “sintomo” della scorrettezza di una **PS**: la divergenza dell’eliminazione dei *cut*-link. Compito dell’analisi che seguirà sarà comprendere come questo sintomo possa condurci alla proprietà che cerchiamo, ovvero alla proprietà che caratterizza la correttezza delle **PS**. E’ a questa proprietà che dovremo rivolgerci per valutare, dal punto di vista della logica, l’argomento generativista.

3.3 In “giro” per la sintassi

Questo paragrafo è dedicato alla teoria dei proof-net, nella sua originale formulazione basata sui “giri” (vd. (Girard, [27])). La scelta di questa formulazione rispetto ad altre, più recenti e generalmente anche più semplice, è dovuta al fatto che il concetto di “giro” ci permetterà di arrivare a definire, in maniera del tutto naturale, i concetti della Geometria dell’Interazione (vd. §3.5).

La generazione come attraversamento di un grafo Siamo partiti dai requisiti che la concezione generativista, tanto nel campo della sintassi quanto in quello della semantica, impone alla rappresentazione del linguaggio e delle derivazioni. D'altra parte, le **PS**, per la loro intrinseca natura geometrica, non si accordano perfettamente con alcuni dei tratti essenziali della sintassi, ed in particolare non rispettano uno di quei requisiti che avevamo considerato decisivo anche nella trattazione strategica della logica attraverso gli spazi coerenti (vd. §1.2.3): come abbiamo già osservato nella dimostrazione della proposizione 3.2.3, le **PS** non inducono una procedura univoca di sequenzializzazione: a modi diversi di attraversare il grafo, ammesso che questo provenga da una derivazione di MLL (senza costanti), corrisponderanno diverse derivazioni nel calcolo dei sequenti. Ad esempio, consideriamo il seguente grafo:



(3.3.1)

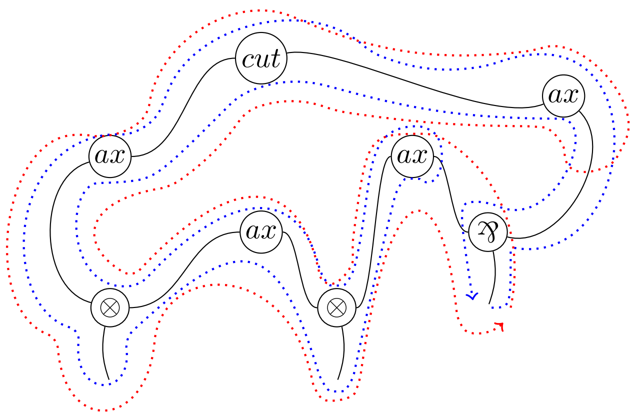
il quale, modulo l'ordine generativo, può provenire da entrambe le seguenti distinte derivazioni:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash A^\perp, A}(Ax) \quad \dfrac{}{\vdash A^\perp, A}(Ax)}{\vdash A^\perp, A}\,cut \quad \dfrac{}{\vdash B^\perp, B}(Ax)}{\vdash B^\perp, A^\perp \otimes B, A}(\otimes) \quad \dfrac{}{\vdash C^\perp, C}(Ax)}{\vdash C^\perp, A, A^\perp \otimes B, B^\perp \otimes C}(\otimes)}{\vdash C^\perp \parr A, A^\perp \otimes B, B^\perp \otimes C}(\parr) \tag{3.3.2}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash A^\perp, A}(Ax) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash A^\perp, A}(Ax) \quad \dfrac{}{\vdash B^\perp, B}(Ax)}{\vdash B^\perp, A^\perp \otimes B, A}(\otimes) \quad \dfrac{}{\vdash C^\perp, C}(Ax)}{\vdash C^\perp, A, A^\perp \otimes B, B^\perp \otimes C}(\otimes)}{\vdash C^\perp, A, A^\perp \otimes B, B^\perp \otimes C}\,cut}{\vdash C^\perp \parr A, A^\perp \otimes B, B^\perp \otimes C}(\parr) \tag{3.3.3}$$

Paradossalmente, gli stessi requisiti generativisti ci hanno condotto a un oggetto matematico che va "in parallelo", senza prestare grande attenzione alla procedura che lo ha generato. In effetti, anticipando sui risultati che arriveranno, se il teorema 3.2.1 che associa a ogni derivazione una **PS** etichettabile è stato dimostrato per induzione sulla costruzione della derivazione, e dunque anche del grafo associato, il teorema opposto, che assocerà una ben determinata derivazione a una **PS** di un certo tipo, non dipenderà affatto dalla costruzione del grafo, bensì da sue proprietà “non-locali”, ossia genuinamente geometriche. Saranno tali proprietà geometriche a garantire quello che cerchiamo, vale a dire l'esistenza di una procedura non ambigua di generazione, ovvero una *sequenzializzazione* del grafo.

Per capire cosa vuol dire sequenzializzare un grafo, torniamo al grafo 3.3.1 e osserviamo che, se andiamo a leggere gli ordini secondo cui sono applicate le regole binarie di MLL nelle due derivazioni 3.3.2 e 3.3.3, ci accorgiamo che questi ordini corrispondono a due ordini di “visita” del grafo 3.3.1, ovvero a due cammini che “entrano” nel grafo a partire dalla conclusione dell'unico $⅋$-link ed “escono” dal grafo ancora da quella stessa conclusione:



(3.3.4)

Interruttori e proof-net L'idea che stiamo seguendo è che un grafo è (sintatticamente) corretto se ammette una visita come quelle in 3.3.4, ovvero una visita che parte da una delle conclusioni per tornarci, attraversando tutto il grafo, e dunque incontrando ogni lato esattamente due volte. a ognuna di queste visite assoceremo una derivazione del calcolo dei sequenti. Passiamo dunque alle definizioni:

Definizione 3.3.1. *Un* lato orientato *di una* **PS** $\boldsymbol{\pi}$ *è un lato l di $\boldsymbol{\pi}$ cui è associata una direzione, il che sarà scritto $\uparrow l$ se la direzione è “verso l'alto” e $\downarrow l$ se la direzione è “verso il basso” (scriveremo $\updownarrow l$ quando non servirà specificare la direzione).*

Un cammino orientato *da $\updownarrow l_0$ a $\updownarrow l_n$ in $\boldsymbol{\pi}$ è una sequenza $\varphi = \langle \updownarrow l_0, \ldots, \updownarrow l_n \rangle$ di lati orientati di $\boldsymbol{\pi}$ tale che, per ogni $i < n$, si ha:*

(*i*) *se $\updownarrow l_i = \uparrow l_i$ e $\updownarrow l_{i+1} = \uparrow l_{i+1}$, allora l_i è conclusione di un link di $\boldsymbol{\pi}$ di cui l_{i+1} è una delle premesse;*

(*ii*) *se $\updownarrow l_i = \uparrow l_i$ e $\updownarrow l_{i+1} = \downarrow l_{i+1}$, allora l_i e l_{i+1} sono conclusioni di uno stesso link di $\boldsymbol{\pi}$;*

(*iii*) *se $\updownarrow l_i = \downarrow l_i$ e $\updownarrow l_{i+1} = \uparrow l_{i+1}$, allora l_i e l_{i+1} sono premesse di uno stesso link di $\boldsymbol{\pi}$;*

(*iv*) *se* $\updownarrow l_i = \downarrow l_i$ *e* $\updownarrow l_{i+1} = \downarrow l_{i+1}$, *allora* l_i *è una delle premesse di un link di* $\boldsymbol{\pi}$ *di cui* l_{i+1} *è la conclusione;*

Ogni cammino orientato φ *induce un ordine parziale su i lati di* $\boldsymbol{\pi}$ *dato da* $l_1 \succeq_\varphi l_2$ *se e solo se esiste una sottosequenza di* φ *che "scende" da* l_1 *a* l_2*, ossia va da* $\downarrow l_1$ *a* $\downarrow l_2$.

Diremo infine che un cammino orientato φ attraversa un link *di* $\boldsymbol{\pi}$ *se* φ *contiene una sotto-sequenza* $\langle \updownarrow l_1, \updownarrow l_2 \rangle$ *con* l_1, l_2 *entrambi incidenti a tale link* [1].

I cammini orientati cui siamo interessati sono dei cicli costruiti a partire da una delle conclusioni della **PS**, vale a dire dei "giri" attorno a questa:

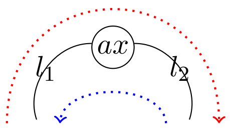
Definizione 3.3.2 (interruttore)**.** *Sia* $\boldsymbol{\pi}$ *una* **PS**. *Un cammino orientato* φ *di lunghezza* k *in* $\boldsymbol{\pi}$ *è detto un* interruttore *su* $\boldsymbol{\pi}$ *se soddisfa le seguenti condizioni:*

- *se* l_1, l_2 *sono premesse di un* $\parr$*-link di* $\boldsymbol{\pi}$ *,* l *la sua conclusione e* φ *contiene* $\downarrow l_1$ *(risp.* $\downarrow l_2$*), allora* φ *non contiene le sotto-sequenze* $\langle \updownarrow l_2, \updownarrow l \rangle$ *(risp.* $\langle \updownarrow l_1, \updownarrow l \rangle$*) e* $\langle \updownarrow l, \updownarrow l_2 \rangle$ *(risp.* $\langle \updownarrow l, \updownarrow l_1 \rangle$*);*

- φ *non contiene strettamente cicli, vale a dire* $\forall i, j < k,\ i \neq j \Rightarrow \varphi_i \neq \varphi_j$.

Possiamo farci un'idea più chiara di come sia fatto un interruttore φ vedendo come si comporta di fronte a ognuno dei quattro link che può attraversare:

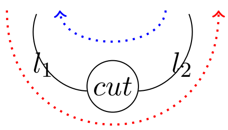
(ax-link)



(3.3.5)

i casi rosso e blu corrispondono rispettivamente alle sotto-sequenze $\langle \uparrow l_1, \downarrow l_2 \rangle$ e $\langle \uparrow l_2, \downarrow l_1 \rangle$.

(cut-link)

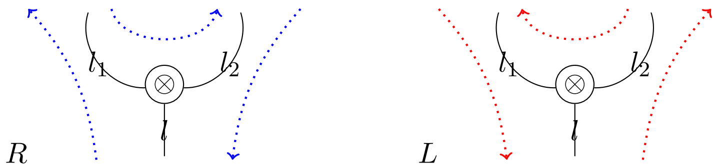


(3.3.6)

i casi rosso e blu corrispondono rispettivamente alle sotto-sequenze $\langle \downarrow l_1, \uparrow l_2 \rangle$ e $\langle \downarrow l_2, \uparrow l_1 \rangle$.

[1] D'ora in poi, con abuso di notazione, scriveremo $\updownarrow l \in \varphi$ per intendere $\varphi_i = \updownarrow l$ per un certo i, $0 < i \leq k$, dove k è la lunghezza del cammino orientato φ.

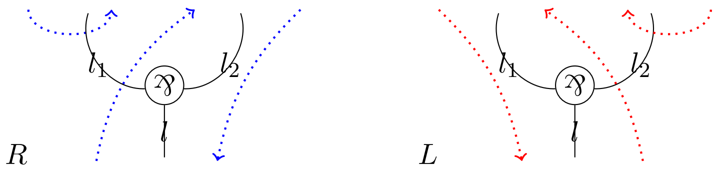
($\otimes$) Ci sono due possibili casi (massimali), mutualmente esclusivi:



(3.3.7)

il primo corrispondente alle sequenze $\langle \uparrow l, \uparrow l_1\rangle, \langle \downarrow l_2, \downarrow l\rangle, \langle \downarrow l_1, \uparrow l_2\rangle$, il secondo alle sequenze $\langle \uparrow l, \uparrow l_2\rangle, \langle \downarrow l_1, \downarrow l\rangle, \langle \downarrow l_2, \uparrow l_1\rangle$. L’interruttore “sceglie” da quale parte uscire dal link.

($\parr$) Anche qui ci sono due possibili casi (massimali), mutualmente esclusivi:



(3.3.8)

il primo corrispondente alle sequenze $\langle \downarrow l_1, \uparrow l_1\rangle, \langle \downarrow l_2, \downarrow l\rangle, \langle \uparrow l, \uparrow l_2\rangle$, il secondo alle sequenze $\langle \downarrow l_2, \uparrow l_2\rangle, \langle \downarrow l_1, \downarrow l\rangle, \langle \uparrow l, \uparrow l_1\rangle$. L’interruttore “sceglie” da quale parte entrare nel link.

Definizione 3.3.3 (giro)**.** *Sia* $\boldsymbol{\pi}$ *una* **PS** *e sia* h *il numero dei suoi lati. Un* giro *attorno a* $\boldsymbol{\pi}$ *è un interruttore* φ *ciclico, ovvero tale* $\varphi_0 = \varphi_k$.

Un giro φ *di lunghezza* k *è detto* lungo *se* $k = 2h$ *e* corto *altrimenti.*

Un giro φ è lungo se, per ogni lato l, si ha $\uparrow l, \downarrow l \in \varphi$ e corto se esiste un lato l tale che $\uparrow l \notin \varphi$ o $\downarrow l \notin \varphi$.

La seguente definizione corrisponde direttamente a ciò che stiamo cercando:

Definizione 3.3.4 (proof-net)**.** *Una* **PS** $\boldsymbol{\pi}$ *è un* proof-net*, o* **PN***, se ogni giro attorno ad essa è lungo.*

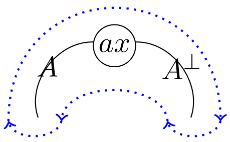
Un proof-net è dunque, intuitivamente, un grafo tale che ogni giro attorno ad esso induce una sequenzializzazione dell’intero grafo. Quello che ci aspettiamo di scoprire è allora, non solo che ogni derivazione di MLL (senza costanti) induca un proof-net, ma che ogni proof-net induca (almeno) una derivazione di MLL.

Verifichiamo anzitutto la prima richiesta:

Teorema 3.3.1. *La procedura descritta nel teorema 3.2.1 a pag. 182, che associa a ogni derivazione* π *di* Γ *in* MLL *(senza costanti) una* **PS** *etichettabile* $\boldsymbol{\pi}$ *le cui conclusioni sono etichettate da tutte e solo le formule di* Γ*, è tale che* $\boldsymbol{\pi}$ *è un* **PN**.

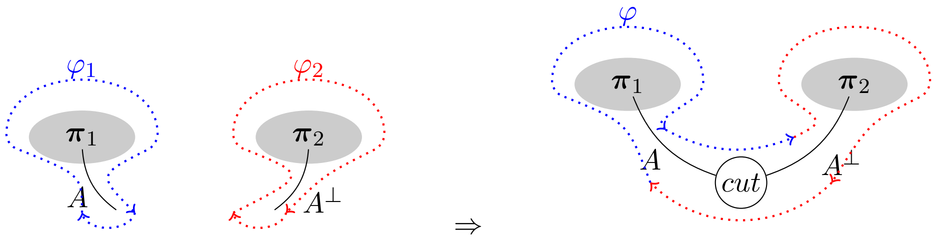
Dimostrazione. Per induzione sulla costruzione delle derivazioni di MLL (senza costanti):

(Ax) Gli unici giri sono (userò l'etichetta del lato come suo nome) $\langle \uparrow A, \downarrow A^\perp, \uparrow A^\perp, \downarrow A\rangle$ e $\langle \uparrow A^\perp, \downarrow A, \uparrow A, \downarrow A^\perp\rangle$ ed entrambi sono lunghi. Ne evidenziamo uno qui sotto:



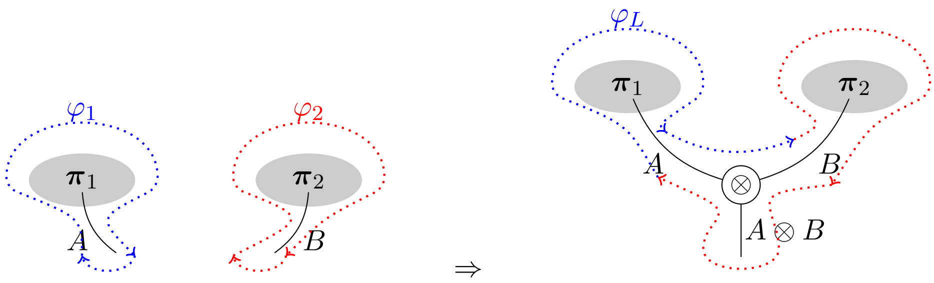
(3.3.9)

(cut) Dati due giri lunghi φ_1, φ_2 nei proof-net $\boldsymbol{\pi_1} = \langle \dots, \downarrow A, \uparrow A, \dots, \rangle$ e $\boldsymbol{\pi_2} = \langle \dots, \downarrow A^\perp, \uparrow A^\perp, \dots \rangle$, costruisco il giro lungo $\varphi = \langle \dots, \downarrow A, \uparrow A^\perp, \dots, \downarrow A^\perp, \uparrow A, \dots \rangle$:



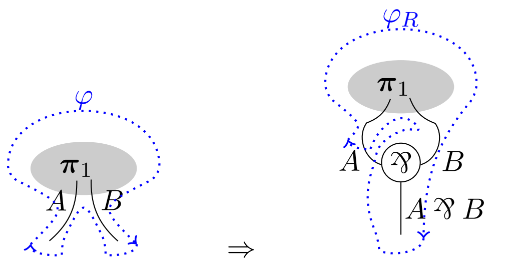
(3.3.10)

($\otimes$) Dati due giri lunghi $\varphi_1 = \langle \dots, \downarrow A, \uparrow A, \dots, \rangle$ e $\varphi_2 = \langle \dots, \downarrow B, \uparrow B, \dots \rangle$ rispettivamente nei proof-net $\boldsymbol{\pi_1}$ e $\boldsymbol{\pi_2}$, costruisco il giro lungo $\varphi_L = \langle \dots, \downarrow A, \uparrow B, \dots, \downarrow B, \downarrow A \otimes B, \uparrow A \otimes B, \uparrow A, \dots \rangle$ oppure il giro lungo $\varphi_R = \langle \dots, \downarrow B, \uparrow A, \dots, \downarrow A, \downarrow A \otimes B, \uparrow A \otimes B, \uparrow B, \dots \rangle$:



(3.3.11)

($⅋$) Dato il giro lungo $\varphi = \langle \dots, \downarrow B, \uparrow B, \dots, \downarrow A, \uparrow A, \dots \rangle$ nel proof-net $\boldsymbol{\pi_1}$, costruisco il giro lungo $\varphi_L = \langle \dots, \downarrow A, \downarrow A \otimes B, \uparrow A \otimes B, \uparrow A, \dots, \downarrow B, \uparrow B, \dots \rangle$ oppure il giro lungo $\varphi_R = \langle \ldots, \downarrow B, \downarrow A \otimes B, \uparrow A \otimes B, \uparrow B, \ldots, \downarrow A, \uparrow A, \ldots \rangle$:



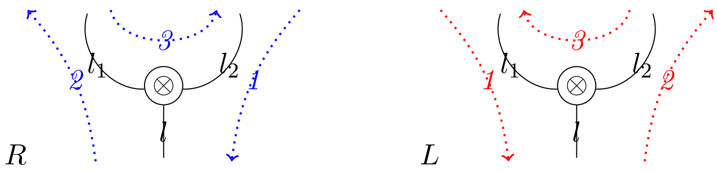
(3.3.12)

□

Dopo aver ottenuto una prima conferma della importanza dei **PN**, enunciamone alcune proprietà che ci saranno utili in seguito:

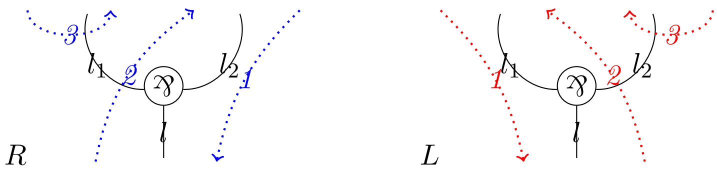
Proposizione 3.3.2 (attraversamento dei $\otimes$-link e $⅋$-link di un **PN**). *Sia* $\boldsymbol{\pi}$ *un proof-net e* φ *un giro attorno ad esso. Allora valgono le seguenti:*

- *Se in* $\boldsymbol{\pi}$ *occorre un* $\otimes$*-link, allora gli ordini di attraversamento da parte di* φ*, per interruttori posti rispettivamente su* R *e* L*, sono i seguenti:*



(3.3.13)

- *Se in* $\boldsymbol{\pi}$ *occorre un* $⅋$*-link, allora gli ordini di attraversamento da parte di* φ*, per interruttori posti rispettivamente su* R *e* L*, sono i seguenti:*



(3.3.14)

Dimostrazione. • Sia φ un giro che attraversa un $\otimes$-link secondo l'ordine $2, 1, 3$, e supponiamo che il suo interruttore sia L, ovvero $\varphi = \langle \downarrow l_1, \downarrow l, \ldots, \downarrow l_2, \uparrow l_1, \ldots, \uparrow l, \uparrow l_2, \ldots, \downarrow l_1 \rangle$ (supponendo di "ruotare" φ così che il suo primo ed ultimo lato sia $\downarrow l_1$). Se adesso cambiamo l'interruttore a R, otteniamo un giro corto $\varphi' = \langle \downarrow l_2, \downarrow l, \ldots, \downarrow l_2 \rangle$.

- Sia φ un giro che attraversa un $⅋$-link secondo l'ordine $2, 1, 3$, e supponiamo che il suo interruttore sia L, ovvero $\varphi = \langle \downarrow l_1, \downarrow l, \ldots, \downarrow l_2, \uparrow l_2, \ldots, \uparrow l, \uparrow l_1, \ldots, \downarrow l_1 \rangle$ (supponendo di "ruotare" φ così che il suo primo ed ultimo lato sia $\downarrow l_1$). Se adesso cambiamo l'interruttore a R, otteniamo un giro corto $\varphi' = \langle \downarrow l_2, \downarrow l, \ldots, \downarrow l_2 \rangle$.

□

Gli imperi Introduciamo adesso la nozione di *impero* di un lato, che ci permetterà di pervenire al teorema di sequenzializzazione.

Definizione 3.3.5 (impero). *Sia $\boldsymbol{\pi}$ un proof-net e sia l una premessa, in $\boldsymbol{\pi}$, di un $\otimes$-link. Sia inoltre φ un giro attorno a $\boldsymbol{\pi}$; definiamo anzitutto φ_l come il sotto-giro di φ che entra ed esce da l, ossia $\varphi_l = \langle \uparrow l, \ldots, \downarrow l \rangle$. La* provincia *di l in φ è definita come $\boldsymbol{\pi}_\varphi(l) := \{l' | \uparrow l', \downarrow l' \in \varphi_l\}$.*

*L'*impero *di l $e(l)$ è definito come l'intersezione delle sue province, ossia $e(l) := \bigcap_\varphi \boldsymbol{\pi}_\varphi(l)$.*

Intuitivamente, l'impero di l è l'insieme dei lati che in una qualsiasi procedura generativa associata a $\boldsymbol{\pi}$ sono costruiti prima di l. Si noti che tale nozione, facendo riferimento a ogni possibile generazione, non può essa stessa essere considerata una nozione generativa, o locale (così come del resto la stessa nozione di proof-net, per lo stesso motivo, non è in alcun modo riducibile ad alcun paradigma generativista). Enunciamo ora le proprietà degli imperi:

Proposizione 3.3.3 (proprietà degli imperi). *Siano l_1, l_2 premesse di un $\otimes$-link di un proof-net $\boldsymbol{\pi}$ e sia l la sua conclusione. Valgono le seguenti:*

(*i*) *$l_1 \in e(l_1)$;*

(*ii*) *$e(l_1) \cap e(l_2) = \emptyset$;*

(*iii*) *se $l' \in e(l_1)$ e l' è connesso a l'' tramite un ax-link, allora $l'' \in e(l_1)$;*

(*iv*) *se $l' \in e(l_1)$ è conclusione di un $\otimes$-link le cui premesse sono l'_1, l'_2, allora $l'_1, l'_2 \in e(l_1)$;*

(*v*) *se $l' \in e(l_1)$ è conclusione di un $⅋$-link le cui premesse sono l'_1, l'_2, allora $l'_1, l'_2 \in e(l_1)$;*

(*vi*) *se l', l'_1, l'_2 sono rispettivamente conclusione e premesse di un $\otimes$-link, $l' \neq l$ (ossia si tratta di un link diverso da quello di l), e $l'_1 \in e(l_1)$ (o $l'_2 \in e(l_1)$), allora $l' \in e(l_1)$;*

(*vii*) *se l', l'_1, l'_2 sono rispettivamente conclusione e premesse di un $⅋$-link, e $l'_1, l'_2 \in e(l_1)$, allora $l' \in e(l_1)$.*

Dimostrazione.

(*i*) Immediata.

(*ii*) Dal primo punto della proposizione 3.3.2 segue che, per ogni giro φ, i sotto-giri φ_{l_1} e φ_{l_2} sono disgiunti.

(*iii*) Segue dal fatto che, se per ogni giro φ, $\uparrow l', \downarrow l' \in \varphi_{l_1}$, allora φ_{l_1} contiene $\langle \uparrow l', \downarrow l'' \rangle$ e $\langle \uparrow l'', \downarrow l' \rangle$.

(*iv*) Sia φ un giro che attraversa il $\otimes$-link di cui l' è conclusione con interruttore su L. Allora sicuramente $\downarrow l'_1, \uparrow l'_2 \in \varphi_{l_1}$, in quanto vengono subito prima e subito dopo rispettivamente di $\downarrow l'$ e $\uparrow l'$ che, per ipotesi, sono in φ_{l_1}. Siano ora per assurdo $\uparrow l'_1, \downarrow l'_2 \notin$

φ_{l_1} e si osservi che sono attraversati da φ consecutivamente; di conseguenza, $\langle\uparrow l'_1, \downarrow l'_2\rangle$ è contenuto in uno dei due sotto-cammini φ', φ'' di φ che partono da $\uparrow l_2$ o da $\downarrow l$, ed entrambi φ', φ'' non attraversano nè il $\otimes$-link di conclusione l nè quello di conclusione l'.

Cambiamo ora interruttore da L a R: avremo che adesso $\downarrow l'_2 \in \varphi_{l_1}$. D'altra parte, per quanto visto, il cambiamento di interruttore non produce alcun cambiamento in φ' e φ'', e dunque questi non conterranno nè $\uparrow l_1$ nè $\downarrow l_2$, il che è assurdo.

(v) Sia φ un giro che attraversa il $⅋$-link di cui l' è conclusione con interruttore su L. E' immediato che $l'_1 \in \boldsymbol{\pi}_\varphi(l_1)$. Supponiamo per assurdo che $l'_2 \notin \boldsymbol{\pi}_\varphi(l_1)$ (si osservi che φ passa per $\downarrow l'_2, \uparrow l'_2$ consecutivamente); di conseguenza, $\langle\downarrow l'_2, \uparrow l'_2\rangle$ è contenuto in uno dei due sotto-cammini φ', φ'' di φ che partono da $\uparrow l_2$ o da $\downarrow l$, ed entrambi φ', φ'' non attraversano nè il $\otimes$-link di conclusione l nè il $⅋$-link di conclusione l'. Cambiando interruttore da L a R si ottiene allora una contraddizione analoga a quella del caso precedente.

(vi) Sia φ un giro che attraversa il $\otimes$-link di cui l' è conclusione con interruttore su L. Avremo sicuramente $\downarrow l'_1, \downarrow l', \downarrow l'_2, \uparrow l'_1 \in \varphi_{l_1}$. Grazie alla proposizione 3.3.2 e modificando eventualmente l'interruttore su R, possiamo ridurci alle seguenti tre possibilità:

$$\begin{aligned}
\varphi_{l_1} &= \langle\uparrow l_1, \ldots, \downarrow l'_1, \downarrow l', \ldots, \uparrow l', \uparrow l'_2, \ldots, \downarrow l'_2, \uparrow l'_1, \ldots, \downarrow l_1\rangle \\
\varphi_{l_1} &= \langle\uparrow l_1, \ldots, \uparrow l', \uparrow l'_2, \ldots, \downarrow l'_2, \uparrow l'_1, \ldots, \downarrow l'_1, \downarrow l', \ldots, \downarrow l_1\rangle \\
\varphi_{l_1} &= \langle\uparrow l_1, \ldots, \downarrow l'_2, \uparrow l'_1, \ldots, \downarrow l'_1, \downarrow l', \ldots, \uparrow l', \uparrow l'_2, \ldots, \downarrow l_1\rangle
\end{aligned} \tag{3.3.15}$$

e dunque in ogni caso $l' \in \boldsymbol{\pi}_\varphi(l_1)$.

(vii) Sia φ un giro che attraversa il $⅋$-link di cui l' è conclusione con interruttore su L. Allora, dal momento che $\downarrow l'_1, \uparrow l'_1 \in \varphi_{l_1}$, si avrà $\downarrow l', \uparrow l' \in \varphi_{l_1}$, in quanto il primo segue $\downarrow l'_1$ ed il secondo precede $\uparrow l'_1$. Se l'interruttore è su R si argomenterà in maniera analoga sfruttando $\downarrow l'_2, \uparrow l'_2 \in \varphi_{l_1}$. In ogni caso, dunque, $l' \in \boldsymbol{\pi}_\varphi(l_1)$.

□

Si osservi, incidentalmente, come i casi (vi) e (vii) della proposizione precedente facciano pensare a una qualche dualità tra proof-net e giri attorno ad essi. Che di una dualità vera e propria si tratta sarà mostrato nel dettaglio nel prossimo paragrafo.

Dimostriamo adesso i tre lemmi che ancora ci separano dalla sequenzializzazione dei proof-net:

Lemma 3.3.4 (giro provinciale)**.** *Sia $\boldsymbol{\pi}$ un proof-net e sia l una premessa di un $\otimes$-link di $\boldsymbol{\pi}$. Allora esiste almeno un giro, detto* giro provinciale*, φ attorno a $\boldsymbol{\pi}$ tale che $e(l) = \boldsymbol{\pi}_\varphi(l)$.*

Dimostrazione. L'idea è di definire esplicitamente φ come segue: partiamo da $\uparrow l$ e, a ogni bivio, scegliamo un lato che ci permette di rimanere dentro $e(l)$: dalla proposizione 3.3.3 sappiamo che l'unico modo per uscire da un impero è attraversare "dall'alto" un $⅋$-link di cui solo una premessa è in $e(l)$ e non la conclusione. In ognuno di questi casi, impostiamo l'interruttore in modo da non entrare nella conclusione del link e tornare indietro (in altre parole, se l' è la premessa in $e(l)$, richiederemo $\varphi_l =\uparrow l \ldots, \downarrow l', \uparrow l', \ldots, \downarrow l'\rangle$). □

Lemma 3.3.5. *Sia $\boldsymbol{\pi}$ un proof-net e sia l una premessa di un $\otimes$-link di $\boldsymbol{\pi}$. Siano inoltre l', l'_1, l'_2 rispettivamente conclusione e premesse di un $\otimes$-link situato "sopra" l, ossia tale che l' sia una premessa ereditaria di l. Allora $e(l'_1), e(l'_2) \subset e(l)$.*

Dimostrazione. Scegliamo un giro provinciale φ e osserviamo che ogni premessa ereditaria di l è sicuramente in $\boldsymbol{\pi}_\varphi(l)$ (proposizione 3.3.3). Possiamo quindi assumere, senza perdita di generalità, che $\varphi_l = \langle \uparrow l, \dots, \uparrow l'_1, \dots, \downarrow l'_1, \dots, \downarrow l \rangle$. Ma allora $e(l'_1)$ è contenuto nell'insieme di lati in cui passa φ_l tra $\uparrow l'_1$ e $\downarrow l'_1$, e dunque sicuramente $e(l'_1) \subset e(l)$. Analogamente si prova che $e(l'_2) \subset e(l)$.

□

Il prossimo lemma è il più importante in quanto mostra come in un proof-net è sempre possibile trovare un $\otimes$-link che divide il grafo in due sotto-grafi che sono ancora proof-net. Questo è evidentemente la chiave per poter sequenzializzare i $\otimes$-link, ovvero per potergli associare una regola sintattica binaria quale è quella che gli attribuisce MLL:

Lemma 3.3.6 (splitting lemma)**.** *Sia $\boldsymbol{\pi}$ un proof-net senza cut-link e che ha, tra le sue conclusioni, almeno la conclusione di un $\otimes$-link e nessuna conclusione di $⅋$-link. Allora almeno uno di questi $\otimes$-link è* splitting*, ovvero, se l_1, l_2 sono le sue premesse, rimuovendone il nodo e la conclusione, si ottengono due distinti proof-net i cui lati sono rispettivamente in $e(l_1)$ e $e(l_2)$ (si ricordi che, per la proposizione 3.3.3, $e(l_1) \cap e(l_2) = \emptyset$).*

Dimostrazione. Scegliamo anzitutto, tra tutti i $\otimes$-link di $\boldsymbol{\pi}$, uno tale che $e(l_1) \cup e(l_2)$ (dove l_1, l_2 sono le sue premesse) sia massimale (rispetto all'inclusione). Dal lemma 3.3.5 segue che tale link è terminale. Sia L l'insieme dei lati di $\boldsymbol{\pi}$. Supponiamo per assurdo che $L \neq e(l_1) \cup e(l_2)$. Mostriamo che esiste un $⅋$-link con premesse l'_1, l'_2 tale che $l'_1 \in e(l_1)$ e $l'_2 \in e(l_2)$ oppure $l'_1 \in e(l_2)$ e $l'_2 \in e(l_1)$: supponiamo che non esista; allora, attraverso il procedimento del lemma 3.3.4, possiamo trovare dei giri provinciali φ_1, φ_2 tali che $e(l_1) = \boldsymbol{\pi}_{\varphi_1}(l_1)$ e $e(l_2) = \boldsymbol{\pi}_{\varphi_2}(l_2)$, da cui segue che il $\otimes$-link è splitting, il che è assurdo.

Di conseguenza il lato l', conclusione del $⅋$-link, non è nè in $e(l_1)$ nè in $e(l_2)$. D'altra parte, sarà premessa ereditaria di un qualche $\otimes$-link, di conclusione l'' e premesse l''_1, l''_2. Supponiamo che l' sia premessa ereditaria di l''_1. Sia φ un giro provinciale per l''_1. Come nella dimostrazione del lemma 3.3.5 possiamo assumere senza perdita di generalità che $\varphi_l = \langle \uparrow l''_1, \dots, \uparrow l', \dots, \downarrow l', \dots, \downarrow l''_1 \rangle$. In virtù del lemma 3.3.2, φ ha la seguente forma:

$$\langle \dots, \uparrow l''_1, \dots, \uparrow l', \uparrow l'_1, \dots, \downarrow l'_2, \uparrow l'_2, \dots, \downarrow l'_1, \downarrow l', \dots, \downarrow l''_1, \dots \rangle \tag{3.3.16}$$

Dal momento che $l'_1 \in e(l_1)$ e $l'_2 \in e(l_2)$, l'unica possibilità per $\uparrow l_1$ è di stare tra $\uparrow l'_1$ e $\downarrow l'_2$ e per $\downarrow l_1$ di stare tra $\uparrow l'_2$ e $\downarrow l'_1$. Ma allora, per il lemma 3.3.5, si ha $e(l_2) \subset e(l''_1)$. Con un argomento analogo si prova $e(l_1) \subset e(l''_1)$, contraddicendo così la massimalità di $e(l_1) \cap e(l_2)$.

Abbiamo così provato che $L = e(l_1) \cup e(l_2)$. Proviamo adesso che i sotto-grafi $\boldsymbol{\pi}_1, \boldsymbol{\pi}_2$ i cui lati sono $e(l_1)$ e $e(l_2)$ sono sconnessi: un eventuale connessione non potrebbe che essere attraverso un $⅋$-link le cui premesse siano una in $e(l_1)$ e una in $e(l_2)$. Ma allora la conclusione del link non sarebbe in $e(l_1) \cup e(l_2)$, il che è assurdo. Si osservi che ogni giro (lungo) di $\boldsymbol{\pi}$ induce due giri lunghi, rispettivamente, di $\boldsymbol{\pi}_1$ e $\boldsymbol{\pi}_2$, e dunque questi ultimi grafi sono proof-net (che siano **PS** è una semplice verifica a partire dalle proprietà degli imperi 3.3.3).

$\square$

Il teorema di sequenzializzazione Siamo adesso finalmente in grado di provare il teorema di sequenzializzazione, e quindi di recuperare entro un criterio di correttezza sintattica non generativo le condizioni di possibilità di una descrizione generativa (sintattica) della logica moltiplicativa:

Teorema 3.3.7 (sequenzializzazione)**.** *Sia $\boldsymbol{\pi}$ un proof-net. Allora esiste una etichettatura di $\boldsymbol{\pi}$ e una derivazione π in MLL (senza costanti) di un sequente $\vdash \Gamma$ tale che le etichette delle conclusioni di $\boldsymbol{\pi}$ corrispondono alle formule in Γ e π induce $\boldsymbol{\pi}$ secondo la procedura esposta nel teorema 3.2.1 a pag. 182.*

Dimostrazione. Per prima cosa modifichiamo $\boldsymbol{\pi}$ sostituendo ogni eventuale *cut*-link con un $\otimes$-link la cui conclusione è una nuova conclusione di $\boldsymbol{\pi}$. E' chiaro che, dal punto di vista geometrico, ossia dei giri, questa modifica non altera il risultato: una volta ottenuta una sequenzializzazione del grafo senza *cut* con più conclusioni sarà sufficiente eliminare le conclusioni in più e sostituire ogni $\otimes$-link la cui conclusione è stata cancellata con un *cut*-link.

La dimostrazione prosegue per induzione sul numero di link di $\boldsymbol{\pi}$:

- se $\boldsymbol{\pi}$ ha un unico link, esso non può che essere un *ax*-link. E' immediato che $\boldsymbol{\pi}$ deriva da $\dfrac{}{\vdash A^{\perp}, A}\,Ax$ per una arbitraria formula del linguaggio di MLL (senza $\perp$ e $\mathbf{1}$).

- se $\boldsymbol{\pi}$ ha più di un link, almeno uno di essi è un $⅋$ oppure è un $\otimes$, altrimenti il grafo sarebbe sconnesso, dunque non un proof-net. Ci sarà dunque almeno un lato conclusione di uno di questi link. Consideriamo anzitutto i $⅋$-link: sia $\boldsymbol{\pi}'$ la **PS** ottenuta da $\boldsymbol{\pi}$ cancellando il $⅋$-link e la sua conclusione l. Siano l_1, l_2 le sue premesse. $\boldsymbol{\pi}'$ è senz'altro un proof-net: infatti a ogni giro (lungo) di $\boldsymbol{\pi}$ è associato un giro lungo di $\boldsymbol{\pi}'$ come segue: se l'interruttore del giro φ è su L, allora $\varphi = \langle \uparrow l_1, \ldots, \downarrow l_2, \uparrow l_2, \ldots, \downarrow l_1, \downarrow l, \ldots, \uparrow l, \uparrow l_1 \rangle$, ed il giro lungo attorno a $\boldsymbol{\pi}'$ è dato da $\langle \uparrow l_1, \ldots, \downarrow l_2, \uparrow l_2, \ldots, \downarrow l_1, \uparrow l_1 \rangle$; similmente nel caso di interruttore su R. Per ipotesi induttiva esiste allora una etichettatura di $\boldsymbol{\pi}'$ e una derivazione π' di MLL (senza costanti) del tipo:

$$\begin{array}{c} \vdots\, \pi' \\ \vdash \Gamma, A, B \end{array} \tag{3.3.17}$$

tale che $\boldsymbol{\pi}'$ deriva da π' e le etichette delle conclusioni di $\boldsymbol{\pi}'$ sono esattamente le formule del sequente derivato da π' (in particolare A e B sono rispettivamente etichette di l_1 e l_2). E' immediato allora che $\boldsymbol{\pi}$ proviene dalla derivazione

$$\dfrac{\begin{array}{c} \vdots\, \pi' \\ \vdash \Gamma, A, B \end{array}}{\vdash \Gamma, A ⅋ B}\,(⅋) \tag{3.3.18}$$

Siamo così ricondotti al caso di $\boldsymbol{\pi}$ privo di *cut*-link e le cui uniche conclusioni sono conclusioni di $\otimes$-link, ossia all'ipotesi dello splitting lemma 3.3.6. Scegliamo un $\otimes$-link che sia splitting e cancelliamolo, assieme alla sua conclusione l. Siano l_1, l_2 le sue due premesse, facenti parte di due *distinti* proof-net $\boldsymbol{\pi}_1, \boldsymbol{\pi}_2$. Per ipotesi induttiva esistono due derivazioni di MLL (senza costanti) π_1 e π_2 del tipo:

$$\begin{array}{c} \vdots\ \pi_1 \\ \vdash \Gamma_1, A \end{array} \qquad \begin{array}{c} \vdots\ \pi_2 \\ \vdash \Gamma_2, B \end{array} \tag{3.3.19}$$

ed etichettature di $\boldsymbol{\pi}_1$ e $\boldsymbol{\pi}_2$ tali che le etichette delle conclusioni di queste formule corrispondono esattamente alle formule dei sequenti derivati da π_1 e π_2, in particolare l_1 e l_2 hanno etichette A e B. E' immediato allora che $\boldsymbol{\pi}$ proviene dalla derivazione

$$\dfrac{\begin{array}{c} \vdots\ \pi_1 \\ \vdash \Gamma_1, A \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots\ \pi_2 \\ \vdash \Gamma_2, B \end{array}}{\vdash \Gamma_1, \Gamma_2, A \otimes B} \ (\otimes) \tag{3.3.20}$$

$\square$

Questo teorema ci assicura che, qualora il grafo $\boldsymbol{\pi}$ soddisfi un certo criterio, di natura essenzialmente topologica, possiamo star certi che esisterà *almeno* una procedura di generazione di $\boldsymbol{\pi}$, che si accorda con le regole della sintassi di MLL. Si noti che, in virtù del teorema 3.3.1, i proof-net soddisfano i requisiti (i) e (ii) di produttività e sistematicità, mentre il loro criterio di correttezza non dipende dalla procedura che li genera. In realtà, come inizieremo a vedere nel prossimo paragrafo, e meglio ancora nel prossimo capitolo, la sequenzializzazione dei grafi costituisce un risultato ben più profondo, in quanto permette di discriminare, all'interno di un universo sintatticamente amorfo come quello dei grafi (e ben più amorfo sarà l'universo degli operatori della Geometria dell'Interazione), quegli artefatti che possono essere considerati come il prodotto generativo di un qualche sistema deduttivo, per mezzo di un criterio che, come vedremo, è costitutivo di quelle stesse norme in virtù di cui tali grafi, una volta sequenzializzati, possono essere considerati logicamente corretti. Il teorema di sequenzializzazione, in ultima analisi, non è un risultato di natura esclusivamente sintattica, ma ci permetterà di realizzare quella fusione di criteri sintattici e semantici che sembrava essere bandita dalla questione della Σ^1-incompletezza (vd. §1.1.5), e di produrre un controesempio agli argomenti generativisti esposti in §3.1.

3.4 Proof-net e dispute

Nel paragrafo precedente abbiamo mostrato come la correttezza sintattica di un grafo (di una **PS**) sia il prodotto dell'interazione di questo grafo con tutti i possibili modi di attraversarlo che siano interruttori, ossia, fondamentalmente, che *scelgano*, per ogni $⅋$-link una tra le due configurazioni L e R in 3.3.8. In questo paragrafo mostreremo che il criterio di correttezza dei proof-net ha direttamente a che fare con la questione della valutazione semantica delle derivazioni (corrette): attraverso le strutture di demoni, infatti, riusciremo a provare l'equivalenza della correttezza sintattica e di quella che in §2.1.3 abbiamo chiamato "legittimità logica". Questa equivalenza, a sua volta, ci permetterà da una parte di rileggere il teorema 3.3.7 di sequenzializzazione (pag. 197) come un teorema di completezza interna analogo a quelli discussi in §2.2.3, e di presentare un controesempio esplicito agli argomenti generativisti presentati in §3.1. In definitiva mostreremo la sequenzializzazione dei proof-net induce un modo completamente nuovo di intendere il rapporto tra sintassi e semantica.

Grafi e spazi coerenti Vediamo anzitutto come l'interazione tra un grafo e un giro attorno ad esso, come già osservato sopra, costituisca una vera e propria dualità, e sia dunque compatibile con l'impostazione strategica che stiamo seguendo sin dal primo capitolo: l'interruttore costituirà l'analogo del contro-modello rispetto alla derivazione di LK, o del contro-design della ludica. In tal modo realizzeremo che *il grafo, quando attraversato da un giro, costituisce il supporto di una interazione* (un "lieu d'interaction" - vd. (Tronçon, [70])), di una disputa tra due contendenti:

Definizione 3.4.1 (esperimento)**.** *Sia* $\boldsymbol{\pi}$ *una* **PS** *e sia* ϵ *una etichettatura di* $\boldsymbol{\pi}$*. Sia inoltre associato a ogni formula* A *che occorre in* $Im(\epsilon)$ *uno spazio coerente* $[\![A]\!]$ *come segue:*

- *se* A *è atomica,* $[\![A]\!]$ *è uno spazio coerente qualsiasi;*
- $[\![A^{\perp}]\!] = [\![A]\!]^{\perp}$*;*
- $[\![A \parr B]\!] = [\![A]\!] \parr [\![B]\!]$*;*
- $[\![A \otimes B]\!] = [\![A]\!] \otimes [\![B]\!]$.

Un esperimento *su* $\boldsymbol{\pi}$ *è una funzione* e_ϵ *che associa a ogni lato di* $\boldsymbol{\pi}$ *con etichetta* A *un punto dello spazio* $[\![A]\!]$ *tale che:*

(i) *se* l, l' *sono conclusioni di un ax-link, allora* $e_\epsilon(l) = e_\epsilon(l')$*;*

(ii) *se* l, l' *sono premesse di un cut-link, allora* $e_\epsilon(l) = e_\epsilon(l')$*;*

(iii) *se* l *è conclusione di un* $\parr$*-link o di un* $\otimes$*-link, con premesse* l_1, l_2*, allora* $e_\epsilon(l) =< e_\epsilon(l_1), e_\epsilon(l_2) >$.

Il risultato $R(e_\epsilon)$ dell'esperimento e_ϵ *è definito come* $R(e_\epsilon) :=< e_\epsilon(l_1), \ldots, e_\epsilon(l_n) >$*, dove* $l_i, 0 < i \leq n$ *sono le conclusioni di* $\boldsymbol{\pi}$.

Definendo, per una etichettatura ϵ, $[\![\boldsymbol{\pi}]\!]_\epsilon = \{R(e_\epsilon) | e_\epsilon \text{ esperimento su } \boldsymbol{\pi}\}$, otteniamo una semantica delle dimostrazioni corretta (e completa[2]) per le **PS**, come mostrato dalla seguente proposizione e dal successivo teorema:

[2]la dimostrazione della completezza, o *iniettività*, è omessa.

Proposizione 3.4.1. *Sia $\boldsymbol{\pi}$ una* **PS** *e ϵ una etichettatura. Allora, se $\boldsymbol{\pi} \rightsquigarrow \boldsymbol{\pi}'$, si ha $[\![\boldsymbol{\pi}]\!]_\epsilon = [\![\boldsymbol{\pi}']\!]_\epsilon$.*

Dimostrazione. Segue dal teorema 3.2.3 di eliminazione dei *cut*-link, dalla proposizione 3.2.2 di stabilità delle etichettature e dal punto (i) della definizione di esperimento. □

Mostreremo adesso come la dualità degli spazi coerenti sia compatibile con il criterio di correttezza delle **PS**, ovvero estenderemo la semantica degli esperimenti a una semantica dei proof-net. La dimostrazione di questo risultato servirà a esplicitare la dualità intrinseca alla coppia *grafo* $\boldsymbol{\pi}$/ *giro attorno a* $\boldsymbol{\pi}$:

Teorema 3.4.2. *Sia $\boldsymbol{\pi}$ una* **PS** *ed ϵ una sua etichettatura. Allora, se $A_1, \ldots, A_n$ sono le etichette delle sue conclusioni, si ha che, se $\boldsymbol{\pi}$ è un proof-net, allora $[\![\boldsymbol{\pi}]\!]_\epsilon \sqsubset [\![A_1]\!] \parr \cdots \parr [\![A_n]\!]$.*

Dimostrazione. Dobbiamo provare che, dati due esperimenti e_ϵ e e'_ϵ, si ha $R(e_\epsilon) \frown R(e'_\epsilon)$. Sia $R(e_\epsilon) =< x_1, \ldots, x_n >$ e $R(e'_\epsilon) =< x'_1, \ldots, x'_n >$, e associamo a ogni formula A del grafo (d'ora in poi identificheremo i lati con le loro rispettive etichette) le sotto-sequenze $< x_{i_A}, \ldots, x_{j_A} >, < x'_{i_A}, \ldots, x'_{j_A} >$ (che scriveremo per brevità a, a') che corrispondono a punti di $[\![A]\!]$. Possiamo assumere senza perdita di generalità che $\boldsymbol{\pi}$ abbia una unica conclusione (basta "chiudere" il grafo con $n-1$ $\parr$-link, senza perdere la correttezza). A partire dall'unica conclusione di $\boldsymbol{\pi}$, costruiremo un giro (lungo) attorno al grafo, supponendo per assurdo, ogni volta che attraverseremo $\uparrow A$, per una certa formula, che $a \asymp a'$ e facendo vedere, quando attraverseremo $\downarrow A$, che vale piuttosto $a \frown a'$. Una volta tornati alla conclusione (sia essa B), avremo provato $b \frown b'$, ossia $R(e_\epsilon) \frown R(e'_\epsilon)$.

(ax-link) Se ci troviamo in $\uparrow A$ e $a \asymp_{[\![A]\!]} a'$, passiamo in $\downarrow A^\perp$, e dunque $a \frown_{[\![A]\!]^\perp} a'$;

(cut-link) Se ci troviamo in $\downarrow A$ sappiamo già $a \frown_{[\![A]\!]} a'$, passiamo in $\uparrow A^\perp$, e dunque $a \asymp_{[\![A]\!]^\perp} a'$;

($\parr$-link, "da sotto") Se ci troviamo in $\uparrow B \parr C$ ed attraversiamo per la prima volta il $\parr$-link, supponiamo $< b, c > \asymp_{[\![B]\!] \parr [\![C]\!]} < b', c' >$, e dunque $b \asymp_{[\![B]\!]} b'$ e $c \asymp_{[\![C]\!]} c'$. Scegliamo un interruttore, ad esempio L. Ci muoviamo dunque in $\uparrow B$ e, per ipotesi induttiva e per il lemma 3.3.2, sappiamo che arriveremo in $\downarrow C$, e dunque $c = c'$, e successivamente in $\downarrow B$, e dunque $b = b'$; arriviamo così in $\downarrow B \parr C$ concludendo $< b, c >=< b', c' >$.

($\parr$-link, "da sopra") Se ci troviamo in $\downarrow B \parr C$ per la prima volta, supponiamo di essere arrivati da $\downarrow B$. Sappiamo dunque che $b \frown_{[\![B]\!]} b'$. Se $< b, c > \frown_{[\![B]\!] \parr [\![C]\!]} < b', c' >$ possiamo scegliere l'interruttore L e verificare, quando arriveremo in $\uparrow B \parr C$, $< b, c >=< b', c' >$. Altrimenti, avremo $b = b'$ e $c \smile_{[\![C]\!]} c'$, e possiamo scegliere l'interruttore R: quando arriveremo in $\downarrow C$, avremo $c \frown_{[\![C]\!]} c'$, un assurdo.

($\otimes$-link, "da sotto") Se ci troviamo in $\uparrow B \otimes C$ ed attraversiamo per la prima volta il $\otimes$-link, possiamo assumere $< b, c > \smile_{[\![B]\!] \otimes [\![C]\!]} < b', c' >$, e dunque $b \smile_{[\![B]\!]} b'$ o $c \smile_{[\![C]\!]} c'$. Supponiamo valga la prima: scegliamo l'interruttore L e verifichiamo che, quando arriveremo in $\downarrow B$, avremo $b \frown_{[\![B]\!]} b'$, ovvero una contraddizione.

($\otimes$-link, "da sopra") Se ci troviamo in $\downarrow B \otimes C$ ed attraversiamo per la prima volta il $\otimes$-link. Supponiamo di provenire da $\downarrow B$, e dunque $b \overset{\frown}{\smile}_{[\![B]\!]} b'$. Possiamo ragionare come nell'analogo caso del $⅋$-link.

(secondo e terzo ingresso) I casi di secondo e terzo ingresso in un $⅋$-link o in un $\otimes$-link sono a questo punto una semplice verifica, in quanto gli interruttori sono già impostati.

$\square$

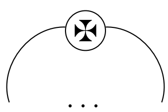
D'altra parte vale anche l'inverso, ossia che se $[\![\boldsymbol{\pi}]\!]_\epsilon$ è una cricca, allora $\boldsymbol{\pi}$ è un proof-net, ma la dimostrazione sarà omessa (si veda (Retoré, [63])).

Questi risultati mostrano come sia possibile concepire una **PS** come un luogo geometrico in cui ha luogo una forma di interazione.

Le strutture di demoni Tuttavia, le forme di interazione che avevano considerato nei capitoli precedenti avevano tutte a che fare con la dinamica della eliminazione del taglio, consistendo nelle dispute tra artefatti sintattici tra loro polari. Ci occuperemo adesso non solo di estendere questa impostazione al caso delle **PS**, ma anche di provarne l'equivalenza con quella basata sui giri. I risultati che seguiranno costituiscono un tentativo di formalizzare una serie di osservazioni fatte in più luoghi dallo stesso Girard (vd. soprattutto (Girard [32])).

Definizione 3.4.2 (para-**PS**)**.** *Una* para-struttura dimostrativa*, o para-***PS***, è definita come una* **PS** *(etichettabile), con in più il seguente link:*

($\maltese$-link)



(3.4.1)

che non ha nessuna premessa e può avere n conclusioni, $n \in \mathbb{N}$ (eventualmente zero).

Il caso più semplice di para-**PS** è la para-**PS** chiusa:

$$\maltese \tag{3.4.2}$$

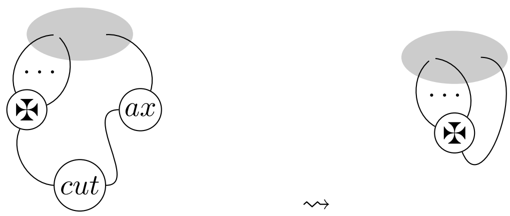
Per i nostri scopi, faremo riferimento esclusivamente alle para-**PS** *atomicamente etichettabili* (*a.e.*), ossia a quelle para-**PS** che ammettono una etichettatura che associa alle conclusioni dei $\maltese$-link formule atomiche. Avremo a che fare dunque con grafi che rappresentano l'analogo degli ultimi stadi (quando esistono) dell'analisi canonica 1.2.2 (pag. 47). In particolare, in una para-**PS** a.e. le conclusioni di un $\maltese$-link possono essere premessa di un *cut*-link solo se l'altra premessa di tale link è conclusione di un *ax*-link o di un altro $\maltese$-link. Possiamo così estendere la procedura di eliminazione dei *cut*-link:

Definizione 3.4.3. *Alla definizione 3.2.3 di eliminazione dei cut-link di una* **PS** *sono aggiunti i seguenti due casi:*

(*iv*) *Le premesse del cut-link sono entrambe conclusioni di* $\maltese$*-link:*

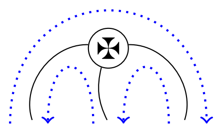
(3.4.3)

(*v*) *Le premesse del cut-link sono conclusioni una di un* $\maltese$*-link e l'altra di un ax-link:*



(3.4.4)

La stabilità delle etichettature rispetto a queste nuove riduzioni è immediata. Possiamo inoltre facilmente vedere come si comporta un interruttore quando attraversa un $\maltese$-link; ad esempio consideriamo il caso in cui il link abbia tre conclusioni:

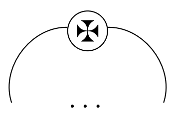


(3.4.5)

Possiamo infine estendere i risultati più importanti del precedente paragrafo al caso delle para-**PS**: definiamo anzitutto *para-proofnet* (o para-**PN**) una para-**PS** in cui ogni giro è lungo.

Proposizione 3.4.3. *Una para-***PS** $\boldsymbol{\pi}$ *è un para-proofnet se e solo se proviene da una derivazione* π *di* $MLL_{\maltese}$ *(sempre senza costanti).*

Dimostrazione. Per provare che a ogni derivazione di $MLL_{\maltese}$ sia associato un para-proofnet è sufficiente, rispetto al teorema 3.2.1, è sufficiente osservare che il grafo



(3.4.6)

con n conclusioni, associato alla derivazione (con $\sharp\Gamma = n$)

$$\frac{}{\vdash \Gamma}\ \maltese \qquad (3.4.7)$$

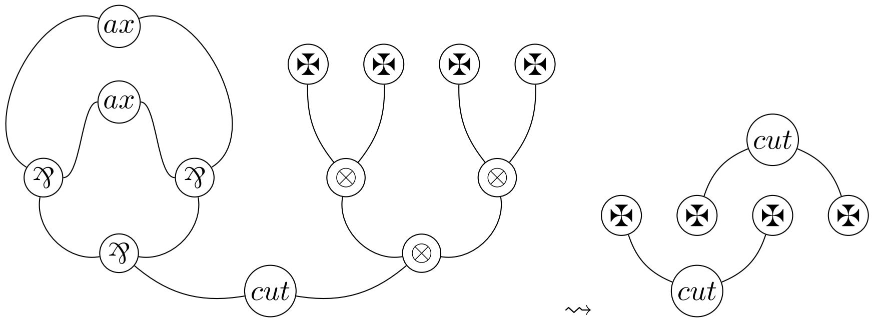
è sicuramente un proof-net. D'altra parte, questa osservazione è di per sè sufficiente anche per la sequenzializzazione, se aggiungiamo il caso 3.4.6 come caso base nell'induzione del teorema 3.3.7 di sequenzializzazione (pag. 197). □

La teoria dei grafi con almeno un ✠-link è in realtà molto più semplice della teoria delle strutture dimostrative, dal momento che, durante l'eliminazione dei *cut*-link, i demoni "mangiano tutto quello che trovano":

Definizione 3.4.4 (struttura di demoni)**.** *Una* struttura di demoni *(o* **DS***) è una para-***PS** *i cui unici link sono ✠-link e cut-link.*

Proposizione 3.4.4. *Sia* $\boldsymbol{\pi}$ *una para-***PS** *(a.e.) con almeno un ✠-link e un cut-link. Allora esistono* **DS** $\boldsymbol{\lambda}_1, \ldots, \boldsymbol{\lambda}_n$ *tale che* $\boldsymbol{\pi} \rightsquigarrow \boldsymbol{\lambda}_1 \cup \cdots \cup \boldsymbol{\lambda}_n$.

Dimostrazione. Basta osservare che ogni *cut*-link su conclusioni di link binari si riduce a *cut*-link sulle premesse e dunque, essendo etichettabile, $\boldsymbol{\pi}$ si riduce a una para-**PS** che ha solo ✠-link, *cut*-link e *ax*-link. Basta allora verificare che i demoni "mangiano gli assiomi" (definizione 3.4.3). Che non si ottenga in ogni caso una unica **DS** è mostrato dal seguente esempio:



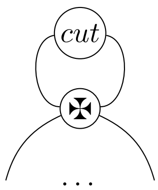
(3.4.8)

□

Proposizione 3.4.5. *Una* **DS** *converge se e solo se è un para-proof-net.*

Dimostrazione. Sia $\boldsymbol{\lambda}$ una **DS** e $G_{\boldsymbol{\lambda}}$ il grafo che ha per nodi i ✠-link di $\boldsymbol{\lambda}$ e per lati le coppie di nodi connesse da un *cut*-link. E' facile rendersi conto che $\boldsymbol{\lambda}$ è un para-proof-net se e solo se $G_{\boldsymbol{\lambda}}$ è un albero: a ogni eventuale ciclo di $G_{\boldsymbol{\lambda}}$ è infatti associato un giro corto attorno a $\boldsymbol{\lambda}$.

Ora, se $G_{\boldsymbol{\lambda}}$ è un albero, la riduzione di $\boldsymbol{\lambda}$ termina in un unico ✠-link che ha tante conclusioni quante sono le conclusioni di $\boldsymbol{\lambda}$. Se invece $G_{\boldsymbol{\lambda}}$ ha un ciclo, la riduzione porta alla **DS** seguente:



(3.2.7)

la quale chiaramente diverge. □

L'attraversamento come interazione Consideriamo adesso una **PS** $\boldsymbol{\pi}$ con una unica conclusione (di etichetta A) (al solito, se ne ha molte, chiudiamole con un numero sufficiente di $⅋$-link). Ci serviremo della seguente definizione:

Definizione 3.4.5 (giri compatibili)**.** *Siano φ, ψ giri attorno a una* **PS** $\boldsymbol{\pi}$*. Allora φ e ψ sono detti* compatibili *se (con abuso di notazione) $\varphi \cap \psi = \emptyset$, ovvero se non contengono lati orientati in comune.*

Evidentemente, ogni giro lungo è incompatibile con ogni altro giro. Inoltre, ogni insieme di giri a due a due compatibili è sicuramente finito. Del resto, se $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}, n \in \mathbb{N}$ è un insieme di giri a due a due compatibili, diremo che è *massimale* (e lo chiameremo, per brevità, un *i.c.m.*) se, per ogni lato l di $\boldsymbol{\pi}$, esistono $h, k \in \mathbb{N}, 1 \leq h, k \leq n$ tali che $\uparrow l \in \varphi_h$ e $\downarrow l \in \varphi_k$. E' possibile verificare che, dato un *i.c.m.* Φ, ogni $\varphi \in \Phi$ associa ad ogni $⅋$-link di $\boldsymbol{\pi}$, se lo attraversa, lo stesso interruttore (L o R).

Assoceremo a ogni *i.c.m.* su $\boldsymbol{\pi}$ (con unica conclusione etichettata A) un unico para-**PN** $\boldsymbol{\lambda}$ con una unica conclusione di etichetta $A^\perp$. Per assicurarci che $\boldsymbol{\lambda}$ sia un para-proof-net, passeremo attraverso il calcolo dei sequenti $MLL_{\maltese}$:

Definizione 3.4.6. *Sia $\boldsymbol{\pi}$ una* **PS** *etichettata senza cut-link con un'unica conclusione etichettata A e sia Φ un i.c.m. su $\boldsymbol{\pi}$. Consideriamo l'ordine ben fondato e diretto $\preceq_{\boldsymbol{\pi}}$ sui lati di $\boldsymbol{\pi}$ definito da $l \preceq_{\boldsymbol{\pi}} l'$ se e solo se l' è premessa ereditaria di l.*

La paraprova π_Φ associata a $\boldsymbol{\pi}$ è definita per induzione su $\preceq_{\boldsymbol{\pi}}$ a partire dalla conclusione l_0 di $\boldsymbol{\pi}$ come segue:

(base) *π_{l_0} è il sequente $\vdash A^\perp$;*

(induzione) *supponiamo definita la π_l, con l conclusione di un link L di $\boldsymbol{\pi}$.*

($\otimes$-link) *se L è un $\otimes$-link di premesse l_1, l_2 etichettate rispettivamente C e D, e dunque a l è associata una premessa di π_l del tipo*

$$\begin{array}{c} \vdash C^\perp ⅋ D^\perp, \Delta \\ \vdots \end{array} \tag{3.4.9}$$

allora $\pi_{l_1} = \pi_{l_2}$ estende π_l come segue:

$$\begin{array}{c} \dfrac{\vdash C^\perp, D^\perp, \Delta}{\vdash C^\perp ⅋ D^\perp, \Delta}\,(⅋) \\ \vdots \end{array} \tag{3.4.10}$$

($⅋$-link) *se l è conclusione di un $⅋$-link di premesse l_1, l_2 etichettate rispettivamente C e D, e dunque a l è associata una premessa di π_l del tipo*

$$\begin{array}{c} \vdash C^\perp \otimes D^\perp, \Delta \\ \vdots \end{array} \tag{3.4.11}$$

e se l'interruttore di Φ è su L, allora $\pi_{l_1} = \pi_{l_2}$ estende π_l come segue:

$$\cfrac{\vdash C^\perp, \Delta \quad \vdash D^\perp}{\vdash C^\perp \otimes D^\perp, \Delta}\ (\otimes) \atop \vdots \tag{3.4.12}$$

se l'interruttore di Φ è su R, allora $\pi_{l_1} = \pi_{l_2}$ estende π_l come segue:

$$\cfrac{\vdash C^\perp \quad \vdash D^\perp, \Delta}{\vdash C^\perp \otimes D^\perp, \Delta}\ (\otimes) \atop \vdots \tag{3.4.13}$$

(ax-link) *se l è conclusione di un ax-link, e dunque a l è associata una premessa di π_l del tipo:*

$$\vdash \Gamma \atop \vdots \tag{3.4.14}$$

e c'è una formula in Γ non atomica, allora procedi con i casi $\otimes$-link e $⅋$-link. Se tutte le formula in Γ sono atomiche, allora π_l è estesa come segue

$$\cfrac{}{\vdash \Gamma}\ \maltese \atop \vdots \tag{3.4.15}$$

Si noti che i passi appena descritti non definiscono una procedura univoca (deterministica) per la costruzione del para-proofnet: nel caso di due link "paralleli", ovvero le cui conclusioni sono premesse di uno stesso link, sarà sempre necessario scegliere quale dei due considerare per primo. Supponiamo dunque di aver definito $\boldsymbol{\pi}_l$, per ogni lato l: definiamo infine $\pi_\Phi :=\uparrow \bigcup_{l \in \mathcal{L}_{\boldsymbol{\pi}}} \pi_l$ (dove $\mathcal{L}_{\boldsymbol{\pi}}$ è l'insieme dei lati di $\boldsymbol{\pi}$). Il para-proof-net $\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{\Phi}}$ è definito come il para-proof-net indotto da π_Φ.

Lemma 3.4.6. *Se una* **PS** $\boldsymbol{\pi}$ *senza cut-link ha un giro corto φ, allora φ attraversa almeno un ax-link.*

Dimostrazione. Sia $\varphi \in \Phi$, con quest'ultimo *i.c.m* e consideriamo il sotto-grafo di $\boldsymbol{\pi}$ indotto da Φ: si tratta del grafo $\boldsymbol{\pi}'$ che ha per nodi i link di $\boldsymbol{\pi}$ e per lati i lati di $\boldsymbol{\pi}$ che soddisfano almeno uno dei seguenti requisiti:

- l è una conclusione di $\boldsymbol{\pi}$;
- l è premessa di un $\otimes$-link;
- l è premessa di un $⅋$-link di conclusione l' e $\langle \uparrow l', \uparrow l \rangle$ e $\langle \downarrow l, \downarrow l' \rangle$ sono sottosequenze, rispettivamente, di due giri $\varphi, \psi \in \Phi$ (non necessariamente distinti, e dunque non necessariamente corti).

Intuitivamente il grafo $\boldsymbol{\pi}'$ è il sotto-grafo di $\boldsymbol{\pi}$ i cui cammini sono "contornati" dai giri in Φ. Tale grafo ha la seguente proprietà:

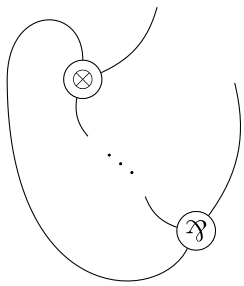
$$\boldsymbol{\pi}' \textit{ è un albero se e solo se } \sharp\Phi = 1 \textit{ (ossia } \varphi \textit{ è lungo)}$$

In effetti è facile convincersi che, se $\boldsymbol{\pi}'$ ha un ciclo, i contorni del ciclo saranno due distinti interruttori ciclici, ovvero due giri corti compatibili e se $\boldsymbol{\pi}'$ è sconnesso i contorni delle componenti connesse saranno due giri corti compatibili. D'altra parte, se $\boldsymbol{\pi}'$ è un albero, il suo contorno costituisce un unico interruttore ciclico, ovvero un giro lungo.

Supponiamo che φ sia corto. Distinguiamo due casi:

(i) φ è tale che, per ogni lato l, si ha $\uparrow l \in \varphi \Leftrightarrow \downarrow l \in \varphi$. Se $\boldsymbol{\pi}'$ fosse connesso, allora φ sarebbe lungo, in quanto il contorno interno di un ciclo in $\boldsymbol{\pi}'$ indurrebbe almeno un lato tale che uno solo tra $\uparrow l$ e $\downarrow l$ sia in φ, il che è assurdo. $\boldsymbol{\pi}'$ è dunque sconnesso. E' chiaro allora che φ attraversa almeno un ax-link: supponiamo che non lo faccia, allora φ attraversa solo link binari; tuttavia, possiamo iterativamente passare da un link ad almeno una delle sue premesse: raggiungiamo la conclusione $\uparrow l$ di un ax-link; ma allora, per le proprietà di φ, si ha $\downarrow l, \uparrow l', \downarrow l' \in \varphi$, dove l' è l'altra conclusione dell'ax-link.

(ii) Esiste almeno un lato l tale che, poniamo, $\uparrow l \in \varphi$ ma $\downarrow l \notin \varphi$. E' chiaro allora che la componente connessa di $\boldsymbol{\pi}'$ di cui φ è il contorno non può essere aciclica. Ora, certamente un grafo fatto solo di $\otimes$ e $\parr$ link con un ciclo non può essere etichettabile, in quanto dovrà ospitare una costruzione del tipo della 3.2.23 a pag. 186:



(3.4.16)

□

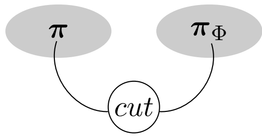
Si osservi che, dato un $i.c.m$ Φ e due giri $\varphi, \psi \in \Phi$, se per ogni l di $\boldsymbol{\pi}$ tale che $\uparrow l \in \varphi$ (risp. $\downarrow l \in \varphi$) si ha che $\downarrow l \in \psi$ (risp. $\uparrow l \in \psi$), allora φ e ψ contornano una stessa componente connessa di $\boldsymbol{\pi}'$ (con le notazioni del precedente lemma), in quanto φ è, per così dire, "all'interno" dell'area contornata da ψ (o viceversa). In tal caso diremo che φ è *interno* a ψ. Le componenti connesse di $\boldsymbol{\pi}'$ sono in corrispondenza biunivoca con gli elementi di $\Phi' = \Phi/\sim$, quoziente di Φ modulo la relazione

$$\varphi_1 \sim \varphi_2 \Leftrightarrow \varphi_1 \text{ è interno a } \varphi_2 \text{ o } \varphi_2 \text{ è interno a } \varphi_1 \text{ o } \varphi_1 = \varphi_2 \qquad (3.4.17)$$

In virtù del precedente lemma, ogni componente connessa di $\boldsymbol{\pi}'$ è una struttura dimostrativa, con l'unica differenza (rispetto alla definizione ufficiale) che i suoi $\parr$-link hanno solamente una premessa (e una conclusione).

L'equivalenza tra giri e para-proof-net duali che vogliamo dimostrare ha la seguente forma:

Teorema 3.4.7. *Sia* $\boldsymbol{\pi}$ *una* **PS** *senza cut-link e* Φ *un i.c.m su* $\boldsymbol{\pi}$*. Allora si ha che* $\sharp\Phi = 1$ *se e solo se l'eliminazione del cut-link della para-***PS** *seguente*



(3.4.18)

che chiameremo $\boldsymbol{\pi} \leftrightharpoons \boldsymbol{\pi}_\Phi$*, converge a una unica* **DS** *(ovvero il risultato è un grafo connesso).*

Dimostrazione. L'idea è di associare a ogni classe $[\varphi] \in \Phi'$ una **DS** $\boldsymbol{\lambda}_{[\varphi]}$ tale che $\boldsymbol{\pi} \leftrightharpoons \boldsymbol{\pi}_\Phi \rightsquigarrow \boldsymbol{\lambda}_\Phi = \bigcup_{[\varphi]\in\Phi'} \boldsymbol{\lambda}_{[\varphi]}$ senza passare attraverso la definizione 3.4.6, e successivamente verificare che $\sharp\Phi = 1$ se e solo se $\sharp\Phi' = 1$ e, per $[\varphi] \in \Phi'$, $G_{\boldsymbol{\lambda}_{[\varphi]}}$ è un albero.

Consideriamo, per ogni $[\varphi] \in \Phi'$, la componente connessa $\boldsymbol{\pi}'_{[\varphi]}$ di $\boldsymbol{\pi}'$ associata a $[\varphi]$ e, su essa, il seguente quoziente sui lati di $\boldsymbol{\pi}'_{[\varphi]}$ che sono conclusioni di ax-link: $l \sim l'$ se e solo se esiste un cammino in $\boldsymbol{\pi}'$ da l a l' che non attraversa conclusioni di ax-link diverse da l, l'. Ad ogni classe $[l]_\sim$ di equivalenza associamo un $\maltese$-link che ha come conclusioni gli elementi di $[l]_\sim$. Si noti che tale quoziente è ben definito nel senso che, se esiste un cammino in $\boldsymbol{\pi}'$ da l a l' che non attraversa ax-link, con l lato di $\boldsymbol{\pi}'_{[\varphi_1]}$ e l' lato di $\boldsymbol{\pi}'_{[\varphi_2]}$, allora sicuramente $[\varphi_1] = [\varphi_2]$.

Definiamo allora $\boldsymbol{\lambda}_{[\varphi]}$ tramite il suo grafo $G_{\boldsymbol{\lambda}_{[\varphi]}}$ come segue: i nodi sono i $\maltese$-link appena costruiti e due di questi link L, L' sono connessi da un lato se esistono due lati l, l', conclusioni rispettivamente di L e L', che sono conclusioni di un ax-link di $\boldsymbol{\pi}$.

Dobbiamo ora provare che $\boldsymbol{\pi} \leftrightharpoons \boldsymbol{\pi}_\varphi \rightsquigarrow \boldsymbol{\lambda}_\Phi$. Per prima cosa mostriamo che ogni $\maltese$-link di $\boldsymbol{\lambda}_\Phi$ corrisponde esattamente a un $\maltese$-link di $\boldsymbol{\pi}_\Phi$: siano l, l' lati di $\boldsymbol{\pi}$ con etichette atomiche; procediamo per casi:

(i) se l, l' sono premesse di un $\otimes$-link, allora sicuramente gli corrisponderanno due conclusioni di un $\maltese$-link di $\boldsymbol{\lambda}_{[\varphi]}$, per un certo $\varphi \in \Phi$, e d'altra parte $\langle l, l'\rangle$ sarà un cammino di $\boldsymbol{\pi}'$ che non attraversa ax-link, e dunque $l' \in [l]_\sim$. Del resto, in virtù della definizione 3.4.6, esisterà in $\boldsymbol{\pi}_\Phi$ un $\maltese$-link che ha, tra le sue conclusioni, i due lati l, l'.

(ii) se l, l' sono premesse di un $\parr$-link, allora gli corrisponderanno due conclusioni di $\maltese$-link distinti rispettivamente di $\boldsymbol{\lambda}_{[\varphi_1]}$ e di $\boldsymbol{\lambda}_{[\varphi_1]}$, con $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$. D'altra parte, a seconda dell'interruttore di Φ, uno tra l e l' non sarà un lato di $\boldsymbol{\pi}'$, e dunque $l' \notin [l]_\sim$. Del resto, in virtù della definizione 3.4.6, in $\boldsymbol{\pi}_\Phi$ i due lati l, l' saranno distribuiti a due $\maltese$-link distinti.

(*iii*) se non sono premesse di uno stesso link, saranno premesse di link distinti e possiamo passare alle conclusioni dei link di cui sono premesse tornando a (*i*). Si può così facilmente verificare, per induzione sull'ordine $\preceq_{\boldsymbol{\pi}}$ che la distribuzione dei lati conclusione di *ax*-link di $\boldsymbol{\pi}$ tra i $\maltese$-link di $\boldsymbol{\pi}_\Phi$ e tra i $\maltese$-link di $\boldsymbol{\lambda}_\Phi$ è assolutamente identica.

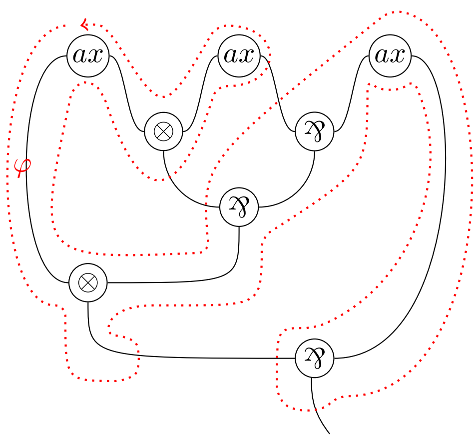
Si noti che il caso in cui raggiungo la conclusione di $\boldsymbol{\pi}$ è sempre uno tra (*i*) e (*ii*). Inoltre, l'identificazione tra i $\maltese$-link di $\boldsymbol{\lambda}_\Phi$ e i $\maltese$-link di $\boldsymbol{\pi}_\Phi$ induce una corrispondenza biunivoca tra conclusioni di $\maltese$-link di $\boldsymbol{\pi}_\Phi$ e conclusioni di *ax*-link di $\boldsymbol{\pi}$ che, lo si verifica facilmente per induzione, è preservata durante l'eliminazione dei *cut*-link: arriveremo cioè a una para-**PS** in cui ogni conclusione di un *ax*-link di $\boldsymbol{\pi}$ è connessa tramite *cut*-link con la conclusione di un $\maltese$-link di $\boldsymbol{\pi}_\Phi$ ad essa associata. Ulteriori passi di computazione produrranno allora proprio $\boldsymbol{\lambda}_\Phi$ come risultato.

A questo punto, dalla proposizione 3.4.5 segue che l'ulteriore esecuzione dell'eliminazione dei *cut*-link a partire da $\boldsymbol{\lambda}_\Phi$ converge se e solo se, per ogni $[\varphi] \in \Phi'$, $G_{\boldsymbol{\lambda}_{[\varphi]}}$ è un albero ed il suo risultato è connesso se e solo se $\sharp\Phi' = 1$.

Rimane a questo punto da provare che $\sharp\Phi = 1$ se e solo se $\sharp\Phi' = 1$ e, per l'unico $[\varphi] \in \Phi'$, $G_{\boldsymbol{\lambda}_{[\varphi]}}$ è un albero. Sia $\sharp\Phi = 1$ e sia, per assurdo, $G_{\boldsymbol{\lambda}_{[\varphi]}}$ sconnesso o con un ciclo. Entrambi i casi danno luogo a due giri compatibili distinti, il che è assurdo. Viceversa, da $\sharp\Phi' = 1$ segue che $\boldsymbol{\pi}'$ (e dunque anche $G_{\boldsymbol{\lambda}_{[\varphi]}}$) è connesso; se esistessero due giri distinti φ_1, φ_2 tali che l'uno, ad esempio φ_1, è interno all'altro, allora $G_{\boldsymbol{\lambda}_{[\varphi_1]}}$ avrebbe un ciclo.

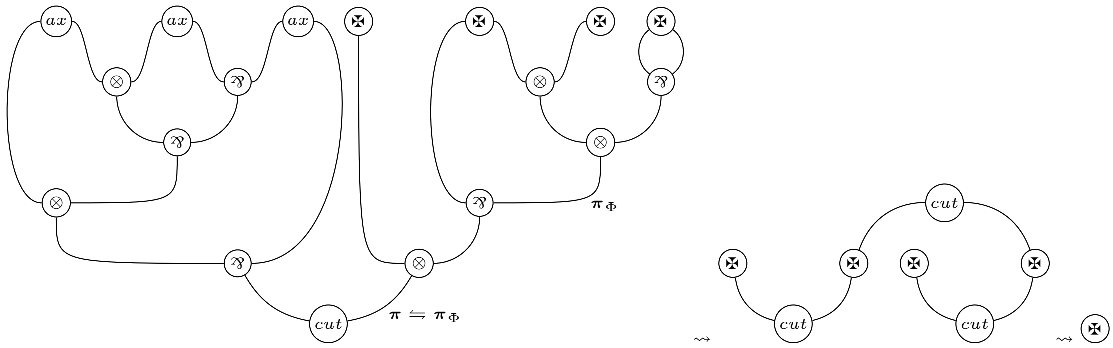
$\square$

Il contenuto geometrico del precedente teorema è reso probabilmente più chiaro dai seguenti esempi che non da una lunga dimostrazione: nel primo caso abbiamo a che fare con una **PS** $\boldsymbol{\pi}$ (che è il duale, nel senso dell'inversione di nodi e lati, del grafo scorretto 3.1.7 presentato in §3.1) ed un suo giro lungo φ, qui sotto evidenziato:



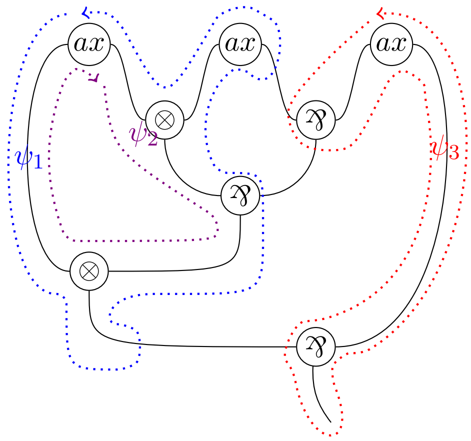
(3.4.19)

il quale induce la seguente disputa convergente $\boldsymbol{\pi} \leftrightharpoons \boldsymbol{\pi}_\Phi$, con $\Phi = \{\varphi\}$:



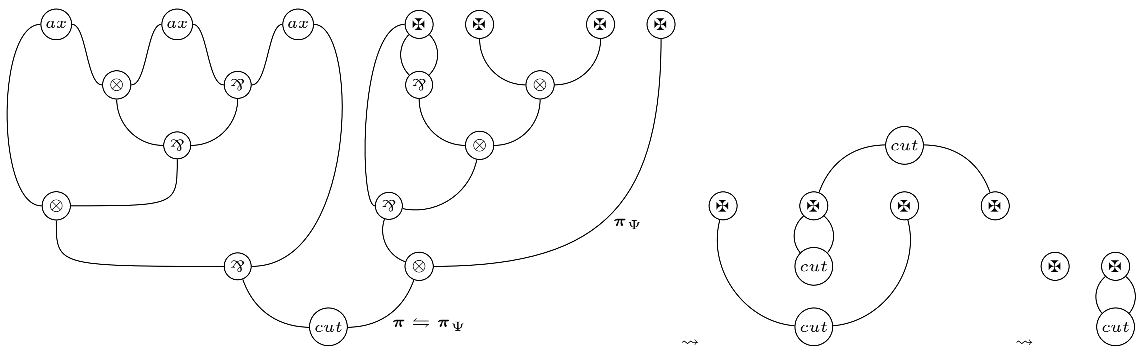
(3.4.20)

Nel secondo caso vediamo l' *i.c.m* $\Psi = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$ attorno a $\boldsymbol{\pi}$:



(3.4.21)

e la disputa sconnessa e divergente indotta $\boldsymbol{\pi} \leftrightharpoons \boldsymbol{\pi}_\Psi$:



(3.4.22)

La completezza interna Il teorema 3.4.7 ci permette di rileggere la sequenzializzazione (teorema 3.3.7 a pag. 197) come una forma di *completezza interna*, ovvero in analogia con i risultati ottenuti in §2.2.3: consideriamo infatti l'insieme delle **PS** etichettabili con conclusione etichettata A che provengono da derivazioni di MLL (senza costanti) una *etica* $\mathbf{E}_A$ per la formula A. D'altra parte, ogni giro φ su una delle **PS** in $\mathbf{E}_A$ induce una $\boldsymbol{\pi}_\varphi$, ovvero un *test* per i grafi in $\mathbf{E}_A$. Se si osserva, come fa Girard (vd. (Girard, [32])), che l'insieme dei test definito tramite i giri è *denso* nell'insieme più generale dei test per $\mathbf{E}_A$, si vede come la sequenzializzazione corrisponde così direttamente alla completezza interna, ovvero a $\mathbf{E}_A^{\sim\sim} = \mathbf{E}_A$:

Teorema 3.4.8 (completezza interna del $\parr$)**.** *Una* **PS** $\boldsymbol{\pi}$ *senza cut-link e con una unica conclusione di etichetta* $A \parr B$ *proviene dal calcolo dei sequenti* MLL *se e solo se, per ogni i.c.m.* Φ *attorno ad essa,* $\boldsymbol{\pi} \leftrightharpoons \boldsymbol{\pi}_\Phi$ *converge a un grafo connesso.*

Teorema 3.4.9 (completezza interna del $\otimes$)**.** *Una* **PS** $\boldsymbol{\pi}$ *senza cut-link e con una unica conclusione di etichetta* $A \otimes B$ *proviene dal calcolo dei sequenti* MLL *se e solo se, per ogni i.c.m.* Φ *attorno ad essa,* $\boldsymbol{\pi} \leftrightharpoons \boldsymbol{\pi}_\Phi$ *converge a un grafo connesso.*

Vedere, attraverso la teoria delle strutture di demoni, la sequenzializzazione come una forma di completezza interna significa riconoscere in essa l'affermazione dell'inestricabilità dei criteri di correttezza sintattica (generatività) e di quelli di correttezza (o meglio legittimità - vd. §2.2.2) logica (valutabilità) di MLL: *le dispute delle pagine precedenti sono allo stesso tempo un tentativo, da parte di* $\boldsymbol{\pi}_\Phi$*, di comprendere, e dunque valutare, la correttezza logica di* $\boldsymbol{\pi}$*, quanto una ricerca di una via di accesso di tipo generativo a* $\boldsymbol{\pi}$*, ovvero un tentativo di sequenzializzazione.* Questi due aspetti, come mostrato dal teorema 3.4.7 a pag. 207, non sono che modi diversi di descrivere la stessa cosa. Inaugurando un varco tra sintassi e semantica (e quindi, come vedremo, tra Π^1 e Σ^1), il teorema 3.3.7 (pag. 197) apre la strada per una sintassi davvero *trascendentale*, in quanto *non interessata a una qualche sintassi in particolare, ma alla possibilità in generale che ne esista (almeno) una.*

La sintassi non generativa Ricapitolando, la teoria dei proof-net ci ha condotto alla seguente equivalenza:

$$\pi \textit{ è sintatticamente corretta se e solo se supera tutti i test (corretti)} \tag{3.4.23}$$

vale a dire:

$$\pi \textit{ è sintatticamente corretta se e solo se } \pi \textit{ è logicamente legittima} \tag{3.4.24}$$

per mezzo della quale abbiamo potuto provare i risultati di completezza interna di MLL senza fare alcun riferimento al calcolo dei sequenti e soprattutto *ricostruendo tali norme per mezzo di criteri di correttezza geometrici che poco hanno a che fare con le tradizionali dimostrazioni per induzione sulle regole.*

D'altra parte, il fatto che il calcolo dei sequenti sia recuperato come un'etica completa ha delle importanti conseguenze per quello che abbiamo chiamato l'*argomento generativista*: dal momento che le derivazioni di MLL sono costruite attraverso regole, chiaramente l'etica indotta soddisferà tanto la produttività (i) quanto la sistematicità (ii). Inoltre, essendo generata da un numero finito di regole, sarà compatibile anche con la richiesta (*iii*) secondo cui la competenza sintattica debba essere finitamente descrivibile. Tuttavia, il teorema di sequenzializzazione mostra che la correttezza dei grafi prodotti dalle regole del calcolo dei sequenti non è affatto determinata dalla procedura di generazione del grafo, ma è determinata da proprietà non-locali di questo (ovvero la natura di *tutti* i suoi giri).

Applicando queste stesse osservazioni alla questione della correttezza e della legittimità logica, ci rendiamo conto che la stessa aderenza di una derivazione π alle norme di un comportamento è determinata indipendentemente dalla procedura con cui π è stata generata.

D'altra parte, lo stesso teorema di sequenzializzazione, riletto come un teorema di completezza, ci assicura della validità del criterio composizionale dei sequenti. Tuttavia due importanti obiezioni permangono:

la non-località dei sequenti Una regola di MLL come

$$\frac{\overline{\vdash \Gamma, A} \qquad \overline{\vdash \Delta, B}}{\vdash \Gamma, \Delta, A \otimes B}\ (\otimes) \tag{3.4.25}$$

poggia sull'assunzione che le premesse siano conclusioni di derivazioni corrette del calcolo dei sequenti. Tale assunzione, dal punto di vista dei proof-net, costituisce essa stessa una richiesta non-locale, in quanto comporta una verifica che si estende alla struttura dell'intera derivazione che ha per conclusione uno dei sequenti premessa. In definitiva la stessa correttezza dell'applicazione di una regola locale presuppone una verifica non-locale. Come osserva Girard, (vd. (Girard, [37])), la vera differenza tra sequenti e proof-net è che nei primi il criterio di correttezza è locale ma sono le regole stesse a non essere locali, mentre nei secondi il criterio è sicuramente non-locale ma le regole (di costruzione dei **PS**) sono genuinamente locali.

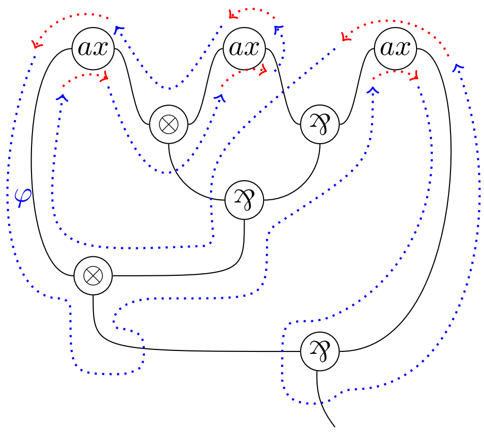
l'incompletezza L'estensione del criterio geometrico oltre MLL, che costituirà l'argomento del prossimo capitolo, porta con sè la questione del fallimento della completezza interna, e dunque dell'incompletezza. Dal punto di vista dei proof-net questo vuol dire riconoscere *l'esistenza di grafi geometricamente corretti, ovvero in cui ogni giro è lungo, che non provengono da un calcolo dei sequenti dato in partenza.* Questi esempi, che vedremo più avanti, costituiscono da una parte un rilevante contributo a favore del più generale argomento esposto in §2.2.2 contro l'identificazione di regole e norme, dall'altra, aprono la strada alla ricerca di una comprensione genuinamente matematica dell'incompletezza, che non si limiti cioè a considerare i teoremi di Gödel nè alla stregua di paradossi linguistici sullo stile del "mentitore", nè tanto meno come risultati dalle conseguenze misteriose e concretamente insondabili.

In conclusione, la teoria qui brevemente delineata costituisce una proposta per un ripensamento dei presupposti e dei metodi della teoria della dimostrazione tradizionale, una proposta che, come si evince dal controesempio all'argomento generativista e dalle osservazioni fatte poco sopra, porta con sè implicazioni non banali per la filosofia e più in generale per lo studio del linguaggio, che saranno approfondite nel prossimo capitolo, quando si confronterà la "soggettività" dell'approccio generativo con la tematica, proveniente dagli studi sulla geometria quantistica, della non commutatività dell'algebra in cui "vivono" gli artefatti sintattici.

3.5 Verso la Geometria dell'Interazione

In questo paragrafo elaboreremo una algebrizzazione della teoria dei giri attorno alle strutture dimostrative, la quale è alla base della *Geometria dell'Interazione* (*GdI*), che sarà nel dettaglio argomento del prossimo capitolo e che costituisce lo strumento matematico attualmente alla base della sintassi trascendentale di Girard[3].

Giri e permutazioni Nella dimostrazione del teorema 3.4.7 (pag. 207) è emerso che ciò che davvero conta, nel determinare il risultato di una disputa $\boldsymbol{\pi} \leftrightharpoons \boldsymbol{\pi}_\Phi$, è la **DS** $\boldsymbol{\lambda}_\Phi$, che ha come ✠-link i demoni di $\boldsymbol{\pi}_\Phi$ e per *cut*-link essenzialmente gli ax-link di $\boldsymbol{\pi}$. In particolare, la dimostrazione ci autorizza a vedere l'interazione tra $\boldsymbol{\pi}$ ed un suo giro φ (o meglio, se φ è corto, un *i.c.m.* Φ) come una alternanza di mosse, lungo $\bigcup \Phi$, una da parte di $\boldsymbol{\pi}$ (attraversamento di un assioma) e l'altra da parte di $\boldsymbol{\pi}_\Phi$ (raggiungimento di un altro ax-link), ossia come un dialogo, che corrisponde indirettamente a una disputa analoga a quelle della ludica, una volta che si realizzi che il positivo corrisponde allo "splitting", alla separazione dei lati a etichetta atomica, rispettivamente, in ax-link (di $\boldsymbol{\pi}$) e in ✠-link (di $\boldsymbol{\pi}_\Phi$), mentre il negativo, dualmente, corrisponde alla loro unione in uno stesso link. In definitiva, ciò che davvero conta è la suddivisione dei lati a etichetta atomica, in $\boldsymbol{\pi}$ tra gli ax-link, e in $\boldsymbol{\pi}_\Phi$ tra i ✠-link:

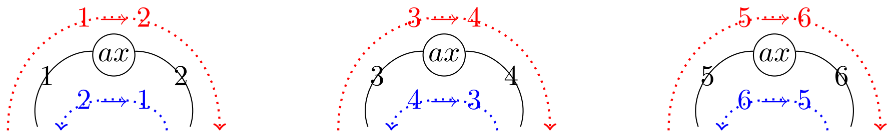


(3.5.1)

L'idea fondamentale da cui parte la *GdI* è che, una volta che alle conclusioni degli ax-link siano state attribuiti dei loci (nel nostro caso i bias $1, 2, 3, 4, 5, 6$), le mosse di $\boldsymbol{\pi}$, ovvero l'attraversamento degli ax-link, può essere rappresentato da permutazioni,

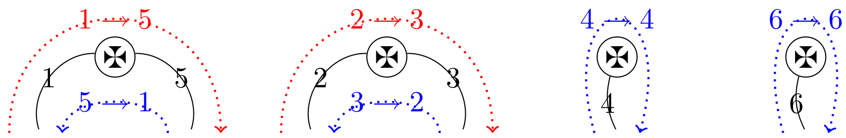
[3] I riferimenti per questo capitolo sono (Girard, [37]) e (Seiller, [64]).

o meglio trasposizioni, $(12), (34), (56)$, ognuna delle quali corrisponde direttamente al comportamento di φ lungo l'ax-link corrispondente:



(3.5.2)

D'altra parte, anche l'attraversamento di ogni demone di $\boldsymbol{\pi}_\Phi$ indurrà le permutazioni $(15), (23), (4), (6)$ (sugli stessi loci $1, 2, 3, 4, 5, 6$):



(3.5.3)

e più in generale, un demone con k conclusioni indurrà la permutazione $(1k(k-1)\dots 21)$. Possiamo convenientemente rappresentare ognuna di queste permutazioni attraverso matrici a coefficienti 0 e 1 che implementano le permutazioni:

Definizione 3.5.1 (matrice di permutazione)**.** *Data una permutazione $\sigma \in S_n$ e una base $\{e_i\}_{i\leq n}$ dello spazio vettoriale $\mathbb{V}^n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^n$, la* matrice di permutazione *$m^{e_i}_\sigma \in \mathcal{M}_n(\{0,1\})$ è definita come*

$$(m^{e_i}_\sigma)_{kj} = \begin{cases} 1 & \textit{se } j = \sigma(k) \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases} \tag{3.5.4}$$

Alcuni utili fatti, molto semplici da provare, sulle matrici di permutazione sono i seguenti:

Proposizione 3.5.1 (proprietà delle matrici di permutazione)**.** *Sia $\{e_i\}_{i\leq n}$ una base di $\mathbb{C}^n$ e siano $\sigma, \tau \in S_n$.*

(i) *$m^{e_i}_\sigma$ ha esattamente un coefficiente diverso da 0 (e uguale a 1) in ogni riga e in ogni colonna.*

(ii)

$$\begin{aligned} m^{e_i}_\sigma m^{e_i}_\tau &= m^{e_i}_{\sigma\tau} \\ (m^{e_i}_\sigma)^{-1} &= m^{e_i}_{\sigma^{-1}} \\ m^{e_i}_\sigma m^{e_i}_{id} = m^{e_i}_{id} m^{e_i}_\sigma &= m^{e_i}_\sigma \end{aligned} \tag{3.5.5}$$

in altre parole le $m^{e_i}_\sigma$ formano un gruppo isomorfo a S_n.

(*iii*) $m_\sigma^{e_i}$ *rappresenta una* isometria *di* $\mathbb{V}^n(\mathbb{C})$*, ossia*

$$m_\sigma^{e_i}(m_\sigma^{e_i})^T = m_\sigma^{e_i}(m_\sigma^{e_i})^{-1} = I_n \tag{3.5.6}$$

Possiamo a questo punto introdurre le nostre derivazioni in forma matriciale, che chiameremo, in analogia con la ludica, design:

Definizione 3.5.2 (design)**.** *Un* design *è una coppia* $\mathfrak{D} = (X, A)$ *dove:*

1. $X \subset_f \mathbb{N}$ *è un insieme finito di loci (o meglio di bias), detto* supporto *di* $\mathfrak{D}$*;*

2. $A = m_\sigma^{e_i}, i \in X$ *è una matrice di permutazione indotta da* σ*, la quale agisce su* X*.*

*a ogni para-***PS** $\boldsymbol{\pi}$ *è associato il design* $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{\pi}} = (X, A)$ *dove* X *è ottenuto associando iniettivamente un bias a ogni conclusione di ax-link o ✠-link di* $\boldsymbol{\pi}$ *e* $A = m_\sigma^{e_i}$*, dove* σ *è la permutazione indotta dagli ax-link e ✠-link di* $\boldsymbol{\pi}$*.*

Ad esempio, alla **PS** 3.4.19 (pag. 208) ed al suo giro φ sono associati rispettivamente il design $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{\pi}} = (\{1,2,3,4,5,6\}, A_{\boldsymbol{\pi}})$ e $\mathfrak{D}_\varphi = (\{1,2,3,4,5,6\}, B_\varphi)$, dove $A_{\boldsymbol{\pi}}$ e B_φ sono le seguenti matrici:

$$A_{\boldsymbol{\pi}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.5.7}$$

Il prodotto di due matrici di permutazione $m_\sigma^{e_i}, m_\tau^{e_i}$ corrisponde dunque alla permutazione ottenuta alternando una mossa di σ ed un τ, ovvero corrisponde a un passo dell'interazione tra le para-**PS** che tali matrici rappresentano. La completa interazione sarà dunque rappresentata dall'n-esima iterazione del prodotto $m_\sigma^{e_i} m_\tau^{e_i}$, dove n è la cardinalità del supporto comune delle permutazioni.

La riformulazione algebrica del criterio geometrico Ricordiamo che una permutazione $\sigma \in S_n$ è detta *ciclica* quando corrisponde a un unico grande ciclo, ovvero si ha $\sigma^n = id_n$ e per ogni $k < n$ e per ogni $x \leq n$, $\sigma^k(x) \neq x$.

Proposizione 3.5.2. $\sigma \in S_n$ *è ciclica se e solo se* $m_\sigma^{e_i}$ *soddisfa:*

$$\begin{gathered} (m_\sigma^{e_i})^n = I_n \\ \forall k < n \; Tr((m_\sigma^{e_i})^k) = 0 \end{gathered} \tag{3.5.8}$$

Dimostrazione. Sia σ ciclica. La prima equazione è una immediata conseguenza del secondo punto della proposizione 3.5.1. D'altra parte, se ci fosse un sotto-ciclo in σ; ossia si avesse, per un certo $k < n$ e un certo $x \leq n$, $\sigma^k(x) = x$, allora $(m_\sigma^{e_i})^k$ avrebbe un coefficiente diverso da 0 sulla diagonale maggiore, e dunque $Tr((m_\sigma^{e_i})^k) \neq 0$. Il viceversa è, a questo punto, immediato. □

Il criterio geometrico dei proof-net induce allora la seguente definizione:

Definizione 3.5.3 (polarità)**.** *Siano* $\mathfrak{D} = (X, A), \mathfrak{D}' = (X, B)$ *design aventi stesso supporto* X *di cardinalità* n*. Allora* $\mathfrak{D} \overset{\downarrow}{\sim} \mathfrak{D}'$ *se e solo se*

$$\begin{gathered} (AB)^n = I_n \\ \forall k < n \; Tr((AB)^k) = 0 \end{gathered} \tag{3.5.9}$$

L'unico grande ciclo di AB corrisponde al giro lungo attorno alla **PS** descritta da $\mathfrak{D}$, mentre a ogni eventuale sottociclo di AB corrisponde un giro corto.

Una rapida verifica ci permette allora di affermare la polarità dei design $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{\pi}}$ e $\mathfrak{D}_\varphi$ definiti sopra. D'altra parte, se consideriamo il design $\mathfrak{D}_\Psi = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, B_\Psi)$ associato all'*i.c.m.* Ψ in 3.4.21 (pag. 209):

$$B_\Psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.5.10}$$

possiamo vedere che già $A_{\boldsymbol{\pi}} B_\Psi$ ha un elemento sulla diagonale principale e dunque $Tr(A_{\boldsymbol{\pi}} B_\Psi) \neq 0$:

$$A_{\boldsymbol{\pi}} B_\Psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.5.11}$$

da cui segue che $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{\pi}}$ e $\mathfrak{D}_\Psi$ non possono essere polari.

La dinamica Dobbiamo adesso occuparci dell'eliminazione dei *cut*-link. Per capire come funziona l'algoritmo generale è utile tornare al calcolo dei sequenti MLL: immaginiamo di avere due derivazioni π, λ rispettivamente dei sequenti $\vdash \Gamma, A$ e $\vdash A^\perp, \Delta$. Associamo a ogni occorrenza di formula B in tali sequenti un locus $|B|$ in maniera tale che ad A e ad $A^\perp$ sia associato lo stesso locus: rappresentiamo cioè π e λ attraverso due permutazioni σ_π e σ_λ rispettivamente di supporto $|\Gamma| \cup |A|$ e $|A| \cup |\Delta|$, con $|\Gamma| \cap |\Delta| = \emptyset$. Vogliamo trovare una permutazione τ di supporto $|\Gamma| \cup |\Delta|$ che rappresenti la derivazione

$$\dfrac{\begin{matrix} \vdots\, \pi \\ \vdash \Gamma, A \end{matrix} \quad \begin{matrix} \vdots\, \lambda \\ \vdash A^\perp, \Delta \end{matrix}}{\vdash \Gamma, \Delta} \; cut \tag{3.5.12}$$

Consideriamo un arbitrario $x \in |\Gamma| \cup |\Delta|$. Se ad esempio $x \in |\Gamma|$, applichiamo σ_π ottenendo $y = \sigma_\pi(x)$. Se, a questo punto, $y \in |\Gamma|$, possiamo definire $\tau(x) = y$, altrimenti si ha $y \in |A|$ e dobbiamo proseguire nella computazione: applichiamo σ_λ a y ottenendo $z = \sigma_\lambda(y) \in |A| \cup |\Delta|$; se $z \in |\Delta|$, possiamo definire $\tau(x) = \sigma_\lambda\sigma_\pi(x)$, altrimenti $z \in |A|$ e proseguiamo la computazione applicando nuovamente σ_π. Iterando questo procedimento abbiamo due possibilità:

- a un certo punto "usciamo" da $|A|$, ossia esiste un n tale che $(\sigma_\lambda\sigma_\pi)^n(x) \in |\Gamma| \cup |\Delta|$: definiamo $\tau(x) = (\sigma_\lambda\sigma_\pi)^n(x)$;

- non usciamo mai da $|A|$, ovvero entriamo in un loop. In tal caso $\tau(x)$ non è definita, in quanto la sua computazione diverge.

D'altra parte, il teorema di eliminazione del taglio per MLL ci assicura che, se la derivazione è logicamente corretta, non entreremo in un loop. Un eventuale loop corrisponderebbe infatti a un giro corto nella **PS** associata a τ. Prima di passare alle definizioni è importante ricordare il seguente fatto:

Proposizione 3.5.3. *Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matrice e sia $\sum_{n=0}^\infty A^n$ convergente. Allora $I - A$ è invertibile e si ha*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \tag{3.5.13}$$

Dimostrazione.

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n(I - A) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n - \sum_{n=0}^{\infty} A^{n+1} = I \tag{3.5.14}$$

e analogamente per il prodotto $(I - A)\sum_{n=0}^\infty A^n$. □

Possiamo adesso definire l'esecuzione dell'eliminazione dei tagli (o se si vuole dei *cut*-link):

Definizione 3.5.4 (esecuzione)**.** *Siano $\mathfrak{D} = (X \cup Y, A)$ e $\mathfrak{E} = (Y \cup Z, B)$ design, con $X \cap Z = \emptyset$ e $A = \left(\begin{smallmatrix} A_{X,X} & A_{Y,X} \\ A_{X,Y} & A_{Y,Y} \end{smallmatrix}\right)$ e $B = \left(\begin{smallmatrix} B_{Y,Y} & B_{Z,Y} \\ B_{Y,Z} & B_{Z,Z} \end{smallmatrix}\right)$, decomposte rispettivamente lungo X, Y e Y, Z. Allora, ammesso che $I - B_{Y,Y}A_{Y,Y}$ e $I - A_{Y,Y}B_{Y,Y}$ siano invertibili, l'*esecuzione *di un cut tra $\mathfrak{D}$ e $\mathfrak{E}$ è il design $\mathfrak{F} = (X \cup Z, C)$, dove $C = \left(\begin{smallmatrix} C_{X,X} & C_{Z,X} \\ C_{X,Z} & C_{Z,Z} \end{smallmatrix}\right)$ è definita da:*

$$\begin{aligned} C_{X,X} &:= A_{X,X} + A_{Y,X}B_{Y,Y}(I - A_{Y,Y}B_{Y,Y})^{-1}A_{X,Y} \\ C_{Z,X} &:= A_{Y,X}(I - B_{Y,Y}A_{Y,Y})^{-1}B_{Z,Y} \\ C_{X,Z} &:= B_{Y,Z}(I - A_{Y,Y}B_{Y,Y})^{-1}A_{X,Y} \\ C_{Z,Z} &:= B_{Z,Z} + B_{Y,Z}A_{Y,Y}(I - B_{Y,Y}A_{Y,Y})^{-1}B_{Z,Y} \end{aligned} \tag{3.5.15}$$

In caso di non invertibilità di $I - B_{Y,Y}A_{Y,Y}$ e $I - A_{Y,Y}B_{Y,Y}$, l'esecuzione è detta divergere *e scriviamo $C = \infty$.*

La questione della convergenza dell'interazione è così interamente ridotta alla questione della convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$, dove A è una matrice a coefficienti 0 e 1 (si noti che non è affatto necessario che le sotto-matrici $A_{Y,Y}$ e $B_{Y,Y}$ siano matrici di permutazione).

Proposizione 3.5.4. *Sia A una matrice a coefficienti* 0 *e* 1*. Allora la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ *converge se e solo se A è* nilpotente*, ossia esiste un k tale che $A^k = 0$.*

Dimostrazione. La nilpotenza di A esprime il fatto che A è matrice di adiacenza di un grafo diretto senza cicli: se γ fosse un ciclo di lunghezza k, si avrebbe infatti, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $A^{nk} \neq 0$, in quanto A^{nk} avrebbe un coefficiente uguale a 1 sulla sua diagonale principale. Ora, se A è nilpotente, il calcolo di $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ è un calcolo finito, e dunque sicuramente convergente. D'altra parte, sia k il minimo comune multiplo delle lunghezze dei cicli del grafo diretto rappresentato da A: dal fatto che, per ogni $n, m \in \mathbb{N}$, si abbia $A^{nk} = A^{mk}$, indica che la computazione di $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ va incontro a un ciclo di lunghezza esattamente k. $\square$

Possiamo sintetizzare la richiesta di nilpotenza introducendo il cosiddetto *determinante logaritmico*

Definizione 3.5.5 (determinante logaritmico)**.** *Data una matrice A, il* determinante logaritmico $let(I - A)$ *è definito come*

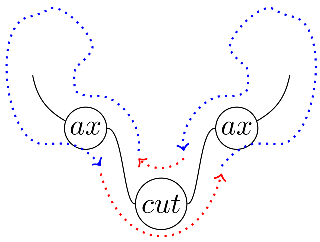
$$let(I - A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Tr(A^n)}{n} \tag{3.5.16}$$

se la serie converge, e come $let(I - A) = \infty$ altrimenti.

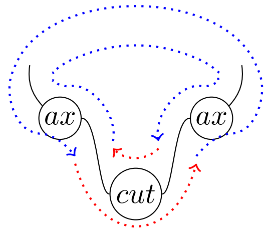
Proposizione 3.5.5. *Sia A una matrice a coefficienti* 0 *e* 1*. Allora* $let(I - A) = 0$ *se e solo se A è nilpotente, ed è uguale a ∞ altrimenti.*

Dimostrazione. Se A è nilpotente, si ha sicuramente, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $Tr(A^n) = 0$ in quanto il grafo diretto che rappresenta è aciclico, e dunque $let(I - A) = 0$. Se invece A ammette un ciclo, si avrà $Tr(A^k) > 0$ per un certo $k \in \mathbb{N}$, e per ogni multiplo di k, e dunque la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{Tr(A^n)}{n} \geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Tr(A^{nk})}{n} \geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ diverge. $\square$

La nilpotenza è la proprietà che ci interessa quando ci poniamo questioni di convergenza dell'interazione. Del resto, dal punto di vista geometrico, è facile convincersi che, affinchè l'eliminazione di un *cut*-link in una **PS** converga, è necessario che non vi sia alcun ciclo (alcun giro corto) che connetta le conclusioni degli *ax*-link che sono premesse ereditarie delle premesse del *cut*-link stesso: nel caso di un *cut* tra conclusioni di *ax*-link possiamo facilmente vedere l'equivalenza tra la richiesta di nilpotenza e quella che il *cut*-link sia, in analogia ai $\otimes$-link (vd. lemma 3.3.6 a pag. 196), splitting:



cut nilpotente



cut non nilpotente (3.5.17)

D'altra parte, se la matrice $A_{Y,Y}B_{Y,Y}$ è nilpotente, esiste un intero $k \in \mathbb{N}$, il *grado di nilpotenza* della matrice, che ci assicura che il computo dell'eliminazione del taglio richiede circa $4k$ passi (modulo un numero costante di somme e prodotti di matrici). Come vedremo tra poco, nel caso dell'*applicazione funzionale*, i passi necessari saranno esattamente k: lo studio della nilpotenza ci permette cioè di prendere esplicitamente in considerazione il tempo di esecuzione, portando in prima linea la questione delle risorse della computazione che si era rivelata in §2.1.4 di prima importanza per la realizzazione di una sintassi trascendentale. Questi temi potranno essere discussi e approfonditi una volta che, nel prossimo capitolo, saremo riusciti ad estendere la *GdI* al di là del calcolo dei sequenti MLL, il quale, avendo tempo di esecuzione lineare (vd. proposizione 2.1.7 a pag. 121), non ha molto da dirci al riguardo.

MLL nella *GdI* Concludiamo il paragrafo ricostruendo esplicitamente nella *GdI* la teoria moltiplicativa. Definiamo anzitutto etiche e comportamenti come al solito:

Definizione 3.5.6 (etica, comportamento)**.** *Un'etica* $\mathbf{E}$ *in base* $X \subset_f \mathbb{N}$ *è un insieme di design di supporto* X*. Un comportamento* $\mathbf{G}$ *è un insieme di design uguale al suo biortogonale* $\mathbf{G}^{\overset{|}{\sim}\overset{|}{\sim}} = \mathbf{G}$ *(dove, per ogni etica* $\mathbf{E}$*, si ha* $\mathbf{E}^{\overset{|}{\sim}} := \{\mathfrak{D} | \forall \mathfrak{E} \in \mathbf{E}\ \mathfrak{D} \overset{|}{\sim} \mathfrak{E}\}$*).*

Cominciamo con il tensore:

Definizione 3.5.7 (prodotto tensoriale di design)**.** *Siano* $\mathfrak{D} = (X, A)$ *e* $\mathfrak{E} = (Y, B)$ *design di supporti disgiunti, ossia* $X \cap Y = \emptyset$*. Il prodotto tensoriale di* $\mathfrak{D}$ *e* $\mathfrak{E}$ *è il design* $\mathfrak{D} \otimes \mathfrak{E} = (X \cup Y, A \oplus B)$*, dove* $\oplus$ *indica la somma diretta di matrici, ovvero* $A \oplus B$ *può essere scritto in forma decomposta come* $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$*.*

Definizione 3.5.8 (prodotto tensoriale di comportamenti)**.** *Siano* $\mathbf{G}$ *e* $\mathbf{H}$ *due comportamenti rispettivamente in base* X *e* Y*, con* $X \cap Y = \emptyset$*. Il prodotto tensoriale* $\mathbf{G} \otimes \mathbf{H}$ *è definito come il comportamento in base* $X \cup Y$ *dato da*

$$\mathbf{G} \otimes \mathbf{H} := \{\mathfrak{D} \otimes \mathfrak{E} | \mathfrak{D} \in \mathbf{G}, \mathfrak{E} \in \mathbf{H}\}^{\overset{|}{\sim}\overset{|}{\sim}} \tag{3.5.18}$$

Verifichiamo che il prodotto tensoriale soddisfi tutte le proprietà che ci aspettiamo:

Proposizione 3.5.6 (proprietà del prodotto tensoriale)**.** *Siano* $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$ *comportamenti.*

(commutatività)

$$\mathbf{F} \otimes \mathbf{G} = \mathbf{G} \otimes \mathbf{F} \tag{3.5.19}$$

(associatività)

$$\mathbf{F} \otimes (\mathbf{G} \otimes \mathbf{H}) = (\mathbf{F} \otimes \mathbf{G}) \otimes \mathbf{H} \tag{3.5.20}$$

(neutro)

$$\mathbf{F} \otimes \mathbf{1} = \mathbf{F} \tag{3.5.21}$$

dove $\mathbf{1} = \{(\emptyset, 0)\} = \mathbf{1}^{\downarrow\!\sim\downarrow\!\sim}$.

Dimostrazione. La commutatività e l'associatività sono immediate conseguenze della definizione del prodotto tensoriale di design e della richiesta di estraneità dei supporti. Per quanto riguarda l'elemento neutro, dal momento che esiste una unica permutazione, la permutazione vuota, su zero elementi, chiaramente $\mathbf{1}$ è un comportamento. L'equazione 3.5.21 è allora una conseguenza immediata. □

Possiamo provare direttamente la completezza interna del tensore:

Teorema 3.5.7 (completezza interna di $\otimes$)**.** *Sia* $\mathbf{G} \odot \mathbf{H} := \{\mathfrak{D} \otimes \mathfrak{E} | \mathfrak{D} \in \mathbf{G}, \mathfrak{E} \in \mathbf{H}\}$, *allora* $\mathbf{G} \odot \mathbf{H} = \mathbf{G} \otimes \mathbf{H}$.

Dimostrazione. Siano $\mathfrak{a}' = (X, A')$ e $\mathfrak{b}' = (Y, B')$ design rispettivamente in $\mathbf{G}^{\downarrow\!\sim}$ e $\mathbf{H}^{\downarrow\!\sim}$. Sia inoltre $(x, y) \in X \times Y$ una coppia di loci. Definiamo $\mathfrak{c} = (X \cup Y, (xy)(A' \oplus B'))$, dove $(xy)(A' \oplus B')$ è la composizione di $(A' \oplus B')$ e della trasposizione (xy).

Siano adesso $\mathfrak{a} = (X, A)$ e $\mathfrak{b} = (Y, B)$ design in $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$. Sappiamo che $A'A$ e $B'B$ corrispondono a permutazioni cicliche, e dunque, essendo $X \cap Y = \emptyset$, si ha che $(A' \oplus B')(A \oplus B)$ corrisponde a una permutazione che ha esattamente due cicli di lunghezza rispettivamente $\sharp X$ e $\sharp Y$. Di conseguenza, $(xy)(A' \oplus B')(A \oplus B)$ corrisponderà a una permutazione ciclica di lunghezza $\sharp X + \sharp Y$, e dunque $\mathfrak{c} \in (\mathbf{G} \odot \mathbf{H})^{\downarrow\!\sim} = (\mathbf{G} \otimes \mathbf{H})^{\downarrow\!\sim}$.

Sia adesso $\mathfrak{d} \in (\mathbf{G} \otimes \mathbf{H}) - \mathbf{G} \odot \mathbf{H}$; in particolare $\mathfrak{d} = (X \cup Y, D)$ e D non è la somma diretta di due matrici di permutazione. Esiste dunque un elemento $y \in Y$ tale che $x = D(y) \in X$. Siano $\mathfrak{a}' = (X, A')$ e $\mathfrak{b}' = (Y, B')$ design come sopra e sia $\mathfrak{c} = (X \cup Y, (xy)(A' \oplus B'))$. Allora $D(xy)(A' \oplus B')$ contiene un ciclo di lunghezza 1, dal momento che $(xy)(A' \oplus B')(x) = y$ e $D(y) = x$, il che è assurdo, in quanto $\mathfrak{c} \in (\mathbf{G} \otimes \mathbf{H})^{\downarrow\!\sim}$. □

Per arrivare a definire il $\parr$, introduciamo, come accennato sopra, la fondamentale *applicazione funzionale*, che altro non è se non un caso particolare dell'esecuzione 3.5.4:

Definizione 3.5.9 (applicazione funzionale)**.** *Siano* $\mathfrak{a} = (X, A)$ *e* $\mathfrak{f} = (X \cup Y, F)$ *due design, con* $X \cap Y = \emptyset$ *e* F *decomponibile come* $\left(\begin{smallmatrix} F_{X,X} & F_{Y,X} \\ F_{X,Y} & F_{Y,Y} \end{smallmatrix}\right)$. *L'applicazione funzionale* $[\mathfrak{f}]\mathfrak{a}$ *di* $\mathfrak{f}$ *a* $\mathfrak{a}$ *è definita, qualora* $let(I - F_{X,X}A) = 0$, *come segue:*

$$[\mathfrak{f}]\mathfrak{a} = (Y, F_{Y,Y} + F_{X,Y}A(I - F_{X,X}A)^{-1}F_{Y,X}) \tag{3.5.22}$$

nel qual caso scriveremo per brevità $[F]A$ *per intendere* $F_{Y,Y}+F_{X,Y}A(I-F_{X,X}A)^{-1}F_{Y,X}$*; nel caso in cui* $let(I-F_{X,X}A)=\infty$*, si avrà* $[\mathfrak{f}]\mathfrak{a}=(Y,\infty)$.

Una delle proprietà più importanti dell'applicazione funzionale è la seguente:

Proposizione 3.5.8. *Siano* $\mathfrak{a}=(X,A), \mathfrak{b}=(Y,A), \mathfrak{f}=(X\cup Y,F)$ *design, con* $X\cap Y=\emptyset$*. Allora vale la seguente equazione:*

$$[\mathfrak{f}](\mathfrak{a}\otimes\mathfrak{b})=[[\mathfrak{f}]\mathfrak{a}]\mathfrak{b}=[[\mathfrak{f}]\mathfrak{b}]\mathfrak{a} \tag{3.5.23}$$

Dimostrazione. Dalle definizioni 3.5.4 e 3.5.9 segue che $([F]A)B$, $([F]B)A$ e $[F](A\oplus B)$ non sono in realtà che modi diversi di scrivere la stessa operazione. □

Questa proposizione va letta in parallelo con l'analoga equazione 1.2.17 a pag. 64 per le funzioni lineari sugli spazi coerenti:

$$\sharp(F(a)\cap b)=\sharp(tr(F)\cap a\times b) \tag{1.2.17}$$

e con il punto (*iii*) della proposizione 2.2.13 (pag. 165) sulle proprietà moltiplicative nella ludica:

$$((\mathfrak{F})\mathfrak{D})\mathfrak{E}=((\mathfrak{F})\mathfrak{E})\mathfrak{D}=(\mathfrak{F})(\mathfrak{E}\otimes\mathfrak{D})=(\mathfrak{F})(\mathfrak{D}\otimes\mathfrak{E}) \tag{3.5.24}$$

Queste equazioni, che si ritrovano in formalismi molto diversi, costituiscono dunque, nella forma più concisa, il carattere procedurale della normatività della logica moltiplicativa, e costituiranno una delle *forme trascendentali* della *GdI* (vd. §4.6). Siamo così condotti direttamente alla seguente definizione:

Definizione 3.5.10 ($\parr$ e implicazione lineare)**.** *Siano* $\mathbf{G}$ *e* $\mathbf{H}$ *comportamenti in base rispettivamente* X *e* Y*, con* $X\cap Y=\emptyset$*. Il comportamento* $\mathbf{G}\multimap\mathbf{H}=\mathbf{G}^{\perp}\parr\mathbf{H}$ *è definito come segue:*

$$\mathbf{G}\multimap\mathbf{H}=\{\mathfrak{f}|\forall\mathfrak{a}\in\mathbf{G}\ [\mathfrak{f}]\mathfrak{a}\in\mathbf{H}\}^{\perp\perp} \tag{3.5.25}$$

Verifichiamo anzitutto la dualità di $\parr$ o $\otimes$:

Teorema 3.5.9.

$$\mathbf{G}\otimes\mathbf{H}=(\mathbf{G}^{\perp}\parr\mathbf{H}^{\perp})^{\perp} \tag{3.5.26}$$

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{f}=(X\cup Y,F)\in\mathbf{G}\multimap\mathbf{H}^{\perp}$. Allora, per ogni $\mathfrak{a}=(X,A)\in\mathbf{G}$ e $\mathfrak{b}=(Y,B)\in\mathbf{H}$, si ha $[\mathfrak{f}]\mathfrak{a}\in\mathbf{H}^{\perp}$ e dunque $([F]A)B$ corrisponde a una permutazione ciclica. D'altra parte, per la proposizione 3.5.8, anche $[F](A\oplus B)$ è ciclica, e dunque $\mathfrak{f}\perp\mathfrak{a}\otimes\mathfrak{b}$, da cui $(\mathbf{G}^{\perp}\parr\mathbf{H}^{\perp})^{\perp}\subseteq(\mathbf{G}\otimes\mathbf{H})^{\perp}$.

Per il viceversa, si consideri un design $\mathfrak{f}\in(\mathbf{G}\otimes\mathbf{H})^{\perp}$ ed un $\mathfrak{c}=\mathfrak{a}\otimes\mathfrak{b}\in\mathbf{G}\otimes\mathbf{H}$ (usiamo qui la completezza interna del $\otimes$). Applicando ancora una volta la proposizione 3.5.8, si ha che $[\mathfrak{f}]\mathfrak{a}$ è definito: infatti $[[\mathfrak{f}]\mathfrak{a}]\mathfrak{b}$ è sicuramente definito ed un eventuale sottociclo in

$[F]A$ si ripercuoterebbe in $([F]A)B$, che invece è ciclica. D'altra parte per ogni design $\mathfrak{b}' = (Y, B')$, dal momento che $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}' \in \mathbf{G} \otimes \mathbf{H}$, si ha che $([F]A)B'$ è ciclica, e dunque $\mathfrak{f} \in \mathbf{G} \multimap \mathbf{H}^{\overset{|}{\sim}}$.

□

Da questo teorema segue subito il seguente risultato, che conclude la trattazione della teoria moltiplicativa:

Teorema 3.5.10 (completezza interna del $\parr$)**.** *Sia* $\mathbf{G} \rightarrowtriangle \mathbf{H} := \{\mathfrak{f} | \forall \mathfrak{a} \in \mathbf{G}\ [\mathfrak{f}]\mathfrak{a} \in \mathbf{H}\}$, *allora* $\mathbf{G} \rightarrowtriangle \mathbf{H} = \mathbf{G} \multimap \mathbf{H}$.

Dimostrazione. Rileggendo il precedente teorema, si vede che ciò che abbiamo in realtà provato è $(\mathbf{G} \otimes \mathbf{H})^{\overset{|}{\sim}} = \mathbf{G} \rightarrowtriangle \mathbf{H}^{\overset{|}{\sim}}$, e dunque $\mathbf{G} \rightarrowtriangle \mathbf{H}^{\overset{|}{\sim}} = (\mathbf{G} \rightarrowtriangle \mathbf{H}^{\overset{|}{\sim}})^{\overset{|}{\sim}\overset{|}{\sim}} = \mathbf{G} \multimap \mathbf{H}^{\overset{|}{\sim}}$. □

Capitolo 4

Fondamenti non commutativi per la logica?

L'obbiettivo di questo capitolo, attraverso l'esposizione di alcuni tra i più recenti sviluppi della Geometria dell'Interazione, è quello di sviluppare l'idea di Girard secondo cui questa teoria possa servire ai fini di una "sintassi trascendentale", vale a dire di una teoria delle condizioni di possibilità, in generale, della sintassi (in particolare, delle sintassi logiche). Attraverso il ricorso alle algebre di operatori (le quali rendono la trattazione della teoria molto più complessa delle precedenti, motivo per cui ho scelto di dedicare un capitolo dell'appendice ad una, seppur breve e lacunosa, introduzione alla teoria degli operatori sugli spazi di Hilbert) è possibile accostare la tematica, che nel capitolo secondo è stata individuata come essenzialmente morfologica, dell'interferenza tra i "loci" a quella, connessa con la non commutatività delle algebre con cui sono descritte le osservabili, della teoria della misura quantistica. Questa teoria, oltre a costituire una questione la cui interpretazione è un problema ancora aperto nella fisica teorica, rappresenta il polo attorno al quale si è sviluppata, in tempi recenti, una prospettiva, ispirata alla geometria non commutativa di Alain Connes, che vede nel formalismo delle algebre di operatori uno strumento matematico che può rivelarsi ben più profondo e fertile della teoria degli insiemi per la comprensione dei fondamenti della matematica.

In §4.1 saranno evidenziati, attraverso la ludica e una formulazione "commutativa" della *GdI*, gli stretti rapporti tra le interferenze morfologiche e l'individuazione delle "variabili vincolate" di un artefatto sintattico. In particolare, si mostrerà come i criteri che garantiscono l'eliminazione delle interferenze presuppongono il rispetto della "privatezza" della variabili vincolate, la quale è a sua volta garantita da opportune forme di commutazione. In §4.2, dopo un rapido accenno ai temi della geometria non commutativa, sarà affrontata la revisione "quantistica" della teoria degli spazi coerenti: in particolare, attraverso la distinzione tra gli aspetti "soggettivi" (dipendenti dalla commutazione) e "oggettivi" (indipendenti dalla commutazione), saranno presentati esempi che evidenziano la natura "soggettiva" delle componenti generative, ossia connesse con la scomposizione di una derivazione lungo le regole sintattiche, delle sintassi logiche, di contro a quella "oggettiva" nei termini della quale è possibile esprimere la normatività che condiziona le forme tipicamente logiche di interazione. A partire da questa distinzione, in §4.3 sarà presentata una versione “oggettiva” della *GdI*, vale a dire, essenzialmente, una riformulazione nelle algebre di operatori della teoria dei proof-net per la logica moltiplicativa, la quale, per la sua natura continua e non computabile, non fa alcun tipo di riferimento a ipotesi sintattiche. Questa teoria astratta, del tutto inapplicabile nel concreto, sarà confrontata in §4.4 con i requisiti minimi che permettono di reintrodurre la “soggettività”, la sintassi, nella forma di un “monoide epidittico”. Saranno inoltre discussi i requisiti algebrici, necessari per la formulazione di questa teoria, che conducono alla scelta di un'algebra finita e iperfinita. In particolare si mostrerà come a tali proprietà algebriche corrispondano diversi modi di gestire l'interferenza nello spazio, e dunque come la Geometria dell'Interazione possa essere usata per pervenire a una caratterizzazione, al contempo logica e geometrica, delle classi di complessità computazionale. In §4.5 sarà presentata una ricostruzione, nelle algebre di operatori, dell'aritmetica: in particolare verrà mostrato come sia possibile costruire un continuo di rappresentazioni isomorfe di uno stesso numero naturale le quali tuttavia, a seconda del contesto, potranno essere o non essere riconosciute come tali; questa contestualità, paragonata da Girard alla questione dell' oggettività della misura nella meccanica quantistica, corrisponde direttamente alla capacità delle “osservazioni”, che interagiscono con gli “interi non commutativi”, di riconoscerne le variabili vincolate senza interferire con esse. In particolare, saranno presentate le differenze tra gli “interi essenzialisti”, costruiti per non interferire con nessuna osservazione ma, proprio per questo, del tutto inutilizzabili concretamente, e gli “interi NL”, le cui interazioni “sicure”, senza interferenza, sono caratterizzate dal fatto di essere eseguite in tempo logaritmico.

Negli ultimi due paragrafi saranno discusse le implicazioni filosofiche dei risultati descritti. In particolare, in §4.6, si cercherà di individuare il senso da attribuire alla nozione di “trascendentale”, eliminandone il riferimento “soggettivo”, presente nello stesso Kant nella forma della deduzione metafisica delle categorie, a una specifica sintassi (la tavola dei giudizi). Tale riferimento, seguendo Girard, è responsabile della riduzione della dimensione del possibile, decisiva per la nozione di “trascendentale”, a quella di una enumerazione, di una “lista delle possibilità”. Sarà solo in un senso “purificato” di “possibile” che si potranno recuperare, nella *GdI*, le *forme trascendentali* delle proprietà sintattiche che ritroviamo nei formalismi logici. Infine, in §4.7 sarà evidenziato come la *GdI*, attraverso le nozioni di *quoziente normativo* e *completamento normativo*, possa rappresentare una promettente rampa di lancio per l'elaborazione di una sintesi filosofica, ancora tutta da sviluppare, di quel ripensamento del rapporto tra sintassi e semantica di cui questa tesi, nel complesso, intende mostrare la necessità.

4.1 Interferenza e morfologia: le variabili vincolate

In questo paragrafo, facendo riferimento sia alla ludica che alla *GdI*, mostreremo come l'identificazione delle variabili vincolate di un artefatto sintattico costituisce un momento decisivo per ricostruire le norme che regolano le interazioni a cui tale oggetto può partecipare. Questa discussione, inoltre, indurrà una rivalutazione del ruolo degli atomi nella logica, i quali sono assenti, come abbiamo già visto, nella ludica e scompariranno nella revisione "non commutativa" della stessa *GdI*.

Delocalizzazioni e normatività Uno degli strumenti del quale ci siamo serviti, nel primo e nel secondo capitolo, per mostrare le difficoltà connesse con alcune posizioni classiche sui fondamenti della logica, è stato il ricorso a quelle che abbiamo considerato forme di interferenza: in sostanza, si trattava di casi in cui aspetti reputati "soggettivi", e in quanto tali considerati irrilevanti, in contesti particolari diventavano rilevanti, compromettendo la realizzazione degli aspetti reputati "oggettivi". E' il caso, ad esempio, della teoria dei modelli e della questione dei modelli "non standard", che rivelavano come la denotazione (oggettiva) di una data teoria potesse essere determinata da aspetti del tutto soggettivi della sintassi e del linguaggio in cui questa è ambientata (si pensi a quanto detto sulle ϵ_0-strutture in §1.1.4). Altri casi sono emersi in riferimento al contrasto tra la natura astratta, ideale, delle essenze descritte nel secondo capitolo, e la concretezza delle realizzazioni di queste entro domini sintattici caratterizzati da limiti "soggettivi" in termini di risorse spazio-temporali, nonchè al problema delle effettive possibilità di giustificare con sicurezza il fatto che una di queste realizzazioni concrete si riferisca a una siffatta essenza.

La caratteristica comune di queste questioni, del resto, è il loro statuto informale, se non esclusivamente filosofico in alcuni casi (nel caso degli argomenti in §2.1.3). La ricerca di un solido terreno matematico a partire dal quale riformulare il confronto semiotico tra un segno e il suo senso linguistico ci ha portati a servirci della *locatività*, e a proporre una "scommessa" (pag. 136):

$$\textit{Le norme sono nascoste nella morfologia del linguaggio} \tag{2.2.12}$$

A partire dalla strutturazione, che abbiamo concepito come non ancora semiotica, dei *loci*, interpretati come componenti spaziali manipolabili (nel tempo), ci siamo serviti della ludica per caratterizzare tecnicamente quegli strumenti morfologici che sono responsabili dell'apparente assenza di interferenza nei formalismi, nelle sintassi abitualmente adoperate nello studio della logica: si pensi alle nozioni di alienità ($\P\mathbf{G} \cap \P\mathbf{H} = \emptyset$, §2.2.3) ed estraneità ($\S\mathbf{G} \cap \S\mathbf{H} = \emptyset$, §2.2.3), che corrispondono rispettivamente all'assenza di interferenza additiva e moltiplicativa, e al fondamentale strumento normativo che sono le *delocalizzazioni* (§2.2.1), le quali costituiscono allo stesso tempo l'unico strumento per recuperare l'essenzialismo categoriale e il principale artefatto genuinamente logico della ludica, sotto la forma dei $\mathfrak{Fax}_{\xi,\varphi(\xi)}$:

$$\dfrac{\dots \qquad \dfrac{\dots \quad \dfrac{\vdots\; \mathfrak{Fax}_{\varphi(\xi)*\varphi_\xi(i),\xi*i}}{\varphi(\xi)*\varphi_\xi(i) \vdash \xi * i} \quad \dots}{\vdash \varphi(\xi), \xi * I}\,(+,\varphi(\xi),I) \qquad \dots}{\xi \vdash \varphi(\xi)}\,(-,\xi,\wp_f(\mathbb{N})) \tag{4.1.1}$$

Quando parliamo di una formula del linguaggio A, non siamo interessati a sapere a quale occorrenza di A, tra le infinite possibili, ci stiamo riferendo. D'altra parte, questo disinteresse è giustificato dal fatto che siamo sicuri che distinte occorrenze di A non faranno interferenza, come mostrato ad esempio dalla seguente riduzione:

$$
\begin{array}{c}
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\vdash A_2, A_1, \Gamma_{21}} \quad \dfrac{\vdots}{\vdash B_2, \Gamma_{22}}}{\vdash (A\otimes B)_2, A_1, \Gamma_2}(\otimes) \quad \dfrac{\vdots}{\vdash B_1, \Gamma_1}}{\vdash (A\otimes B)_2, (A\otimes B)_1, \Gamma}(\otimes) \quad \dfrac{\dfrac{\vdots}{\vdash A_1^{\perp}, B_1^{\perp}, \Delta}}{\vdash (A^{\perp} \parr B^{\perp})_1, \Delta}(\parr)}{\vdash (A\otimes B)_2, \Gamma, \Delta}\mathit{cut} \quad \rightsquigarrow \\[2ex]
\rightsquigarrow \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\vdash A_2, A_1, \Gamma_{21}} \quad \dfrac{\vdots}{\vdash A_1^{\perp}, B_1^{\perp}, \Delta}}{\vdash A_2, \Gamma_{21}, B_1^{\perp}, \Delta}\mathit{cut} \quad \dfrac{\vdots}{\vdash B_1, \Gamma_1}}{\vdash A_2, \Gamma_1, \Gamma_{21}, \Delta}\mathit{cut} \quad \dfrac{\vdots}{\vdash B_2, \Gamma_{22}}}{\vdash (A\otimes B)_2, \Gamma, \Delta}(\otimes)
\end{array}
\tag{4.1.2}
$$

che evidenzia come la dinamica preservi la distinzione delle occorrenze. Questo equivale al fatto che le delocalizzazioni preservano i risultati della dinamica, ovvero che, dato un comportamento $\mathbf{G}$ e una delocalizzazione φ, si ha $\varphi(\mathbf{G}^{\overset{\downarrow}{\sim}}) = (\varphi(\mathbf{G}))^{\overset{\downarrow}{\sim}}$. In definitiva, pensare "a meno di occorenze" o, in termini categoriali, "a meno di isomorfismo", equivale a pensare "a meno di delocalizzazioni". Dato un design $\mathfrak{D}$ in base $\vdash \xi$ ($\xi \vdash$), recuperarne l'essenza vuol dire considerarlo un elemento della classe di equivalenza $|\mathfrak{D}| = \{\varphi(\mathfrak{D}) | \varphi$ delocalizzazione$\}$, la quale ricorda molto da vicino l'α-*equivalenza* del λ-calcolo (vd. (Krivine, [49])), ossia la relazione di equivalenza sui λ-termini corrispondente intuitivamente alla sostituzione delle variabili vincolate (il caso tipico è $\lambda x.x \sim \lambda y.y$).

Nella ludica, possiamo dare la seguente definizione, che generalizza la 2.2.23 a pag. 161:

Definizione 4.1.1 (delocalizzazione di design)**.** *Sia $\mathfrak{D}$ un design in base $\Xi \vdash \Lambda$, $\xi \in \Lambda$ (risp. $\xi \in \Xi$) e φ una delocalizzazione di ξ: allora $\varphi(\xi)(\mathfrak{D})$ è definito, per ogni cronaca $\mathfrak{c} \in \mathfrak{D}$, come segue: $\varphi(\xi)(\mathfrak{c})$ è la cronaca in base $\Xi \vdash \varphi(\xi), \Lambda - \{\xi\}$ (risp. $\varphi(\xi) \vdash \Lambda$): $\varphi(\mathfrak{c}) = \langle \dots, (\varphi(\sigma_p), \varphi_{\sigma_p}(I_p)), \dots \rangle$, per ogni azione (σ_p, I_p) tale che σ_p è un sotto-locus di ξ. Nel caso in cui $\mathfrak{c} = \mathfrak{d} * \maltese$, ossia termini con un demone, poniamo $\varphi(\xi)(\mathfrak{c}) = \varphi(\xi)(\mathfrak{d}) * \maltese$.*

In maniera molto meno pedante, avremmo potuto semplicemente scrivere $\varphi(\xi)(\mathfrak{D}) = [\![\mathfrak{D}, \mathfrak{Fax}_{\xi,\varphi(\xi)}]\!]$, nel caso $\xi \in \Lambda$ e $\varphi(\xi)(\mathfrak{D}) = [\![\mathfrak{D}, \mathfrak{Fax}_{\varphi(\xi),\xi}]\!]$, nel caso $\xi \in \Xi$: quella che nel λ-calcolo è detta "sostituzione semplice" nella ludica non è altro che la dinamica dei $\mathfrak{Fax}$. D'altra parte, il problema principale della sostituzione semplice è che dà luogo a interferenze, le quali sono segnalate dalla *non-commutatività* della composizione delle sostituzioni, come mostrato dal seguente esempio:

$$
\begin{aligned}
\lambda z.x < \lambda t.(y)t/x >< \lambda v.v/y > &= \lambda z.\lambda t.(\lambda v.v)t \\
\lambda z.x < \lambda v.v/y >< \lambda t.(y)t/x > &= \lambda z.\lambda t.(y)t
\end{aligned}
\tag{4.1.3}
$$

Un analogo caso di non commutazione, in ludica, si avrebbe con la composizione di due delocalizzazioni φ, ψ tali che $Im\varphi \cap Im\psi \neq \emptyset$. La soluzione, nel λ-calcolo, è quella di prendere ogni volta λ-termini α-equivalenti opportuni, in modo da evitare sistematicamente le interferenze e garantire la commutatività. D'altra parte, nella ludica, i design non sono affatto considerati "a meno di delocalizzazioni", e dunque siamo direttamente esposti alla possibilità delle interferenze: scopriamo così come la disciplina delle variabili vincolate presupponga esplicite richieste normative, analoghe a quelle che danno luogo ai connettivi "spirituali" (vd. §2.2.3): dietro la riuscita di un'interazione come la 4.1.2 sta la richiesta che $(A \otimes B)_1$ e $(A \otimes B)_2$ siano opportunamente delocalizzate, ossia che le loro rispettive sottoformule A_1, B_1, A_2, B_2 siano ancora tutte distinte.

Possiamo dunque vedere nei requisiti normativi sulle delocalizzazioni una *esplicita richiesta di spazio*: l'esempio, già usato, è quello delle delocalizzazioni $\varphi(i * \sigma) = 3i * \sigma, \psi(i * \sigma) = (3i + 1) * \sigma$, che soddisfano senz'altro $Im\varphi \cap Im\psi = \emptyset$, ma a quale prezzo? Non si deve qui pensare al fatto che, essendo lo spazio dei loci infinito, la sua dimensione non aumenta in virtù delle φ e ψ, ma piuttosto al fatto che, dal punto di vista procedurale, tali operazioni hanno senz'altro un costo, dal momento che raddoppiano la dimensione dello spazio entro il quale ha luogo l'interazione, ovvero lo spazio dei loci effettivamente in uso, il quale è senz'altro finito (si pensi qui alla distinzione, cruciale dal punto di vista algoritmico, tra l'intero nastro di una macchina di Turing e la porzione di questo, necessariamente finita, concretamente in uso nell'esecuzione di un calcolo). Questa distinzione, come vedremo, costituirà il perno fondamentale nel cammino verso la sintassi trascendentale.

Per mettere a fuoco questo aspetto, consideriamo il caso che più di tutti ha a che fare con la questione delle risorse, ovvero la dinamica della regola di contrazione: l'idea è quella di associare, a ogni occorrenza della regola (C), due distinte delocalizzazioni φ, ψ, le quali, nel corso dell'interazione, verranno applicate alle derivazioni duali:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\ \pi\\ \vdash \Gamma, \varphi(\xi), \psi(\xi)\end{matrix}}{\vdash \Gamma, \xi}\,(C_{\varphi,\psi}) \qquad \begin{matrix}\vdots\ \lambda\\ \xi \vdash \Delta\end{matrix}}{\vdash \Gamma, \Delta}\,cut \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\ \pi\\ \vdash \Gamma, \varphi(\xi), \psi(\xi)\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\ \varphi(\Delta)\varphi(\xi)(\lambda)\\ \varphi(\xi) \vdash \varphi(\Delta)\end{matrix}}{\vdash \psi(\xi), \Gamma, \varphi(\Delta)}\,cut \qquad \begin{matrix}\vdots\ \psi(\Delta)\psi(\xi)(\lambda)\\ \psi(\xi) \vdash \psi(\Delta)\end{matrix}}{\vdash \Gamma, \varphi(\Delta), \psi(\Delta)}\,cut}{\vdash \Gamma, \Delta}\,(C_{\varphi,\psi}) \tag{4.1.4}$$

La richiesta normativa, di cui deve farsi carico una teoria locativa degli esponenziali, è costituita dalle commutazioni $\varphi(\Delta)\varphi(\xi) = \varphi(\xi)\varphi(\Delta)$ e $\psi(\Delta)\psi(\xi) = \psi(\xi)\psi(\Delta)$ (le quali sono una conseguenza della iniettività di φ e ψ), oltre che da $Im\varphi \cap Im\psi = \emptyset$. Ancora più interessante è il caso in cui risultino annidate due occorrenze della regola di contrazione:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\ \pi\\ \xi \vdash \varphi(\sigma), \psi(\sigma)\end{matrix}}{\xi \vdash \sigma}\,(C_{\varphi,\psi}) \qquad \begin{matrix}\vdots\ \lambda\\ \sigma \vdash \tau\end{matrix}}{\xi \vdash \tau}\,cut \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\ \mu\\ \vdash \theta(\xi), \zeta(\xi), \nu\end{matrix}}{\vdash \xi, \nu}\,(C_{\theta,\zeta})}{\vdash \tau, \nu}\,cut \qquad \rightsquigarrow \tag{4.1.5}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\vdots\;\zeta(\xi)\pi}{\zeta(\xi)\vdash\varphi(\sigma),\psi(\sigma)}\quad\overset{\vdots\;\varphi(\sigma)\varphi\zeta(\tau)(\lambda)}{\varphi(\sigma)\vdash\varphi\zeta(\tau)}}{\zeta(\xi)\vdash\psi(\sigma),\varphi\zeta(\tau)}\,cut\quad\overset{\vdots\;\psi(\sigma)\psi\zeta(\tau)(\lambda)}{\psi(\sigma)\vdash\psi\zeta(\tau)}}{\zeta(\xi)\vdash\varphi\zeta(\tau),\psi\zeta(\tau)}\,cut}{\zeta(\xi)\vdash\zeta(\tau)}\,(C_{\varphi,\psi})\quad\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\vdots\;\theta(\xi)\pi}{\theta(\xi)\vdash\varphi(\sigma),\psi(\sigma)}\quad\overset{\vdots\;\varphi(\sigma)\varphi\theta(\tau)(\lambda)}{\varphi(\sigma)\vdash\varphi\theta(\tau)}}{\theta(\xi)\vdash\psi(\sigma),\varphi\theta(\tau)}\,cut\quad\overset{\vdots\;\psi(\sigma)\psi\theta(\tau)(\lambda)}{\psi(\sigma)\vdash\psi\theta(\tau)}}{\theta(\xi)\vdash\varphi\theta(\tau),\psi\theta(\tau)}\,cut}{\theta(\xi)\vdash\theta(\tau)}\,(C_{\varphi,\psi})\quad\overset{\vdots\;\mu}{\vdash\theta(\xi),\zeta(\xi),\nu}}{\vdash\zeta(\xi),\theta(\tau),\nu}\,cut}{\vdash\theta(\tau),\zeta(\tau),\nu}\,cut}{\vdash\tau,\nu}\,(C_{\theta,\zeta})$$

in cui la richiesta normativa, ben più restrittiva, è data dalle seguenti commutazioni:

$$\begin{aligned}\varphi\zeta(\tau)=\zeta\varphi(\tau),\varphi(\sigma)\varphi\zeta(\tau)=\varphi\zeta(\tau)\varphi(\sigma)\\ \psi\zeta(\tau)=\zeta\psi(\tau),\psi(\sigma)\psi\zeta(\tau)=\psi\zeta(\tau)\psi(\sigma)\\ \varphi\theta(\tau)=\theta\varphi(\tau),\varphi(\sigma)\varphi\theta(\tau)=\varphi\theta(\tau)\varphi(\sigma)\\ \psi\theta(\tau)=\theta\psi(\tau),\psi(\sigma)\psi\theta(\tau)=\psi\theta(\tau)\psi(\sigma)\end{aligned}\tag{4.1.6}$$

nonchè dalla richiesta che le immagini di tutte le composizioni sopra siano a due a due disgiunte; in particolare, nel caso delle φ e ψ esplicitamente definite sopra, non si potrebbe affatto avere $\theta=\varphi$ e $\zeta=\psi$, dal momento che risulterebbe ad esempio $\varphi\zeta=\varphi\psi=\theta\psi=\psi\theta$ (dalla commutatività del prodotto $3(3+1)=(3+1)3$), e dunque "non ci sarebbe abbastanza spazio" per far evolvere la 4.1.5 senza produrre interferenze.

In definitiva, *la struttura algebrica delle delocalizzazioni che sono (in genere implicitamente) incluse nella morfologia del linguaggio adoperato da una certa sintassi sono determinanti nel caratterizzare le essenze che una tale sintassi sarà in grado di veicolare.* Si osservi infatti che, se in una data algebra di delocalizzazioni, qualunque quadrupla di suoi elementi soddisfa i requisiti normativi (commutazioni e immagini a due a due disgiunte), potremo allora considerare la 4.1.5 come determinata "a meno di α-equivalenza", ovvero a meno di un cambiamento di nome alle sue variabili vincolate: come osserva Girard,

> Normativity is usually what goes without saying; for instance, the treatment of *variables* was never questioned, even by the most outrageous AI-oriented "logics". This discipline is indeed a way to cope with interference: outside their range of operationality, i.e., when bound, variables are up to renaming (isomorphism): the discipline avoids accidental coincidences, i.e., interference. (Girard, [44])

Dimenticando per un attimo la nozione tecnica di locus a opera nella ludica, ed anticipando ciò che sta per arrivare, possiamo considerare una variabile vincolata come nient'altro che una componente di una derivazione la cui struttura interna è a priori esclusa dall'interazione: ogni attribuzione strutturale a una variabile, come ad esempio l'attribuzione di un'etichetta, di una formula del linguaggio, è del tutto convenzionale. Questo ci permette di spiegare la scomparsa del linguaggio che in §2.1.2 era stata evidenziata a proposito delle categorie: in un diagramma commutativo, gli oggetti sono considerati "a meno di isomorfismo", e dunque la formula linguistica che viene loro attribuita, il "nome" dell'oggetto, risulta del tutto irrilevante alla struttura del diagramma. Tutto ciò, si ricordi, ammesso che le norme morfologiche siano sempre rispettate.

Il caso degli atomi Incidentalmente, vale la pena di osservare che le riflessioni sul rapporto tra variabili vincolate e normatività hanno delle conseguenze interessanti per quanto riguarda la questione degli *atomi*, delle formule atomiche, le quali, come abbiamo visto, sono del tutto assenti nella ludica. Una formula atomica non è infatti altro che una variabile che risulta vincolata, nella derivazione, dal fatto di occorrere come sottoformula di formule composte: la ludica sta a dimostrare che le norme morfologiche richieste dalle regole "spirituali" della logica sono tali da garantire che la sostituzione, in una derivazione logicamente corretta, di occorrenze di formule atomiche con occorrenze di qualunque altra formula (ammesso che tale sostituzione costituisca una delocalizzazione) preservi la correttezza, nonchè la struttura logica (le azioni) della derivazione (questa osservazione è del resto alla base della possibilità di chiudere ogni derivazione corretta per mezzo della regola di quantificazione universale del secondo ordine).

Tutto ciò sembra essere in palese contraddizione con la concezione semiotica che emerge dalla semantica dei modelli, dal momento che in quel caso l'interpretazione ha sempre inizio con l'attribuzione di una denotazione alle formule atomiche del linguaggio: è questo il fondamento di quella "*atomicité du signe*" (Tronçon, [70]), che abbiamo incontrato discutendo gli approcci "indessicali" al senso e al riferimento in §1.1.2, in virtù della quale la questione della valutazione si ridurrebbe, attraverso la composizionalità della logica, al rapporto diretto tra un segno ed una denotazione.

> A partir du sens du signe de base, on peut découvrir le sens du signe complexe. La signification peut donc être représentée par une algébre formelle mettant en scéne tous les atomes du sens et leurs relations objectives représentées par des liens logiques. (Tronçon, [70])

Ad esempio, Fodor e Lepore, tra i più noti sostenitori dell'approccio "atomistico", ritengono che una conseguenza del principio di composizionalità (per la cui discussione si rimanda a §3.1) sia che la denotazione attribuita alle espressioni atomiche del linguaggio sia indipendente dal contesto, nel senso che, in ogni contesto in cui una tale espressione possa occorrere, tale denotazione risulta invariante:

> The idea is this: compositionality says that the meanings of "John snores" and "John swims" depend, *inter alia*, on the meaning of "John". And it's because "John" means the same in the context "... snores" as it does in the context "...swims" that, if you know what "John" means in one context, you thereby know what it means in the other. (Fodor, Lepore, [20])

A loro parere, questa considerazione ha come conseguenza che l'attribuzione di una denotazione ai segni primitivi possa essere considerata indipendente dal "ruolo funzionale" che quel segno può assumere nei contesti in cui occorre. D'altra parte, quanto sembra emergere da queste pagine è che la stessa identificazione del segno primitivo in quanto tale, nella sua identità di tipo, "a meno di isomorfismo", è il prodotto delle norme che disciplinano la relazione di quello con gli altri segni in una interazione possibile. L'indipendenza dal contesto dell'assegnazione di etichette, di formule, o di denotazioni "nel mondo", secondo questa prospettiva, è piuttosto il risultato di quella normatività di cui la composizionalità, come emerso in §3.3, costituisce più un fenomeno di superficie, un sintomo, che non una ragione profonda; una normatività la cui manifestazione più evidente risulta proprio nell'identificazione di componenti strutturalmente opache (le variabili vincolate, gli atomi, il lessico) e nel rispettoso mantenimento della loro privatezza (nel senso della sostituibilità). D'altra parte, dal punto di vista delle regole della sintassi, ovvero a quel livello dell'analisi in cui la composizionalità assume un ruolo determinante, sono proprio tali componenti, funzionalmente ed interattivamente riconosciute come atomiche in virtù di norme che non sempre, come si è visto (vd. §2.2.2,§3.3,§3.4), sono del tutto esplicitabili a questo livello, a costituire il principale strumento semiotico per la produzione, la generazione, di segni complessi.

Algebra e morfologia nella *GdI* Nella Geometria dell'Interazione, la discussione, fino a questo punto informale, sull'algebra delle delocalizzazioni, assume un preciso contenuto matematico, e costituirà lo strumento decisivo per estendere la teoria proposta in §3.5 al caso degli esponenziali. Per prima cosa dobbiamo riformulare le definizioni date in §3.5 in un ambiente più generale, quello degli *spazi di Hilbert* (vd. §D): notiamo anzitutto che le matrici di permutazione $m_\sigma^{e_i}$ provenienti da un design $(X, m_\sigma^{e_i})$ agiscono sullo spazio di Hilbert $\mathbb{C}^{\sharp X} \simeq \ell^2(X)$. Più in generale, ogni permutazione σ di un insieme $X \subset_f \mathbb{N}$ induce una isometria (vd. proposizione 3.5.1 a pag. 213) u che agisce su $\ell^2(X)$, definita da:

$$u(\sum_{i\in X}\lambda_i e_i) = \sum_{i\in X}\lambda_i e_{\sigma(i)} \tag{4.1.7}$$

D'altra parte, le regole esponenziali, che vorremmo arrivare a definire, non possono esistere in uno spazio con un numero finito deciso a priori di dimensioni (di loci): la dinamica delle regole di indebolimento e contrazione, infatti, non lascia invariante il numero di loci delle derivazioni. Dobbiamo così estendere la nostra teoria al caso dell' (unico) spazio di Hilbert a base numerabile $\ell^2(\mathbb{N})$. Dal momento che consideriamo operatori "moralmente" provenienti da matrici, ci limiteremo, per ora, a operatori u *normali*, ossia tali che $uu^* = u^*u$.

Definizione 4.1.2 (design)**.** *Un design è dato da una* isometria parziale *(normale)* $u \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$*. Il* supporto *di u corrisponde alla proiezione $uu^* = u^*u$.*

Data una base $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$, è facile vedere come questa definizione non sia che una generalizzazione di quanto appena osservato: ad ogni isometria u di $\ell^2(X)$, $X \subset_f \mathbb{N}$, associamo l'isometria parziale $\mathbf{u}$ definita come segue:

$$\begin{gathered}\mathbf{u}(e_i) = \begin{cases} e_{u(i)} & \text{se } i \in X \\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases} \\ \mathbf{u}(\sum_{i\in\mathbb{N}}\lambda_i e_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}}\lambda_i \mathbf{u}(e_i)\end{gathered} \tag{4.1.8}$$

Il caso logicamente corretto, ovvero quello in cui l'isometria u proviene da un proof-net, implica l'*hermiticità* di u (vd. §D): u è infatti una *simmetria*, ovvero $u^2 = uu^* = uu^{-1} =$

I, da cui $u^* = u$; anche $\mathbf{u}$ risulterà hermitiana, e dunque una *simmetria parziale*, e si avrà $\mathbf{u}^3 = \mathbf{u}$.

Possiamo a questo punto riformulare l'esecuzione 3.5.4 (pag. 216), sotto la forma dell'applicazione funzionale 3.5.9 (pag. 219), come segue:

Definizione 4.1.3 (esecuzione)**.** *Siano u e v isometrie parziali di supporto $uu^* = vv^* + \pi$, dove π è una proiezione. Allora, data la decomposizione di $u = \left(\begin{smallmatrix} u_{11} & u_{21} \\ u_{12} & u_{22} \end{smallmatrix}\right)$ lungo le proiezioni vv^* e $I - vv^*$, l'applicazione $[u]v$ di u a v è definita, qualora $vv^* - u_{11}v$ sia invertibile, come*

$$[u]v = u_{22} + u_{12}v(vv^* - u_{11}v)^{-1}u_{21} \tag{4.1.9}$$

Se le isometrie parziali di $\ell^2(\mathbb{N})$ possono essere oggetti infinitari, d'altra parte, nei casi indotti dalla logica, si ha a che fare con operatori u il cui supporto è una proiezione finita, ovvero tali che (con abuso di notazione) si possa scrivere $u \restriction (uu^*) \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$, per un certo $k \in \mathbb{N}$. Di conseguenza, dal punto di vista concreto, algoritmico, il computo dell'esecuzione corrisponde a un calcolo finito.

Il risultato fondamentale di questa versione della *GdI* è il seguente:

Teorema 4.1.1. *Se u e v sono simmetrie parziali provenienti, attraverso il procedimento descritto sopra, applicato* a partire da una stessa base $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *di $\ell^2(\mathbb{N})$, da due derivazioni π e λ in $MELL$ (MLL più le regole esponenziali di LL) di due formule $A \multimap B$ e A, allora $u_{11}v$ è nilpotente e $[u]v$ proviene, attraverso il medesimo procedimento, dalla forma normale della derivazione:*

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi \\ \vdash A \multimap B\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\ \lambda \\ \vdash A\end{array}}{\vdash B}\ cut \tag{4.1.10}$$

Dimostrazione. Il caso puramente moltiplicativo è una semplice riformulazione di quanto visto nel capitolo precedente. Per quanto riguarda il caso esponenziale, che non abbiamo ancora definito e ci limiteremo adesso ad accennare, la dimostrazione rigorosa si può trovare in (Girard, [29]). □

Si noti che, se $u_{11}v \restriction (u_{11}v)(u_{11}v)^* \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ (ammesso che $u_{11}v$ sia ancora una isometria parziale), allora k costituisce il *coefficiente di nilpotenza* di $u_{11}v$ (vd. §3.5), e ci permette di fare una stima del tempo di esecuzione.

Vale la pena di chiedersi che cosa possano rappresentare quelle isometrie parziali che non provengono da paraprove logiche. E' una domanda cui riusciremo a dare una risposta solo in seguito: per il momento ci accontenteremo degli operatori "sintatticamente corretti". Passiamo ora alle delocalizzazioni:

Definizione 4.1.4 (delocalizzazione)**.** *Sia u un design. Una* delocalizzazione *di u è un design dato dalla somma $\varphi + \varphi^*$ di una isometria parziale e della sua aggiunta tale che il dominio di φ commuti con l'immagine di u, ossia $\varphi^*\varphi uu^* = uu^*\varphi^*\varphi$.*

Dato un design u, la richiesta normativa di commutazione di φ con la proiezione uu^* garantisce che l'applicazione $[\varphi+\varphi^*]u = \varphi u\varphi^*$ sia ancora una isometria parziale normale (vd. proposizione 4.4.2 a pag. 262), e dunque un design. Le delocalizzazioni φ e ψ in §2.2.1 sono implementate attraverso le seguenti isometrie parziali:

$$\begin{aligned} \varphi(\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i e_i) &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i e_{3i} \\ \psi(\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i e_i) &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i e_{3i+1} \end{aligned} \tag{4.1.11}$$

le cui aggiunte sono date le seguenti:

$$\begin{aligned} \varphi^*(\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i e_i) &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_{3i} e_i \\ \psi^*(\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i e_i) &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_{3i+1} e_i \end{aligned} \tag{4.1.12}$$

Che queste isometrie siano quello che cerchiamo è mostrato dalla seguente proposizione:

Proposizione 4.1.2. *(i)* $\varphi^*\varphi = \psi^*\psi = I$*;*

(ii) $\varphi^*\psi = \psi^*\varphi = 0$*;*

(iii) l'operatore $\varphi + \psi$ *è una isometria parziale di* $\ell^2(\mathbb{N}) \oplus \ell^2(\mathbb{N})$ *in* $\ell^2(\mathbb{N})$*.*

Dimostrazione. *(i)* $\varphi^*\varphi(\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i e_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_{3i} e_{3i} + \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_{3i+1} e_{3i+1} + \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_{3i+2} e_{3i+2} = \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i e_i$, e similmente per ψ.

(ii) $\varphi^*\psi(\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i e_i) = 0$ e similmente per $\psi^*\varphi$.

(iii) Conseguenza dei precedenti punti.

□

Si osservi che le delocalizzazioni φ e ψ non sono *normali*: non possono cioè costituire dei design nel senso della definizione 4.1.2. Solo in seguito, col ricorso al fattore iperfinito $\mathcal{H}$ (vd. §4.3) riusciremo a dare una definizione di design in cui la richiesta di normalità non sarà più necessaria, e in cui dunque ogni delocalizzazione, in analogia con i $\mathfrak{Fax}$ della ludica, costituirà un design.

Ricordiamo che è possibile definire un preordine sulle proiezioni di un'algebra di Banach $\mathcal{B}(\mathbb{H})$: date due proiezioni π, π', $\pi \simeq \pi'$ quando esiste una isometria parziale $u : \pi \to \pi'$, ovvero tale che $\pi = u^*u$ e $\pi' = uu^*$ e $\pi \leq \pi'$ quando esiste una proiezione π'' tale che $\pi = \pi\pi''$ e $\pi' \simeq \pi''$, e dunque $I < I$[1]. Un'algebra (di operatori) è detta *infinita* quando esiste una isometria parziale dell'identità in una proiezione $\pi < I$ (ossia $\pi \leq I$ e $\pi \neq I$). L'algebra in cui vivono φ e ψ, allora, in virtù della precedente proposizione, non può che essere infinita.

D'altra parte, il principio $A \parr A \multimap A$, ossia la contrazione, non può che richiedere qualcosa come le φ e la ψ: la soluzione proposta da Girard è quella di sfruttare l'isometria

[1]Si noti che è proprio l'infinità dell'algebra a impedire che $\leq$ possa costituire un ordine parziale.

θ di $\ell^2(\mathbb{N}) \otimes \ell^2(\mathbb{N})$ in $\ell^2(\mathbb{N})$ indotta dalla funzione biunivoca $\alpha_2 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ presentata in §1.1.3:

$$\theta(\sum_{i,j\in\mathbb{N}} \lambda_{i,j}(e_i \otimes e_j)) = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \lambda_{\alpha_2(i,j)} e_{\alpha_2(i,j)} \tag{4.1.13}$$

Dato un design u, la regola di promozione $\dfrac{\vdash \Gamma, A}{\vdash ?\Gamma, !A}$ (!) (nella versione "leggera" - vd. §2.1.4) è rappresentata da $!u = \theta(I \otimes u)\theta^*$, mentre la regola (?) $\dfrac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, ?A}$ (?) è ottenuta per mezzo della seguente isometria:

$$\begin{aligned} \zeta(e_i) &= \begin{cases} e_{\alpha_2(1,n)} & \text{se } i \text{ è il locus di } A \\ e_i & \text{altrimenti} \end{cases} \\ \zeta(\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i e_i) &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i \zeta(e_i) \end{aligned} \tag{4.1.14}$$

come $\zeta u \zeta^*$. Sia ora u la matrice

$$\begin{pmatrix} \zeta u_{A_1A_1}\zeta^* & \zeta u_{A_2A_1}\zeta^* & \zeta u_{A_1\Gamma} \\ \zeta u_{A_1A_2}\zeta^* & \zeta u_{A_2A_2}\zeta^* & \zeta u_{A_2\Gamma} \\ u_{A_1\Gamma}\zeta^* & u_{A_2\Gamma}\zeta^* & u_{\Gamma\Gamma} \end{pmatrix} \tag{4.1.15}$$

che rappresenta una derivazione di $\vdash \Gamma, ?A, ?A$. La matrice u' che implementa la contrazione, ovvero la derivazione di $\vdash \Gamma, ?A$, è allora la seguente:

$$\begin{pmatrix} \Phi\zeta u_{A_1A_1}\zeta^*\Phi^* + \Psi\zeta u_{A_2A_1}\zeta^*\Phi^* + \Psi\zeta u_{A_1A_2}\zeta^*\Phi^* + \Psi\zeta u_{A_2A_2}\zeta^*\Psi^* & \Phi\zeta u_{A_1\Gamma} + \Psi\zeta u_{A_2\Gamma} \\ u_{A_1\Gamma}\zeta^*\Phi^* + u_{A_2\Gamma}\zeta^*\Psi^* & u_{\Gamma\Gamma} \end{pmatrix} \tag{4.1.16}$$

dove $\Phi = \theta(\varphi \otimes I)\theta^*$ e $\Psi = \theta(\psi \otimes I)\theta^*$. Date le isometrie parziali v e $!v = \theta(I \otimes v)\theta^*$, si noti che si ha $\zeta^* !v \zeta = v$, e possiamo vedere nel prodotto $[u']!v$ l'esecuzione della dinamica esponenziale:

$$\begin{aligned}[] [u']!v = u_{\Gamma\Gamma} + (\Phi\zeta u_{A_1\Gamma} + \Psi\zeta u_{A_2\Gamma})!v \Big(& (!v)(!v)^* - (\theta(\varphi\varphi^* \otimes u_{A_1A_1}v)\theta^* + \theta(\varphi^* \otimes u_{A_2A_1}v)\theta^* + \\ & + \theta(\psi\psi^* \otimes u_{A_1A_2}v)\theta^* + \theta(\psi^* \otimes u_{A_2A_1}v)\theta^*) \Big)^{-1} (u_{A_1\Gamma}\zeta^*\Phi^* + u_{A_2\Gamma}\zeta^*\Psi^*) \end{aligned} \tag{4.1.17}$$

Si osservi come questa costruzione sia basata sulla *commutazione a priori* $(\varphi \otimes I)(I \otimes v) = (I \otimes v)(\varphi \otimes I)$, la quale indica che il procedimento è indipendente dalla scelta di u e v: il prodotto tensoriale $(\varphi \otimes I)$, essendo sostituibile con un qualunque altro prodotto $(\phi \otimes I)$, dove ϕ è una isometria parziale che soddisfa i punti $(i), (ii), (iii)$ della proposizione 4.1.2 (pag. 232), individua dunque le *variabili vincolate* in questa versione della *GdI*.

Dal punto di vista concreto, possiamo facilmente convincerci che, se $v \upharpoonright vv^* \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$, allora il coefficiente di nilpotenza di $[u']!v$ è uguale a $2k$. Più in generale, nel caso di h

applicazioni consecutive, ovvero con $u = [\dots[[u_1]u_2]\dots]u_{h+1}$, se $u \restriction uu^* \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$, il coefficiente di nilpotenza sarà limitato da $2^h k$; se u proviene a sua volta da d promozioni, ossia d è la sua profondità strutturale (vd. §2.1.4), e h è il numero massimo di applicazioni a ogni profondità, allora il coefficiente di nilpotenza sarà limitato da $2^h_d k$. Abbiamo così un calcolo molto semplificato del tempo di esecuzione dell'algoritmo di eliminazione del taglio per il frammento della logica esponenziale che preserva la profondità (ovvero, in sostanza, una semplice dimostrazione del teorema 2.1.9 a pag. 125 - vd. §2.1.4). D'altra parte, le osservazioni fatte sulle variabili vincolate ci permettono di considerare anche isometrie dalla somma diretta di infinite copie di $\ell^2(\mathbb{N})$ in sè, ovvero casi di contrazioni infinite. Dobbiamo osservare che questi casi, che rendono evidentemente infinito il coefficiente di nilpotenza, pur non avendo alcun contenuto sintattico, sono tuttavia ammessi dalla morfologia che abbiamo definito. Solo nel seguito, attraverso un importante cambiamento di prospettiva, riusciremo a trovare delle motivazioni logiche per sbarazzarci di queste contrazioni infinite.

Inoltre, si noti che la regola (?) e la versione originale della regola (!), ovvero $\dfrac{\vdash ?\Gamma, A}{\vdash ?\Gamma, !A}\ (!)$, che permette di derivare il sequente $??A \vdash ?A$, violano chiaramente l'invarianza dinamica della profondità d, impedendo così di poter fornire esplicitamente un limite iperesponenziale per il tempo di esecuzione. L'implementazione della regola (!) nella GdI richiede il ricorso alla funzione biunivoca $f(\alpha_2(x, \alpha_2(y, z)) = \alpha_2(\alpha_2(x, y), z)$ (che corrisponde alla funzione $f(< n, < m, p >>) =<< n, m >, p >$), la quale induce l'isometria τ data da

$$\begin{aligned} \tau(e_i) &= \begin{cases} e_{\alpha_2(\alpha_2(j,k),h)} & \text{se } i = \alpha_2(j, \alpha_2(k, h)) \text{ ed è il locus di } A \\ e_i & \text{altrimenti} \end{cases} \\ \tau(\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i e_i) &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i \tau(e_i) \end{aligned} \tag{4.1.18}$$

la quale soddisfa

$$\tau\zeta(\zeta u\zeta^*)\zeta^*\tau^* = \tau(I \otimes (I \otimes u))\tau^* = (I \otimes I) \otimes u = I \otimes u = \zeta u\zeta^* \tag{4.1.19}$$

ed è dunque tale che $\tau!u\tau^* =!!u$. Dal punto di vista algebrico, le isometrie, come la τ, costruite a partire da $f(\alpha_2(x, \alpha_2(y, z)) = \alpha_2(\alpha_2(x, y), z)$, appartengono a un gruppo *localmente infinito*:

Definizione 4.1.5. *Un gruppo G è detto* localmente infinito *se esiste un sottoinsieme finito $G' \subset_f G$ la cui chiusura $\overline{G'} = \{g_1 \dots g_k | g_i \in G', 0 < i \leq k, k \in \mathbb{N}\}$ è infinita.*

Sia G il gruppo generato dalle seguenti due bijezioni (le quali inducono immediatamente isometrie di $\ell^2(\mathbb{N})$):

$$\begin{aligned} t(< m, < n, p >>) &=<< m, n >, p > \\ s(<< m, n >, p >) &=<< n, m >, p > \end{aligned} \tag{4.1.20}$$

Sia $H \leq G$ il sottogruppo delle bijezioni del tipo $f(< m, n >) =< g(m), n >, (g \in G)$. I due sottogruppi $tHt^{-1} \leq H$, delle f del tipo $f(<< m, n >, p >) =<< g(m), n >, p >$, e

$sHs^{-1} \leq H$, delle f del tipo $f(<< m, n >, p >) =<< m, g(n) >, p >$, commutano tra loro. E' possibile dunque "duplicare" H mandando i suoi elementi nel suo sottogruppo $tHt^{-1}sHs^{-1} = sHs^{-1}tHt^{-1}$ delle f del tipo $f(<< m, n >, p >) =<< g_1(m), g_2(n) >, p >$. Iterando il procedimento ci rendiamo conto che le isometrie associate alle due t, s permettono di duplicare all'infinito lo spazio dell'interazione. Ora, il gruppo G, che ha due generatori, è infinito (basta verificare che, per ogni $n, m \in \mathbb{N}, n \neq m$, si ha $(ts)^n \neq (ts)^m$), e dunque localmente infinito.

Attraverso la geometria dell'interazione, abbiamo così ricostruito la morfologia delle delocalizzazioni evidenziandone le proprietà algebriche (infinità, infinità locale). Abbiamo inoltre verificato come queste proprietà risultino determinanti nella caratterizzazione dei coefficienti di nilpotenza, ossia, in definitiva, delle risorse spazio-temporali necessarie per l'interazione. In quanto segue, attraverso una importante inversione di prospettiva, che va sotto il nome di *geometria non commutativa*, mostreremo come queste proprietà algebriche abbiano un contenuto allo stesso tempo genuinamente geometrico e logico, in quanto ci permetteranno di caratterizzare i "gradi di infinito" cui danno accesso le sintassi logiche.

4.2 Spazi coerenti e geometria dell'interferenza quantistica

Questo paragrafo è dedicato a ricostruire alcuni punti chiave dell'incontro tra la "geometria quantistica" e la logica, avvenuto, anche da un punto di vista storico, attraverso la riformulazione "indiscreta" e "non insiemistica" degli spazi coerenti. Gli "spazi coerenti quantistici", comparsi per la prima volta in (Girard, [35]), faranno emergere per la prima volta quella distinzione tra gli aspetti "oggettivi" (continui, non sintattici) e "soggettivi" (discreti, sintattici) dell'interazione logica, attraverso gli illuminanti esempi dei "valori di verità quantistici", che corrispondono agli spazi di spin della meccanica quantistica, e delle derivazioni "eta-espanse", caratterizzate dal fatto di dar luogo a fenomeni "soggettivi" come la riduzione del pacchetto d'onde.

Il programma di Connes Uno dei campi di ricerca più fertili e originali emersi negli ultimi anni è quello che si è sviluppato attorno alla *geometria non commutativa* (d'ora in poi NCG) di Alain Connes (vd. (Connes, [12])), i cui studi sono valsi al matematico francese una medaglia Fields nel 1982. Alla base di questa teoria vi è una profonda sintesi di concetti provenienti dall'algebra e dalla geometria, e più in generale un importante ripensamento del rapporto esistente tra le funzioni e gli spazi su cui queste agiscono.

Il punto di partenza, per addentrarci nei contenuti della NCG, è il seguente risultato, dovuto a Gelfand e Naimark:

Teorema 4.2.1. *Sia $\mathcal{A}$ una C^*-algebra (vd. §D). Allora esiste uno spazio di Hilbert $\mathbb{H}$ e una rappresentazione $\pi(\mathcal{A})$ di $\mathcal{A}$ su $\mathbb{H}$, ossia un isomorfismo da $\mathcal{A}$ a una sottoalgebra di $\mathcal{B}(\mathbb{H})$. In particolare, se $\mathcal{A}$ è commutativa (risp. con unità), allora $\mathbb{H} = X$ è un (unico a meno di omeomorfismo) spazio topologico localmente compatto (risp. compatto) e $\pi(\mathcal{A}) = C(X)$ è lo spazio delle funzioni continue su X.*

Che lo spazio $C(X)$ delle funzioni continue su uno spazio topologico compatto X sia una C^* algebra commutativa è facile da dimostrare: è sufficiente dotare $C(X)$ della norma

$$\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)| \tag{4.2.1}$$

sfruttando il teorema di Weierstrass[2], e definire il prodotto e l'aggiunzione rispettivamente come $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$ e $f^*(x) = \overline{f(x)}$. Quello che il teorema 4.2.1 mostra, d'altra parte, è che il solo fatto di avere una C^*-algebra commutativa è sufficiente per trovare uno spazio (localmente) compatto sul quale essa agisce come algebra delle funzioni continue, ovvero, essenzialmente, come algebra delle sue coordinate. Pensiamo ad esempio alla sfera S^n: possiamo considerare l'algebra $\mathcal{A} = C(S^n)$ e verificare che si tratta di una C^*-algebra; oppure, possiamo al contrario dimenticarci delle proprietà geometriche e topologiche di S^n e concentrarci soltanto su $\mathcal{A}$: la costruzione del teorema 4.2.1 ci garantisce allora che le proprietà algebriche di $\mathcal{A}$ caratterizzano a meno di omeomorfismo lo spazio S^n su cui agisce. In altre parole, l'equivalenza di C^*-algebre commutative e spazi topologici localmente compatti ci permette di dimenticare gli spazi geometrici e studiare l'algebra delle loro funzioni. Più concretamente, la parte commutativa del teorema 4.2.1 è una conseguenza del seguente lemma:

Lemma 4.2.2. *Sia $\mathcal{A} = C(X)$ l'algebra commutativa delle funzioni continue sullo spazio topologico localmente compatto X. Esiste un isomorfismo naturale tra X e lo spazio $\chi(\mathcal{A})$ dei* caratteri *di $\mathcal{A}$, ovvero degli* stati *(vd. sotto) ϕ che verificano $\phi(uv) = \phi(u)\phi(v)$.*

Dimostrazione. (cenni) L'isomorfismo naturale è specificato associando, a ogni $x \in X$, il funzionale lineare $\phi_x : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ dato da $\phi_x(f) = f(x)$ e verificando che ϕ_x è un carattere. D'altra parte, si può mostrare (vd. (Caressa, [7])) che a ogni carattere ϕ è associato un unico punto $x \in X$ tale che $\phi = \phi_x$. □

In definitiva, ai punti dello spazio X sono sostituiti gli stati su $\mathcal{A}$, elementi del duale $\mathcal{A}^*$. Si noti, già a un livello così generale, l'analogia tra questa sostituzione e quella, cui gli sviluppi della logica lineare sembrano condurre, del concetto di interazione tra un oggetto ed il suo duale alla nozione di funzione computabile su un oggetto discreto fissato (ad esempio, l'insieme $\mathbb{N}$).

D'altra parte, ancora più innovativo è l'uso che del teorema 4.2.1 ha fatto Connes osservando che, laddove un'algebra di operatori commutativa opera senz'altro su uno spazio topologico, possiamo pensare anche a un'algebra non commutativa come l'insieme delle coordinate su un qualche spazio (di Hilbert). Ma di quale spazio può trattarsi? Per rendersi conto della radicale novità dei concetti in gioco, sarà necessario entrare più nel dettaglio della dimostrazione del teorema 4.2.1.

Ricordiamo (vd. §D) che uno *stato* su una C^*-algebra è un funzionale lineare ω su $\mathcal{A}$ positivo, ossia tale che $\omega(u^*u) > 0$, e normalizzato, ossia tale che $\omega(I) = 1$. Per semplicità ci limiteremo al caso di una C^*-algebra separabile (ossia che ammette una sottoalgebra numerabile densa), per via della seguente proposizione:

[2]Ogni funzione continua a supporto compatto ammette massimo e minimo.

Proposizione 4.2.3. *Ogni C^*-algebra $\mathcal{A}$ separabile ammette uno stato ω* fedele*, ovvero tale che, per ogni operatore positivo $uu^* \in \mathcal{A}$, $\rho(uu^*) = 0 \Rightarrow u = 0$.*

Dimostrazione. Sia $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione densa in $\mathcal{A}$. Applicando il teorema D.2.3 di Hahn-Banach (pag. 329), possiamo costruire una successione ω_n di stati tali che $\omega_n(u_n u_n^*) \neq 0$. Allora, considerando un baricentro di questi stati, ovvero una somma (convergente) $\omega = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \omega_n$, con $\lambda_n \neq 0$, ω è sicuramente tale che $\omega(uu^*) \neq 0$ per u appartenente a un aperto contenente le u_n, e dunque per ogni $u \neq 0$. □

Passiamo a questo punto alla cosiddetta *costruzione di Gelfand-Naimark-Segal*, che ci permette di costruire esplicitamente, a partire dalla $\mathcal{A}$ separabile, la sua rappresentazione in una $\mathcal{B}(\mathbb{H})$:

Definizione 4.2.1 (costruzione GNS)**.** *Sia $\mathcal{A}$ una C^*-algebra separabile e ω uno stato fedele su $\mathcal{A}$. Allora $\omega(v^*u)$ $(u, v \in \mathcal{A})$ definisce una forma sesquilineare (vd. §D) su $\mathcal{A}$ (infatti uno stato è sicuramente hermitiano - $\omega(u^*) = \omega(u)$), e dunque induce uno spazio pre-hilbertiano, il cui completamento è uno spazio di Hilbert $\mathbb{H}_\omega$.*

$\mathcal{A}$ agisce su $\mathbb{H}_\omega$ attraverso la rappresentazione regolare sinistra *$\pi(\mathcal{A})$, data da $\pi(u)v := uv$, e definita sul sottospazio denso $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathbb{H}_\omega)$. Si ha infatti, per $\|u\|_{\mathcal{A}} \leq 1$, $\|\pi(u)v\|^2 = \omega(v^*u^*uv) \leq \omega(v^*Iv) = \|v\|^2$, e dunque $\|\pi(u)\| \leq 1$, ovvero $\pi(u)$ è limitato e può quindi essere esteso per continuità a tutto $\mathbb{H}_\omega$ (vd. proposizione D.2.1 a pag. 328).*

Il risultato principale sulla costruzione GNS è la seguente:

Proposizione 4.2.4. *La rappresentazione $\pi(\mathcal{A})$ è isometrica.*

Dimostrazione. π è chiaramente iniettiva: da $\pi(u) = \pi(v)$ e $u \neq v$ seguirebbe, dato $h \neq 0$, $0 = (\pi(u) - \pi(v))h = \pi(u)h - \pi(v)h = uh - vh = (u - v)h \neq 0$. Basta quindi applicare il teorema D.4.1 a pag. 332. □

Gli spazi coerenti quantistici A questo punto[3], applicando gli insegnamenti del caso commutativo, piuttosto che chiedersi direttamente che struttura possa avere lo spazio $\mathbb{H}_\omega$, ci rivolgeremo esclusivamente all'algebra $\mathcal{A}$: per il momento ci limiteremo al caso in cui $\mathcal{A}$ è un'algebra finita, ovvero nella quale non è possibile ad esempio trovare le isometrie φ e ψ descritte nel paragrafo precedente. L'esempio tipico di C^*-algebra finita è la $\mathcal{M}_k(\mathbb{C}), k \in \mathbb{N}$, nella quale, data la base canonica $(e_i)_{i\leq k}$, troviamo le proiezioni $\pi_i, 0 < i \leq k$ *minimali* o *abeliane*, ovvero tali che l'algebra $\pi_i \mathcal{M}_k(\mathbb{C})\pi_i$ sia isomorfa a $\mathbb{C}$, e dunque commutativa (abeliana):

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \pi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \pi_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{4.2.2}$$

[3]Il punto di riferimento per quanto segue è costituito da (Girard, [35, 37]).

Possiamo pensare a queste proiezioni come ai *punti* dello spazio su cui agisce l'algebra $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$, ed alle somme finite $\pi_{i_1} + \cdots + \pi_{i_h}, 0 < i_j \leq k, h \leq k, j \neq j' \Rightarrow i_j \neq i_{j'}$ come ai sottospazi lineari o, equivalentemente, ai *sottoinsiemi di punti* dello spazio. Considereremo infatti $|\mathcal{A}| = \{\pi_1, \dots, \pi_k\}$ il supporto di uno spazio coerente $\mathcal{A}$, e definiremo il prodotto scalare tra i sottoinsiemi (definiti attraverso la loro *funzione caratteristica* $\sum_{0<i\leq k}(x_i\pi_i), x_i \in \{0,1\}$) come segue:

$$\langle \sum_{0<i\leq k}^{k} x_i\pi_i | \sum_{0<i\leq k}^{k} y_i\pi_i \rangle = \sum_{0<i\leq k}^{k} x_iy_i\pi_i, \qquad (x_i, y_i \in \{0,1\}) \tag{4.2.3}$$

La dualità 1.2.12 (pag. 57) degli spazi coerenti induce allora la seguente dualità (con $u = \sum_{0<i\leq k}^{k} x_i\pi_i$ e $v = \sum_{0<i\leq k}^{k} y_i\pi_i$):

$$u \overset{\downarrow}{\sim} v \Leftrightarrow \langle u|v \rangle \leq 1 \tag{4.2.4}$$

Fin qui, quello che abbiamo ottenuto è, apparentemente, nient'altro che una riformulazione del lessico degli spazi coerenti, in cui ai valori della funzione caratteristica di un insieme sono associati gli elementi (0 e 1) dello *spettro* (vd. §D) $\sigma(u)$ di un operatore (una proiezione) $u \in \mathcal{A}$. D'altra parte, la caratteristica degli operatori delle algebre che stiamo adoperando è quella di essere la "versione non commutativa" degli elementi del proprio spettro. Per vedere questo dobbiamo estendere il nostro approccio e considerare arbitrari operatori a spettro reale, ovvero operatori *hermitiani* (di cui fanno sicuramente parte le proiezioni). Lo spazio $\mathcal{H}_k \subset \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ degli hermitiani che agiscono su $\mathbb{C}^k$ è dotato di un prodotto scalare definito come

$$\langle u|v \rangle = tr(uv) \tag{4.2.5}$$

(si noti che, nel caso in cui u e v siano funzioni caratteristiche la traccia corrisponde proprio alla cardinalità della intersezione) il quale ci permette di dare le seguente definizione:

Definizione 4.2.2 (Spazio coerente quantistico). *Uno* spazio coerente quantistico *(QCS) X di supporto $|X| \subset_f \mathbb{N}$, con $\sharp|X| = k$ è un sottoinsieme $X \subset \mathcal{H}_k$ uguale al suo bipolare, secondo la dualità data dalla da 4.2.4.*

Questa definizione ci permette di rendere ben più naturale la identificazione tra punti e proiezioni abeliane:

Definizione 4.2.3 (punto). *Sia $X \subset \mathcal{H}_k$ un QCS. Un* punto *x di X, che scriveremo, con abuso di notazione, $x \in X$, è una qualsiasi proiezione abeliana di X.*

Il problema si presenta con i sottoinsiemi: in effetti, la somma di due proiezioni non è in generale una proiezione, a meno che queste *commutino* (vd. §D):

Definizione 4.2.4 ($MASA$). *Sia $\mathcal{A}$ una C^*-algebra. Una* sottoalgebra abeliana massimale *(MASA) $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ è una sotto-C^*-algebra di $\mathcal{A}$ commutativa uguale al suo commutatore $\mathcal{B}' = \{u | \forall v \in A \ uv = vu\}$.*

Definizione 4.2.5 (punti insiemistici)**.** *Sia $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ una $MASA$ e sia $X \subset \mathcal{H}_k$ un QCS. Un punto $x \in X$ è detto* insiemistico *(rispetto a $\mathcal{B}$) quando $x \in \mathcal{B}$.*

Se $x_1, \ldots, x_n \in X$ sono punti insiemistici, allora commutano a due a due, in quanto si verifica facilmente che vale $x_i x_j = 0, 0 < i \neq j \leq n$; in altre parole, $x_1 + \cdots + x_n$ è una proiezione, che scriveremo, con abuso di notazione, $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$. Diremo che due sottoinsiemi $u, v \subset X$ sono insiemistici quando lo sono, a due a due, i loro punti. Nel caso di $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ possiamo considerare le seguenti $MASA$:

Proposizione 4.2.5. *Le algebre $\mathcal{P}_{(e_i)_{i \leq k}} = \{u \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C}) | u$ è diagonale in base $(e_i)_{i \leq k}\}$ sono $MASA$ di $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$.*

Dimostrazione. Le matrici del tipo

$$A_{i,j} = (\delta_{k,l}^{i,j}) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = i \text{ e } j = l \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{4.2.6}$$

costituiscono una base per $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ e dunque le $A_{i,i}$ sono una base per $\mathcal{P}_{(e_i)_{i \leq k}}$. Sia ora $\mathcal{P} \supset \mathcal{P}_{(e_i)_{i \leq k}}$ commutativa; allora esiste una matrice A_{i_0, j_0} con $i_0 \neq j_0$ che appartiene al commutatore $\mathcal{P}'_{(e_i)_{i \leq k}}$. D'altra parte, si ha che

$$A_{i,j} A_{k,l} = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq k \\ A_{i,l} & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{4.2.7}$$

e dunque $A_{i_0,j_0} A_{j_0,j_0} = A_{i_0,j_0}$ e $A_{j_0,j_0} A_{i_0,j_0} = 0$, da cui otteniamo che $\mathcal{P}$ non è commutativa.

□

Siano ora $u, v \subset X$ sottoinsiemi polari di uno spazio X, ovvero tali che $\langle u | v \rangle \leq 1$. Si danno due possibilità:

- u e v sono insiemistici (rispetto a una qualche $MASA$): allora la somma $\sum_{0<i \leq k}^{k} u_i v_i$ ha al più un unico termine (indiciato da i) diverso da zero, il che corrisponde al fatto che il punto $x = \pi_i$ è l'unico punto nell'intersezione di u e v.

- u e v non sono insiemistici: allora la somma $\sum_{0<i \leq k}^{k} u_i v_i \leq 1$ non induce affatto (al più) un unico punto nell'intersezione, ma attribuisce a ogni punto $x_i = \pi_i$ quella che, in analogia con la meccanica quantistica, possiamo interpretare come una probabilità $0 \leq |(u_i v_i)|^2 \leq 1$ di essere il prescelto: la scelta di un unico punto richiede che abbia luogo una *riduzione* (vd. sotto).

Il fatto che nel secondo caso non sia possibile individuare con certezza il punto nell'intersezione dei due sottoinsiemi va al di là di una semplice forma di ignoranza: in realtà i punti di uno dei due sottoinsiemi sono tali da non poter affatto appartenere all'altro: se $x \in u, y \in v$, allora non è in generale vero che $x + y$ è un sottoinsieme di X, in quanto x e y non commutano; u e v, per così dire, appartengono a teorie degli insiemi differenti!

Spin e valori di verità L'analogia con il caso quantistico si fa qui particolarmente stringente: consideriamo il caso $k = 2$, ovvero lo spazio $\mathcal{H}_2$ degli hermitiani rappresentati da matrici 2×2. Possiamo scrivere il generico elemento $u \in \mathcal{H}_2$ come

$$u = \begin{pmatrix} t+z & x-iy \\ x+iy & t-z \end{pmatrix} \tag{4.2.8}$$

che possiamo considerare come il generico punto spazio-temporale $u = ts_0 + xs_1 + ys_2 + zs_3$, $t, x, y, z \in \mathbb{R}$ (inducendo così un isomorfismo $\mathcal{H}_2 \simeq \mathbb{R}^4$), dove le s_i sono (essenzialmente) le *matrici di Pauli*:

$$s_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad s_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad s_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad s_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.2.9}$$

Queste matrici, pur non essendo proiezioni, si comportano come delle proiezioni di $\mathbb{R}^4$, in quanto valgono le seguenti equazioni:

$$tr(s_0u) = t \qquad tr(s_1u) = x \qquad tr(s_2u) = y \qquad tr(s_3u) = z \tag{4.2.10}$$

Nella meccanica quantistica[4] le quantità $tr(s_iu)$ sono interpretate come il risultato della misura dello *spin* del sistema rappresentato da u lungo l'asse spazio-temporale associato all'*osservabile* s_i. Si ricordi che la misura dello spin, lungo un asse, di un sistema costituito da una sola particella fermionica, può assumere i soli due valori $\pm 1/2$, associati ai due *autostati* del rispettivo operatore di spin s_i $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$: applicando il teorema D.3.5 di decomposizione spettrale (331) per gli operatori hermitiani, possiamo verificare che $(|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle)$ costituisce una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ rispetto alla quale s_i si esprime in forma diagonale come $s_i = 1/2(\lambda_1|\uparrow\rangle + \lambda_2|\downarrow\rangle)$, con $\lambda_1 = \pm 1$ e $\lambda_2 = -\lambda_1$, e dunque si ha:

$$tr(s_iu) = tr(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} \\ u_{12} & u_{22} \end{pmatrix}) = \frac{1}{2}(\lambda_1u_{11} + \lambda_2u_{22}) \tag{4.2.11}$$

dove le u_{11} e u_{22}, nel caso fondamentale in cui u sia una *matrice densità*, ovvero positiva e con $tr(u) = t = 1$, sono interpretate come le probabilità che il risultato della misura di u sia rispettivamente λ_1 o λ_2.

Possiamo a questo punto pensare agli hermitiani u, alle $s_i, 0 \leq i \leq 3$ ed all'operatore traccia come costituenti una *sintassi* cui attribuiamo la seguente *semantica*:

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{H}_2 &\longmapsto \text{sistema } P_u \in \mathbb{R}^4 \\ tr(s_iu) &\longmapsto \text{misura dello spin di } P_u \text{ lungo l'asse } i \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

Si verifica facilmente che, per ogni $u \in \mathcal{H}_2$, rappresentato nella forma 4.2.8, si ha che $s_iu \in \mathcal{H}$, ossia è un sistema: la procedura di misura può dunque essere iterata. E' a questo punto che interviene la peculiare non commutatività degli operatori di spin s_i:

[4] O meglio, in una versione semplificata del formalismo quantistico.

supponiamo di aver misurato lo spin lungo l'asse x (ovvero l'asse 1) del sistema u in 4.2.8 e di aver così ottenuto il sistema s_1u seguente:

$$s_1u = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x+iy & t-z \\ t+z & x-iy \end{pmatrix} \tag{4.2.13}$$

Osserviamo subito che questo sistema, pur essendo hermitiano, non ha la forma 4.2.8. In effetti, se gli applichiamo un qualunque operatore di spin, ad esempio s_2, otteniamo

$$s_2(s_1u) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x+iy & t-z \\ t+z & x-iy \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -i(t+z) & -y-ix \\ -y+ix & i(t-z) \end{pmatrix} \tag{4.2.14}$$

che non è nemmeno un sistema: in particolare il risultato della misura $tr(s_2(s_1u)) = -iz/2 \notin \mathbb{R}$ è, dal punto di vista della nostra semantica, del tutto privo di senso! Che qualcosa, nella doppia misurazione, sia andato storto è testimoniato dal distinto, ma ugualmente insensato, risultato della misura ottenuta applicando i due operatori di spin in ordine inverso:

$$tr(s_1(s_2u)) = \frac{1}{4}tr(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y-ix & i(z-t) \\ i(t+z) & y+ix \end{pmatrix}) = \frac{1}{4}tr(\begin{pmatrix} i(t+z) & y+ix \\ y-ix & i(z-t) \end{pmatrix}) = iz/2 \tag{4.2.15}$$

La soluzione, nell'ambito della teoria quantistica, a questo apparente paradosso, è il cosiddetto *postulato di riduzione del pacchetto d'onde* che, nel nostro caso, possiamo così formulare:

Dato un sistema $u \in \mathcal{H}_2$ ed un'osservabile $s \in \mathcal{H}_2$, la misura di u tramite s proietta u in uno degli autostati di s, con una probabilità assegnata dalle $u_{ii}, i \in \{1,2\}$.

(4.2.16)

Questo equivale a dire che, la misura 4.2.11 ha la conseguenza di "uccidere" i coefficienti non diagonali di u: il risultato $tr(su)$ resta infatti lo stesso nel momento in cui $u \rightsquigarrow u'$ è ridotta alla matrice diagonale:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & 0 \\ 0 & u_{22} \end{pmatrix} \tag{4.2.17}$$

Riproducendo le due misure iterate $s_1(s_2u)$ e $s_2(s_1u)$ alla luce del postulato di riduzione, abbiamo che

$$s_1u \rightsquigarrow s_1u' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x+iy & 0 \\ 0 & x-iy \end{pmatrix} \tag{4.2.18}$$

e dunque

$$tr(s_2(s_1u')) = \frac{1}{4}tr(\begin{pmatrix} 0 & -y-ix \\ -y+ix & 0 \end{pmatrix}) = 0 \tag{4.2.19}$$

ed analogamente nel caso inverso di $s_1(s_2u)$. In definitiva, se il valore dello spin del sistema lungo uno degli assi è determinato tramite una misura, il valore dello spin lungo uno qualsiasi degli altri assi risulta completamente indeterminato, dal momento che la prima misura ha fatto "collassare" il sistema in un autostato della prima osservabile, distruggendo l'informazione precedentemente posseduta dal sistema.

L'interpretazione fisica del postulato di riduzione costituisce uno dei più rilevanti temi ancora aperti nella fisica teorica e nella filosofia della meccanica quantistica (si veda, per un'introduzione, (Ghirardi, [26])). Senza pretendere di entrare nel merito di un così ampio dibattito, quello che ci sarà utile osservare, su quanto mostrato sin qui, è che il risultato di una misura di un sistema, da parte di un osservatore è, in un certo senso, soggettivo, in quanto funzione della storia che ha portato quell'osservatore a compiere una tale misura: in particolare, la non commutatività di $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ha come conseguenza che l'ordine delle misure che l'osservatore sceglie liberamente di compiere è rilevante nel determinare i valori che il sistema osservato sarà, in qualche modo, in virtù del postulato di riduzione, "forzato" ad assumere. Un esempio di questa *interferenza* tra osservatore e sistema è il celebre *esperimento della doppia fenditura*, per un'ampia discussione del quale si rimanda ancora a (Ghirardi, [26]). Che posto può avere una tale soggettività, la cui natura è ancora tutta da spiegare, nella descrizione fisica, oggettiva, della realtà?

Nei termini della sintassi e della semantica sopra accennate, è necessario distinguere:

- La misura "standard" $tr(s_i u)$, il cui risultato è del tutto in accordo con le attese, ovvero con ciò che la sintassi e la semantica ci dicono che *dovrebbe* accadere. E' il caso corrispondente alla misura $tr(uv)$ tra due sottoinsiemi insiemistici, *isomorfa* alla dualità classica degli spazi coerenti.

- La misura "non standard", quella in cui ha luogo una riduzione, che mette in evidenza l'interferenza tra due osservabili, segnalata dalla loro non commutazione. E' il caso della dualità $tr(uv)$ tra sottoinsiemi non insiemistici, che non può essere in alcun modo espressa nei termini degli spazi coerenti classici, ma richiede essenzialmente il ricorso ai QCS.

Si osservi come, d'altra parte, il risultato $tr(s_i u) = tr(s_i u')$ della misura sia indipendente dalla riduzione, pur essendo quest'ultima una conseguenza diretta della misura stessa. Per chiarire questo punto possiamo servirci di quel curioso incrocio di logica e meccanica quantistica, operato dai QCS, intorno al concetto di *sovrapposizione* (vd. §2.2.2), ovvero, essenzialmente, alla logica additiva:

Definizione 4.2.6. *Siano X, Y QCS. I QCS $X \oplus Y, X \,\&\, Y \subset \mathcal{H}_k = \mathcal{H}_{\sharp X} \oplus \mathcal{H}_{\sharp Y}$, di supporto $|X| \oplus |Y|$, sono dati dai seguenti insiemi (in cui le π_X, π_Y rappresentano le proiezioni ortogonali sui sottospazi $\mathcal{H}_{\sharp X}$ e $\mathcal{H}_{\sharp Y}$ della somma diretta $\mathcal{H}_k$) :*

$$\begin{aligned} X \oplus Y &= \{\lambda u + (1-\lambda)v | u \in X, v \in Y, \lambda \in \mathbb{R}, 0 \leq \lambda \leq 1\} \\ X \,\&\, Y &= \{u | \pi_X u \pi_X \in X, \pi_Y u \pi_Y \in Y\} \end{aligned} \tag{4.2.20}$$

Proposizione 4.2.6. $X^{\downarrow\sim} \oplus Y^{\downarrow\sim} = (X \,\&\, Y)^{\downarrow\sim}$

Dimostrazione. Siano $u \in X^{\downarrow\sim}, v \in Y^{\downarrow\sim}, h \in X \,\&\, Y, \lambda \in \mathbb{R}, 0 \leq \lambda \leq 1$; si ha

$$\langle \lambda u \oplus (1-\lambda)v | h \rangle = \langle \lambda u + (1-\lambda)v | \pi_X h \pi_X \oplus \pi_Y h \pi_Y \rangle = \lambda \langle u | \pi_X h \pi_x \rangle + (1-\lambda)\langle v | \pi_Y h \pi_Y \rangle \leq 1 \tag{4.2.21}$$

da cui segue la tesi. □

Dato il QCS $\mathbf{1} = \perp = [0,1] \subset \mathbb{R}$, gli additivi ci permettono di definire il QCS **Bool** come segue:

$$\mathbf{Bool} := \mathbf{1} \oplus \mathbf{1} = \{ \left(\begin{smallmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{smallmatrix}\right) | 0 \leq a_1, a_2 \leq a_1 + a_2 \leq 1, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} \tag{4.2.22}$$

il cui duale è lo spazio $\mathbf{Bool}^{\downarrow\!\sim}$ dato da:

$$\mathbf{Bool}^{\downarrow\!\sim} = \perp \,\&\, \perp = \{ \left(\begin{smallmatrix} b_1 & c \\ \bar{c} & b_2 \end{smallmatrix}\right) | b_1, b_2 \in \mathbb{R}, 0 \leq b_1, b_2 \leq 1\} \tag{4.2.23}$$

Gli elementi "classici" di **Bool** sono i due valori di verità **T** e **F**:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.2.24}$$

i quali sono caratterizzati, *in maniera indipendente dalla base*, dalle condizioni $tr(u) = 1$ e $det(u) = 0$ come le proiezioni su sottospazi di $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ di dimensione uno. Applicando queste condizioni al generico hermitiano u nella forma 4.2.8, otteniamo che un valore di verità "quantistico" è un qualsiasi hermitiano della forma $U = s_0 + xs_1 + ys_2 + zs_3$, con $x^2 + y^2 + z^2 = 1$: questo segue da $tr(u) = t$ e $4det(u) = t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$ (il quadrato della pseudometrica di Minkoswki). In definitiva, i valori di verità "quantistici" sono in corrispondenza biunivoca con i punti della sfera $S^2 = \{(x, y, z) | \|(x, y, z)\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, nota in fisica come lo *spazio di spin* di u. Possiamo dunque considerare il seguente spazio coerente quantistico:

$$\mathbf{Spin} = \{u \in \mathcal{H}_2 | tr(u) \leq 1, u \text{ positiva}\} \tag{4.2.25}$$

che consiste di tutte le combinazioni lineari di valori di verità quantistici a coefficienti $0 \leq a_1, a_2 \leq a_1 + a_2 \leq 1$.

Possiamo del resto vedere **Bool** come l'insieme delle combinazioni lineari $a_1\mathbf{T}+a_2\mathbf{F}$ di valori di verità "classici", con $0 \leq a_1, a_2 \leq a_1 + a_2 \leq 1$. Di conseguenza, la definizione di **Bool** risulta dipendente dalla scelta della base costituita dai valori di verità "classici". Nei termini della identificazione tra valori di verità e punti di S^2, la scelta di **T** e **F** corrisponde alla scelta di un punto $\underline{p} = (x, y, z) \in S^2$, e dunque lo spazio **Bool** andrebbe specificato come $\mathbf{Bool}_{\underline{p}}$, ovvero dipendente dalla scelta di una base. Possiamo a questo punto verificare che **Spin** non è altro che la versione "oggettiva", indipendente dalla base, di **Bool**, ovvero:

Proposizione 4.2.7. $\mathbf{Spin} = \bigcup_{\underline{p} \in S^2} \mathbf{Bool}_{\underline{p}}$

Dimostrazione. Che $\mathbf{Bool}_{\underline{p}} \subset \mathbf{Spin}$ è immediato. Il viceversa è ottenuto diagonalizzando un arbitrario hermitiano $u \in \mathbf{Spin}$ ed associando al primo elemento e_1 della base ottenuta il corrispondente punto $\underline{p}_e \in S^2$: si avrà allora $u \in \mathbf{Bool}_{\underline{p}_e}$.

□

Per renderci conto al meglio della sostanziale differenza tra il caso “classico” di $\mathbf{Bool}_{\underline{p}}$ e quello “quantistico” di **Spin** consideriamo le due seguenti interazioni:

caso insiemistico Prendiamo l’elemento canonico di $\mathbf{Bool}_{\underline{p}}^{\overset{|}{\sim}}$, ovvero l’operatore identità I_2. L’interazione $\mathbf{T}I_2$ produce il booleano $\mathbf{T}$: siamo in piena sintassi insiemistica.

caso quantistico Sia $u \in \mathbf{Spin}$ un valore di verità “quantistico” e $v \in \mathbf{Spin}^{\overset{|}{\sim}} = \bigcap_{\underline{p}\in S^2} \mathbf{Bool}_{\underline{p}}^{\overset{|}{\sim}}$. Consideriamo il risultato della misura $\langle u|v\rangle = tr(uv)$. Sia $u \in \mathbf{Bool}_{\underline{q}}$ e sia v diagonale nella base indotta da $\underline{p}$; a meno che non si abbia $\underline{p} = \underline{q}$, il risultato sarà probabilistico: in particolare, leggendolo in base $\underline{q}$, la misura assegna delle probabilità ai due valori di verità “classici”, che possiamo scrivere $\mathbf{T}_{\underline{q}}$ e $\mathbf{F}_{\underline{q}}$ di cui u è combinazione lineare:

$$tr(uv) = tr(\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{pmatrix}) = tr(a_{11}v_{11}\mathbf{T}_{\underline{q}} + a_{22}v_{22}\mathbf{F}_{\underline{q}}) = a_{11}v_{11} + a_{22}v_{22} \tag{4.2.26}$$

e dunque $v \rightsquigarrow v'$, con quest’ultima anch’essa combinazione lineare $v_{11}\mathbf{T}_{\underline{q}} \oplus v_{22}\mathbf{F}_{\underline{q}}$.

Si noti, a questo punto, che $v' \notin \mathbf{Bool}_{\underline{p}}^{\overset{|}{\sim}}$, ovvero la misura ha fatto sì che v perdesse l’informazione (sintattica) in virtù di cui era scomponibile come $\perp_{\underline{p}} \,\&\, \perp_{\underline{p}}$.

Le sintassi come algebre commutative L’applicazione degli strumenti della geometria non commutativa all’interazione logica ha la notevole conseguenza di far emergere una distinzione tra i risultati dell’interazione, “oggettivi” nel senso di indipendenti dalla scelta di una $MASA$, e la scomposizione degli operatori coinvolti in essa secondo le regole della sintassi che li ha generati. Si noti, del resto, che gli spazi coerenti $\mathbf{Bool}_{\underline{p}}$ sono, al variare di $\underline{p}$, tutti chiaramente isomorfi, sebbene non condividano, per così dire, una sintassi comune. Questa netta separazione della dimensione sintattica dall’*essenza*, ovvero dalla classe di isomorfismo, in piena contraddizione con l’impostazione essenzialista, non sembra accessibile se non al di fuori della impostazione insiemistico-combinatoria su cui poggiano, in definitiva, tutti i formalismi logici sin qui esaminati.

Richiamando la questione discussa in §1.1.5 della “soggettività della sintassi”, ci troviamo così introdotti nella ricerca dell’ineliminabile contestualità che gli strumenti soggettivi, ovvero sintattici, apportano alla dimensione semiotica: nel primo capitolo è stata introdotta la nozione di *soggettività come irrilevanza ai fini della valutazione*, e si è verificato come la sintassi risultasse soggettiva in questo senso in virtù della possibilità di “modelli non standard”; nel secondo capitolo è stata introdotta la *soggettività come irrilevanza rispetto all’essenza*, e si è mostrato come anche questa fosse peculiare della sintassi. La sfida della sintassi trascendentale ci conduce ora verso una nozione di soggettività in grado di riassumere le precedenti, quella che potremmo chiamare *soggettività come commutatività*, che possiamo così esprimere:

Gli artefatti generati da una sintassi appartengono a un’algebra commutativa (4.2.27)

L'idea è quella di ricostruire l'interazione logica attraverso gli operatori di una qualche algebra non commutativa, radicalizzando così la ricerca di un medium pre-sintattico che ci aveva portato alle strutture dimostrative (vd. 3.2 a pag. 179). Del resto, l'indipendenza dell'interazione dalla commutatività dell'algebra di riferimento, e dunque dalle regole sintattiche, costituisce la controparte, in questa prospettiva, della refutazione, che ci ha occupato nei precedenti capitoli, del principio dell'inferenzialità delle norme (vd. §2.1.1): il compito che si profila è quello di cercare un preciso contenuto logico a queste forme di interazione non sintattica, attraverso il quale ricostruire con chiarezza il ruolo giocato in esse dalla commutatività, dalla sintassi. In definitiva, le nozioni di "oggettivo" e "soggettivo" che adoperemo di qui in poi, e di cui si era detto in §4.1, possono essere così espresse:

Una proprietà è "oggettiva" se il suo soddisfacimento non dipende da alcuna richiesta di commutazione; una proprietà è "soggettiva" se, al contrario, il suo soddisfacimento dipende da ipotesi di commutazione.

(4.2.28)

Si osservi che, se una proprietà dipende da ipotesi di commutazione, allora, ogniqualvolta questa venga soddisfatta, lo sarà in riferimento a una specifica sottoalgebra commutativa. La nozione di "soggettività" così delineata recupera così la "soggettività della sintassi" discussa a partire da §1.1.3: le proprietà soggettive sono quelle la cui validità dipende dalla scelta, che può apparire del tutto convenzionale, di una particolare sintassi (si pensi alla induzione fino a ϵ_0 discussa in §1.1.4).

Come vedremo nei prossimi paragrafi, la nostra guida in questo originale percorso ideato da Girard sarà costituita dal fondamentale teorema di sequenzializzazione 3.3.7 a pag. 197. In effetti, il merito di quel teorema è quello di introdurre una precisa relazione tra la valutazione logica di una interazione (l'analogo di ciò che, nella logica tradizionale, è ottenuto attraverso la nozione di "contromodello") e *la possibilità di scomporre tale risultato - la* **PS** *ed un suo giro lungo - in accordo con le regole generative della sintassi di* MLL*. E' proprio questa possibilità di scomposizione, intesa in un contesto adeguatamente generalizzato, che costituirà l'oggetto genuinamente trascendentale dei prossimi paragrafi, e che risulta già accennata dagli esempi prodotti dai* QCS.

MLL **e il postulato di riduzione** Ci rivolgiamo adesso alla teoria moltiplicativa, mostrando come i QCS permettano di rappresentarla, inducendo così un analogo dell'equazione 1.2.12 a pag. 57 che abbiamo riconosciuto come il perno concettuale, al di là dei formalismi, della teoria stessa (vd. §3.5). Tale applicazione ci permetterà di presentare un ulteriore esempio illuminante del rapporto tra contenuto logico e scomposizione sintattica.

Cominciamo con il seguente, fondamentale, risultato, riguardante gli spazi $\mathcal{L}(\mathbb{H})$ degli operatori lineari da $\mathbb{H}$ a $\mathbb{H}$, dove $\mathbb{H}$ è uno spazio di Hilbert finito-dimensionale:

Proposizione 4.2.8. *$\mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathbb{C}^n), \mathcal{L}(\mathbb{C}^m)) \simeq \mathcal{L}(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m)$, $n, m \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione. Lo spazio $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n) \simeq \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ è generato dalle applicazioni lineari del tipo xw^*, con $x, w \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ definiti da $xw^*(y) = \langle y|w\rangle x$: infatti si ha che $Im(xw^*) = \{\alpha x | \alpha \in \mathbb{C}\}$ è un sottospazio di $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ di dimensione uno. Sia ora $\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathbb{C}^n), \mathcal{L}(\mathbb{C}^m)) \simeq \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \mathcal{M}_m(\mathbb{C}))$; definiamo implicitamente $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m) \simeq \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ attraverso la seguente equazione:

$$\langle \Phi(x \otimes y)|w \otimes z\rangle = \langle \phi(xw^*)(y)|z\rangle \tag{4.2.29}$$

D'altra parte, dato $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m)$ e $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, definiamo implicitamente $(\Phi)f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^m)$ attraverso la seguente equazione:

$$\langle((\Phi)f)(y)|z\rangle = tr(\Phi \circ (f \otimes yz^*)) \tag{4.2.30}$$

□

Questa proposizione ci permette di concludere con la seguente, necessaria per definire il $QCS\ X \multimap Y$:

Proposizione 4.2.9. *La mappa $\Phi \mapsto (\Phi)\cdot$ induce una bijezione tra $\mathcal{H}_{h\times k}, h, k \in \mathbb{N}$ e $\mathcal{L}(\mathcal{H}_h, \mathcal{H}_k)$.*

Dimostrazione. Proviamo anzitutto che, se $f \in \mathcal{H}_h$, allora $(\Phi)f$ è hermitiano: questo segue dalla seguente, equazione, facilmente verificata:

$$\overline{tr(\Phi^* \circ (f \otimes zy^*))} = tr(\Phi \circ (f \otimes yz^*)) \tag{4.2.31}$$

che implica immediatamente $((\Phi)f)^* = (\Phi^*)f^*$. Per l'altro verso, sia $\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_h, \mathcal{H}_k)$, allora ϕ ammette una unica estensione a $\mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathbb{C}^h), \mathcal{L}(\mathbb{C}^k))$ data da $\phi(u) = 1/2(\phi(u + u^*) + i\phi(iu^* - iu))$ (si ricordi che $u + u^*$ è sempre hermitiano). Si verifica allora che questi operatori ϕ sono hermitiani: $\phi(u^*) = (\phi(u))^*$ e dunque si ha $\phi \in \mathcal{H}_{h\times k}$ per la proposizione precedente. □

Un corollario della proposizione 4.2.8 è l'equazione che definisce la dualità moltiplicativa:

Proposizione 4.2.10.

$$tr(((\Phi)u) \circ v) = tr(\Phi \circ (u \otimes v)) \tag{4.2.32}$$

Dimostrazione. Sia $(e_i)_{0<i\leq k}$ una base dello spazio $\mathbb{C}^k$ su cui agisce v; allora si ha

$$\begin{aligned} tr(((\Phi)u) \circ v) = \sum_{0<i\leq k} \langle(((\Phi)u) \circ v)e_i|e_i\rangle = \sum_{0<i\leq k} \langle((\Phi)u)v(e_i)|e_i\rangle = \\ \sum_{0<i\leq k} tr(\Phi \circ (u \otimes v(e_i)e_i^*)) = tr(\Phi \circ (u \otimes v)) \end{aligned} \tag{4.2.33}$$

□

La 4.2.32 va ad aggiungersi all'elenco delle equazioni del tipo della 1.2.17 a pag. 64:

$$\sharp(F(a) \cap b) = \sharp(tr(F) \cap a \times b) \tag{1.2.17}$$

discusse in 3.5, e porta immediatamente alla seguente definizione:

Definizione 4.2.7. *Siano X, Y QCS. Allora definiamo i seguenti QCS di supporto $|X| \times |Y|$:*

$$\begin{aligned} X \multimap Y &:= \{\Phi | \forall u \in X \ (\Phi)u \in Y\} \\ X \otimes Y &:= \{u \otimes v | u \in X, v \in Y\}^{\overset{\downarrow}{\sim}\overset{\downarrow}{\sim}} \end{aligned} \tag{4.2.34}$$

Proposizione 4.2.11. $(X \multimap Y^{\overset{\downarrow}{\sim}})^{\overset{\downarrow}{\sim}} = X \otimes Y$

Dimostrazione. Sia $X \odot Y = \{u \otimes v | u \in X, v \in Y\}$, $\Phi \in (X \odot Y)^{\overset{\downarrow}{\sim}} = (X \otimes Y)^{\overset{\downarrow}{\sim}}$, $u \in X$: allora, dalla 4.2.32 segue che $(\Phi)u \in Y^{\overset{\downarrow}{\sim}}$, da cui $(X \otimes Y)^{\overset{\downarrow}{\sim}} \subseteq (X \multimap Y^{\overset{\downarrow}{\sim}})$, e dunque $(X \multimap Y^{\overset{\downarrow}{\sim}})^{\overset{\downarrow}{\sim}} \subseteq X \otimes Y$. Per l'altro lato, sia $\Phi \in X \multimap Y^{\overset{\downarrow}{\sim}}$ e $u \otimes v \in X \odot Y$; allora, sempre per la 4.2.32, si ottiene $(\Phi)u \in Y^{\overset{\downarrow}{\sim}}$ e dunque $X \multimap Y^{\overset{\downarrow}{\sim}} \subseteq (X \odot Y)^{\overset{\downarrow}{\sim}}$, da cui $X \otimes Y \subseteq (X \multimap Y^{\overset{\downarrow}{\sim}})^{\overset{\downarrow}{\sim}}$.

□

L'elemento tipico dello spazio $X \multimap X$, dove $X \subset \mathcal{H}_2$, è indotto dall'operatore $\sigma_X \in \mathcal{H}(X \otimes X)$ dato da $\sigma_X(x \otimes y) = y \otimes x$, chiamato in (Girard, [35]) *flip*:

$$\sigma_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.2.35}$$

come mostrato dalla seguente proposizione:

Proposizione 4.2.12. $(\sigma_X)\cdot \in X \multimap X$*, e in particolare,* $u \in X \Rightarrow (\sigma_X)u = u$*.*

Dimostrazione. Si verifica che:

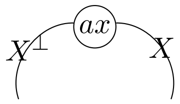
$$\begin{aligned} \langle(\sigma_X)(xw^*)y|z\rangle = \langle\sigma_X(x \otimes y)|w \otimes z\rangle = \langle y \otimes x|w \otimes z\rangle = \langle y|w\rangle\langle x|z\rangle = \\ \langle(xw^*)y|z\rangle \end{aligned} \tag{4.2.36}$$

ed estendendo per linearità si ottiene la tesi. □

Di conseguenza, dato un arbitrario elemento $u = \left(\begin{smallmatrix} u_{11} & u_{21} \\ u_{12} & u_{22} \end{smallmatrix}\right) \in X$, sappiamo che $(\sigma_X)\left(\begin{smallmatrix} u_{11} & u_{21} \\ u_{12} & u_{22} \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} u_{11} & u_{21} \\ u_{12} & u_{22} \end{smallmatrix}\right)$: $(\sigma_X)\cdot$ corrisponde dunque a una forma "oggettiva" di identità, indipendente dalla $MASA$ cui u eventualmente appartenga. In altre parole, il *flip* è una realizzazione, nei QCS, dell' assioma

$$\frac{}{\vdash X^{\perp}, X}\ (Ax)$$

o, meglio ancora, del proof-net:



(4.2.37)

che si limita a "ricopiare" come output ciò che accetta in input, senza interessarsi della strutturazione sintattica di ciò con cui interagisce. In breve, la variabile X che occorre tanto in 4.2.37 quanto nel nome del QCS è da considerarsi come vincolata, in quanto può essere sostituita rispettivamente con una qualsiasi altra formula del linguaggio e con un qualsiasi altro QCS $Y \subset \mathcal{H}_2$. In particolare, per ogni $\underline{p} \in S^2$, si ha che $(\sigma_X)\cdot \in \mathbf{Bool}_{\underline{p}} \multimap \mathbf{Bool}_{\underline{p}}$, ossia $(\sigma_X)\cdot \in \mathbf{Spin} \multimap \mathbf{Spin}$.

D'altra parte, sia $I_2 = \pi_1 \oplus \pi_2$ una decomposizione dell'identità di $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ in due proiezioni ortogonali. Possiamo verificare che l'operatore $R_i = \sigma_X \circ (\pi_i \otimes \pi_i), i \in \{1, 2\}$ è tale che, se $u \in \mathcal{H}_2$, allora $(R_i)u = \pi_i u \pi_i$: infatti, in analogia con la proposizione 4.2.12, si ha

$$\begin{aligned}\langle (R_i)(xw^*)y|z\rangle = \langle R_i(x \otimes y)|w \otimes z\rangle = \langle \pi_i y \otimes \pi_i x|w \otimes z\rangle = \\ \langle \pi_i y|w\rangle\langle \pi_i x|z\rangle = \langle(\pi_i x w^* \pi_i)y|z\rangle\end{aligned} \tag{4.2.38}$$

e dunque, per linearità, si ottiene il risultato. Se consideriamo ora l'operatore $R' = \sigma \circ (\pi_1 \otimes \pi_1 \oplus \pi_2 \otimes \pi_2)$, troviamo che $(R')u = \pi_1 u \pi_1 \oplus \pi_2 u \pi_2$, ovvero si comporta come una riduzione, in quanto distrugge i coefficienti non diagonali $\pi_1 u \pi_2$ e $\pi_2 u \pi_1$. Questo ci porta direttamente al seguente teorema:

Teorema 4.2.13 (implicazione soggettiva)**.** *Sia $\underline{p} \in S^2$. Allora esiste un operatore $(\iota)\cdot \in \mathbf{Bool}_{\underline{p}} \multimap \mathbf{Bool}_{\underline{p}}$ tale che, per ogni $\underline{q} \in S^2$ distinto da $\underline{p}$, $(\iota)\cdot \notin \mathbf{Bool}_{\underline{q}} \multimap \mathbf{Bool}_{\underline{q}}$.*

Dimostrazione. Consideriamo la scomposizione di $I_2 = \mathbf{T}_{\underline{p}} \oplus \mathbf{F}_{\underline{p}}$ indotta dai due valori di verità classici (relativamente a $\underline{p}$) e l'operatore $\iota = \sigma \circ ((\mathbf{T}_{\underline{p}} \otimes \mathbf{T}_{\underline{p}}) \oplus (\mathbf{F}_{\underline{p}} \otimes \mathbf{F}_{\underline{p}}))$:

$$\iota = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.2.39}$$

Se ora $u = a\mathbf{T}_{\underline{p}} \oplus c\mathbf{T}_{\underline{p}} \in \mathbf{Bool}_{\underline{p}}$, si ha subito che $(\iota)u = u$, e dunque $(\iota)\cdot \in \mathbf{Bool}_{\underline{p}} \multimap \mathbf{Bool}_{\underline{p}}$. D'altra parte, se $v \in \mathbf{Bool}_{\underline{q}}$, allora si vede che $(\iota)\cdot$ agisce come richiesto dal postulato di riduzione:

$$(\iota)\begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & 0 \\ 0 & v_{22} \end{pmatrix} \notin \mathbf{Bool}_{\underline{q}} \tag{4.2.40}$$

da cui segue la tesi. □

Laddove nell'operatore $(\sigma_X)\cdot$ il punto $\underline{p}$ è una variabile vincolata, in quanto liberamente sostituibile con ogni altro $\underline{q} \in S^2$, nel caso di $(\iota)\cdot$ esso non è sostituibile con nessun'altra espressione e non può dunque essere considerato vincolato. $(\iota)\cdot$ agisce come l'identità solo su quegli elementi che sono scomponibili in accordo con un certo punto di vista, ovvero con la base $\mathbf{T}_{\underline{p}} \oplus \mathbf{T}_{\underline{p}}$: si comporta cioè come l'identità *eta-espansa*:

$$\dfrac{\dfrac{\overline{\vdash \bot, \mathbf{1}}\ (Ax)}{\vdash \bot, \mathbf{1} \oplus \mathbf{1}}\ (\oplus) \qquad \dfrac{\overline{\vdash \bot, \mathbf{1}}\ (Ax)}{\vdash \bot, \mathbf{1} \oplus \mathbf{1}}\ (\oplus)}{\vdash \bot \,\&\, \bot, \mathbf{1} \oplus \mathbf{1}}\ (\&) \tag{4.2.41}$$

Con le parole di Girard:

> Intuitivement, la differénce est trés simple: l'identité c'est $\varphi(x) = x$, elle recopie un objet sans s'en occuper vraiment; si l'on pense à la délocalisation, c'est une véritable opération de type ondulatoire. L'étaespansion de la même chose est basée sur l'idée que l'on est «de type A»ou «de type B»; l'identité étaespansée demande à l'objet s'il est de type A ou B et quelle que soit la réponse, la recopie à l'identique: c'est un flic qui vous demand vos papiers avant de vous le rendre et vous laisser passer. (Girard, [37])

Di conseguenza, l'identità eta-espansa risulta "soggettiva", in quanto la sua proceduralità è dipendente dalla possibilità di scomporre ciò cui si applica secondo regole sintattiche condivise. Dal punto di vista insiemistico, la differenza tra la σ_X e la ι è quella tra una funzione che semplicemente ricopia l'insieme u riscrivendo u e quella che invece ne ricopia dapprima gli elementi $x_1, \dots$ e poi li riunisce in un insieme *estensionalmente* identico a u. E' chiaro allora che, perchè la ι si comporti in accordo con le sue norme, dovrà condividere con ciò con cui interagisce una "teoria degli insiemi in comune", e dunque dovrà appartenere alla stessa $MASA$.

Laddove l'applicazione di questi esempi "non commutativi" alla questione della sintassi trascendentale costituirà il tema dei paragrafi che seguono, l'applicazione sistematica di essi alla teoria degli insiemi ed alla nozione di estensionalità, con tutte le sue conseguenze, costituisce un tema ancora del tutto aperto, rispetto al quale le ricerche di Girard si limitano a qualche illuminante intuizione.

4.3 La *GdI* finita: teoria oggettiva

L'obbiettivo di questo e dei prossimi due paragrafi sarà quello di estendere le intuizioni "quantistiche" discusse sopra alla Geometria dell'Interazione, per elaborarne una versione non commutativa. La prima cosa da osservare è la naturalezza, da un punto di vista puramente matematico, di questo proposito: se nella versione matriciale in §3.5 la nozioni di design è esplicitamente dipendente dalla scelta di una base canonica dello spazio $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$, nella versione "hilbertiana" in §4.1, nonostante la liberalizzazione dei design da questa dipendenza "soggettiva", la ricostruzione della logica (vd. il teorema 4.1.1 a pag. 231) è sempre ottenuta nei sicuri confini di una base canonica: in effetti, come si vedrà più avanti, il ricorso ad essa è indispensabile per garantire la nilpotenza dell'operatore che rappresenta l'interazione e, attraverso questa, la terminazione della procedura che rappresenta l'eliminazione del taglio. Risulta dunque del tutto sensato interrogarsi sul ruolo esatto che questa dipendenza soggettiva ricopre nella ricostruzione della dinamica della logica, indagine questa che non può che avere per sfondo una versione radicalmente non commutativa (ovvero, in virtù della 4.2.27 a pag. 244, radicalmente a-sintattica) della GdI. Nel presente paragrafo ci occuperemo di quel che resta della GdI, così come la abbiamo conosciuta, nel momento in cui il solido riferimento alla base canonica è messo fuori uso.

Il ruolo algebrico della finitezza Cominciamo rilevando un limite fondamentale dell'approccio "hilbertiano" in §4.1, ovvero il fatto che nell'algebra infinita su $\ell^2(\mathbb{N})$ adoperata, la traccia $tr(u)$ è definita solo su una classe ristretta di operatori, del tutto inutile per i nostri interessi, quella degli operatori detti per l'appunto *di classe traccia*, quegli u cioè per cui $\sum_{n\in\mathbb{N}} \langle e_n|u(e_n)\rangle < \infty$. Non c'è dunque speranza di ricostruire, in tale contesto, una nozione di dualità analoga a quella in §3.5, reminiscente del criterio di correttezza dei proof-net. Dobbiamo dunque metterci in cerca di una algebra $\mathcal{A}$ con caratteristiche diverse, e siamo già in grado di anticiparne un paio:

- $\mathcal{A}$ deve ammettere una traccia;
- $\mathcal{A}$ deve essere chiusa rispetto alla dualità indotta dalla traccia: se $A \subset \mathcal{A}$, allora si deve avere $A^{\sim\sim} \subset \mathcal{A}$, dove il biortogonale rappresenta quello che in §2.2.2 abbiamo chiamato *completamento normativo* di un'etica.

Osserviamo anzitutto che, data una C^*-algebra $\mathcal{A}$, una traccia su di essa non è altro che uno *stato tracciale*, ovvero uno stato $\rho \in \mathcal{A}^* = Hom(\mathcal{A}, \mathbb{C})$ tale che, per ogni $u, v \in \mathcal{A}$ si abbia

$$\rho(uv) = \rho(vu) \tag{4.3.1}$$

Più in generale, è detto *normale* uno stato (o una forma, nel caso $\rho(I) \neq 1$) ρ tale che, per ogni $u \in \mathcal{A}$, si ha $\rho(u) = tr(ud)$, dove d è un operatore di classe traccia tale che $tr(d) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle e_n|d(e_n)\rangle = 1$ (detto *operatore densità* nel caso in cui ρ sia uno stato). Gli stati tracciali sono casi particolari di stati normali. Per questi esiste una importante caratterizzazione (per la cui dimostrazione si veda (Caressa, [7])):

Teorema 4.3.1. *Sia $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ un'algebra di Banach su uno spazio di Hilbert $\mathbb{H}$ e sia $\mathcal{T}(\mathbb{H}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{H})$ lo spazio, detto* preduale*, di tutti gli operatori di classe traccia di $\mathcal{B}(\mathbb{H})$; allora si ha che $\mathcal{B}(\mathbb{H}) \simeq \mathcal{T}(\mathbb{H})^*$.*

Ha senso dunque definire su $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ una topologia, detta *ultradebole*, indotta dagli operatori del preduale: si tratta della più piccola topologia che rende continue le forme normali. L'idea è, a questo punto, quella di tradurre le richieste fatte poco sopra nella costruzione di un'algebra che ammetta uno stato tracciale e che sia chiusa nella topologia ultradebole. Per ottenere ciò ci affideremo alla costruzione GNS (vd. definizione 4.2.1 a pag. 235): consideriamo anzitutto le algebre finite $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ in cui "vive" la GdI matriciale e la seguente proposizione:

Proposizione 4.3.2. *$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{M}_m(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n, m \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione. Consideriamo l'omomorfismo algebrico $\mathcal{M}_m(\mathbb{C}) \xrightarrow{\phi} \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ che a u associa $u \otimes I_n$. Dal fatto che le algebre $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ sono *semplici*, ovvero non hanno ideali bilateri non banali, si ha che φ è in effetti un isomorfismo. In caso contrario infatti, $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})/ker(\varphi)$ sarebbe un ideale bilatero non banale di $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$.

□

Per costruire la nostra algebra ci serviremo di una importante nozione categoriale, quella di *limite diretto*

Definizione 4.3.1 (limite diretto di C^*-algebre)**.** *Un* sistema diretto di C^*-algebre*, che si scrive $\{\mathcal{A}_i, \varphi_{ij}\}_{i,j\in I}$, è dato da due famiglie, entrambe indiciate da un insieme I parzialmente ordinato e* diretto*, ossia tale che $i, j \in I \Rightarrow \exists k \in I$ tale che $i, j \preceq_I k$:*

- *una famiglia di C^*-algebre $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$;*
- *una famiglia di isomorfismi $(\varphi_{ij})_{i,j\in I}$, tali che $\varphi_{ij} : \mathcal{A}_i \to \mathcal{A}_j$ e, per $i \preceq_I j$, $\varphi_{ii} = id_{\mathcal{A}_i}$ e $\varphi_{ij} = \varphi_{kj} \circ \varphi_{ik}$.*

Un limite diretto *per $\{\mathcal{A}_i, \varphi_{ij}\}_{i,j\in I}$ è dato da una C^*-algebra $\mathcal{A}$ e morfismi di inclusione $\varphi_i : \mathcal{A}_i \to \mathcal{A}$ tale che, per ogni $i, j \in I$, $\varphi_i = \varphi_j \circ \varphi_{ij}$, dotato della seguente proprietà universale: per ogni altra C^*-algebra $\mathcal{A}'$ e morfismi $\psi_i : \mathcal{A}_i \to \mathcal{A}'$, esiste un unico isomorfismo $\vartheta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ tale che $\psi_i = \varphi_i \circ \vartheta$.*

Si noti l'affinità dei limiti diretti con la chiusura della famiglia delle cricche di uno spazio coerente rispetto alle unioni filtranti (vd. §1.2.3). In effetti quello di cui abbiamo bisogno è proprio una specie di unione filtrante delle $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$:

Proposizione 4.3.3. *Consideriamo la famiglia $(\mathcal{M}_{2^n}(\mathbb{C}), \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di algebre di matrici finite (e semplici) con i rispettivi isomorfismi $\varphi_n : \mathcal{M}_{2^n}(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_{2^{n+1}}(\mathbb{C})$. Allora il limite diretto* **CAR** *è ancora una C^*-algebra semplice con unità.*

Dimostrazione. (Omessa)

□

L'algebra $\mathbf{CAR} = \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \otimes \dots$ deve il suo nome alle cosiddette *relazioni canoniche di commutazione*: se X è un insieme finito, per ogni $x \in \ell^2(X)$, possiamo considerare il suo *creatore* C_x ed il suo *annichilatore* $A_x = C_x^*$, i quali soddisfano le seguenti relazioni canoniche:

$$\begin{aligned} C_xA_y + A_yC_x &= \langle x|y\rangle I \\ C_xC_y + C_yC_x &= 0 \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

Un semplice computo permette di verificare la seguente proposizione:

Proposizione 4.3.4. *L'algebra* $\mathbf{CAR}(X)$ *generata dai $C_x, A_x, x \in X$ è isomorfa a $\mathcal{M}_{2^{\sharp X}}(\mathbb{C}) \leq$* **CAR**.

Possiamo vedere l'algebra **CAR** sotto la forma di un'"algebra dei loci": infatti, in virtù delle 4.3.2, per ogni $x \in \ell^2(X)$, con X finito, e $\|x\| = 1$, $(C_xA_x)^2 = C_xA_xC_xA_x + C_xC_xA_xA_x = C_x(A_xC_x + C_xA_x)A_x = C_xA_x$, ed analogamente per A_xC_x; C_x è dunque una isometria parziale di origine A_xC_x e immagine C_xA_x e rappresenta intuitivamente un locus ξ_x. D'altra parte, si ha che $C_xC_x = -C_xC_x = 0$, il che impedisce, come ci dovremmo aspettare, di far "occorrere" più di una volta un locus in un operatore: i loci sono, per loro natura, qualcosa per cui non ha senso di parlare di distinte occorrenze.

E' il momento di far entrare in scena la costruzione *GNS*: l'algebra **CAR** ammette uno stato normale ottenuto fornendo, per ogni sua componente $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, uno stato normale. La soluzione più naturale è data dallo stato tracciale ρ_n indotto dalla matrice

$$d_n := \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \tag{4.3.3}$$

In altre parole, la traccia normalizzata $tr/2$, in quanto si ha, per ogni $u \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $\rho_n(u) = tr(ud) = tr(u)/2$. Lo stato prodotto ottenuto è anch'esso tracciale. Si noti anche che, in virtù dell'invarianza della traccia per cambiamento di base, si tratta anche di uno stato fedele. Applicando *GNS* a questo punto otteniamo una rappresentazione isometrica di **CAR** in una $\mathcal{A}$ sottoalgebra di $\mathcal{B}(\mathbb{H}_\omega)$. L'algebra che stiamo cercando non è altro che la chiusura ultradebole di $\mathcal{A}$, ovvero la corrispondente *algebra di Von Neumann* (d'ora in poi vN-algebra):

Definizione 4.3.2 (vN-algebra)**.** *Una vN-algebra è un'C^*-algebra chiusa nella topologia ultradebole.*

Equivalentemente, una vN-algebra è una C^*-algebra $\mathcal{A}$ uguale al suo bicommutatore $\mathcal{A}''$. Ad esempio, le $MASA$ definite in §4.2 sono tutte vN-algebre (commutative). La dimostrazione dell'equivalenza di queste due definizione costituisce uno dei risultati fondanti della teoria delle vN-algebre.

Dal momento che uno stato su un'algebra di operatori $\mathcal{A}$ si comporta come nient'altro che una misura, in analogia con quanto detto sulle C^*-algebre e gli spazi topologici compatti, possiamo vedere nella teoria delle vN-algebre una estensione non commutativa della teoria della misura. Un caposaldo di questa impostazione è il teorema seguente:

Teorema 4.3.5. *Sia $\mathcal{A}$ una vN-algebra commutativa; allora esiste uno spazio di misura (X, μ) tale che $\mathcal{A} \simeq \mathcal{L}^\infty(X, \mu)$.*

il quale non è altro che il corrispettivo del teorema 4.2.1 a pag. 235.

Gli oggetti più semplici da studiare, nell'ambito delle vN-algebre, sono i cosiddetti *fattori*:

Definizione 4.3.3 (fattore)**.** *Un* fattore *è una vN-algebra $\mathcal{F}$ il cui centro $Z(\mathcal{F}) = \{u, v \in \mathcal{F} | uv = vu\}$ è banale, ossia isomorfo a $\mathbb{C}$.*

Un risultato fondamentale, che giustifica il ricorso ai fattori, è dato dalla seguente caratterizzazione:

Teorema 4.3.6. *Ogni vN-algebra che agisce su uno spazio di Hilbert separabile è isomorfa all'integrale diretto di una famiglia di fattori dei seguenti tipi (in cui il tipo corrisponde alla struttura del preordine delle proiezioni del fattore):*

- *tipo* $\{0, 1, \ldots, n\}$*:* $\mathbf{I}_n$*, isomorfe alle* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
- *tipo* $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$*:* $\mathbf{I}_\infty$*, ammette dei proiettori infiniti* π*, ovvero tali che* $\pi > \pi$*.*
- *tipo* $[0, 1] \subset \mathbb{R}$*:* $\mathbf{II}_1$ *ammette un continuo di proiettori;*
- *tipo* $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$*:* $\mathbf{II}_\infty$*, è isomorfa* $\mathbf{II}_1 \otimes I_\infty$*.*
- *tipo* $\{0, \infty\}$*:* **III**.

I fattori di tipo **I** sono isomorfi alle $\mathcal{B}(\mathbf{H})$, quando **H** ha base finita o numerabile. La caratteristica fondamentale di queste algebre, che è assente nei fattori di altro tipo, è l'esistenza di proiezioni abeliane (vd. §4.2), quelle che abbiamo identificato con i punti nella rilettura non commutativa degli spazi coerenti. L'ordine dei proiettori corrisponde allora direttamente alla cardinalità massima dei sottoinsiemi rappresentabili (nel senso descritto in §4.2). In definitiva, le algebre di tipo **I** sono caratterizzate dal fatto di avere degli *atomi* (si veda la discussione in §4.1 sul significato logico degli atomi).

I fattori di tipo **III** svolgono un ruolo determinante nella cosiddetta teoria di Tomita-Takesaki (vd. (Connes, [12])) ma non ci interesseranno qui. Possiamo a questo punto facilmente renderci conto che le algebre destinate a interessarci sono quelle di tipo **II**, come mostrato dalla seguente:

Proposizione 4.3.7. *L'algebra* $\mathcal{H} = \mathcal{A}''$ *è isomorfa al fattore* $\mathbf{II}_1$*.*

Dimostrazione. (Omessa). Mi limito a osservare che, se $\pi \in \mathcal{H}$ è una proiezione, $tr(\pi) = tr(\pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \ldots) = \prod_n^\infty Tr(\pi_n)$, dove Tr è la traccia normalizzata su $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Dal momento che $tr(\pi_n) \in \{1, 1/2\}$, e il prodotto converge (in quanto la traccia è sempre definita in un fattore di tipo $\mathbf{II}_1$), otteniamo che $tr(\pi) \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$. □

Si noti la differenza tra l'algebra **CAR**, la cui definizione, presupponendo il ricorso a invasivi strumenti categoriali, è tipicamente essenzialista, e l'algebra $\mathcal{H}$, ottenuta attraverso una costruzione (la GNS) che la "localizza" esplicitamente su uno spazio di Hilbert, la cui definizione è dunque decisamente più nello stile "locativo" delle presenti ricerche.

Nei fattori di tipo **II** possiamo comparare tra loro le proiezioni finite, attraverso un procedimento che ricorda da vicino l'algoritmo euclideo della divisione: se $0 \neq \pi \leq \pi'$, si considera la somma diretta di n, per un n opportuno, "copie disgiunte" di π ottenendo una proiezione $\pi'' < \pi'$ tale che $\pi'' \oplus \pi > \pi'$ (in cui π è un versione "delocalizzata" della π originaria); applicando iterativamente il procedimento si ottiene in definitiva una frazione continua che rappresenta la dimensione relativa di π e π' (da qui l'ordine di tipo $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$). Ad esempio, una proiezione π avrà dimensione $1/2$ quando esiste una isometria tale che $u(\pi) = I - \pi$, ovvero ha la stessa dimensione della sua complementare. E' in questo senso che tali fattori non ammettono atomi, in quanto ogni proiezione può essere ulteriormente scomposta nella somma di due o più proiezioni di dimensione frazionaria (si osservi qui l'analogia con il trattamento decomposizionale dei loci nella ludica).

In particolare, in virtù della sua finitezza, possiamo pensare al fattore di tipo $\mathbf{II}_1$ come a un'algebra di matrici, che ammette però matrici di dimensione finita arbitraria, le cui "basi canoniche", per ogni $n \in \mathbb{N}$, sono costituite da un insieme di proiezioni disgiunte $\pi_i, 0 \leq i < n$ tali che $I = \pi_0 \oplus \cdots \oplus \pi_{n-1}$.

D'altra parte, il ricorso a alle algebre finite è legittimato dalla seguente proposizione:

Proposizione 4.3.8. *Un fattore è finito se e solo se ammette una traccia (necessariamente unica)*

Dimostrazione. (Omessa). Anche in questo caso mi limito a un'osservazione: l'ordine sulle proiezioni è definito in maniera tale che la traccia misuri, in un certo senso, la loro dimensione; infatti si ha che, se $\pi \leq \pi'$, allora $tr(\pi) \leq tr(\pi')$ e, in particolare, se $\pi < \pi'$, $tr(\pi) < tr(\pi')$. Supponiamo ora che un fattore $\mathcal{F}$ sia infinito, vale a dire che esista una isometria parziale u tale che $u^*u = I$ e $uu^* = \pi < I$. Se per ipotesi $\mathcal{F}$ avesse una traccia tr, si avrebbe $tr(I) = tr(u^*u) = tr(uu^*) = tr(\pi)$. Ma, dal fatto che $\pi < I$ seguirebbe allora $tr(\pi) < tr(I)$, il che è assurdo. □

Si noti che, se $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$, l'operatore che rappresenta A in $\mathcal{H}$ è tale che $tr(u) = Tr(A)/k$ (dove con tr si intende la traccia definita su $\mathcal{H}$ e con Tr la traccia su $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$). In definitiva, siamo portati a escludere le algebre infinite, e con esse, le delocalizzazioni φ e ψ descritte in §4.1: la stessa trattazione della contrazione fornita in quel paragrafo, che ammetteva la possibilità di effettuare anche infinite duplicazioni simultanee, risulta del tutto inadatta a un approccio seriamente basato sulla dualità logica indotta dai proof-net (e dunque dalla traccia).

E' opportuno rilevare qui l'aspetto morfologico della questione: la stessa definizione induttiva di linguaggio come insieme infinito (generativo) di formule non può in alcun modo trovare dei rappresentati in un'algebra come la $\mathcal{H}$: questa ammette, infatti, scomposizioni in un numero arbitrario di proiezioni, ma proiezioni appartenenti a distinte scomposizioni (ad esempio una in n "punti" ed una in $n+1$) non sono tra loro commutanti, ovvero non appartengono alla stessa sintassi!

> Dans la vulgate fondationelle, le langage est infini; en effet, on doit pouvoir disposer d'une infinité de copies, d'≪occurrences≫, du même symbole. Mais est-ce bien raisonnable? Si l'on devait le faire concrètement, il nous faudrait une *machine à delocaliser*, qui déposerait des copies de ce symbole à des distances de 1 km, 2 km, ... Quand on se place - par la pensée! - dans le monde de la pensée, on est prêt à admettre que la machine ainsi lancée ne reviendra jamais à son point de départ. Puisque, dans le monde physique, c'est ce qu'il se passe! (Girard, [37])

Questa finitezza dello spazio costituirà il tratto più caratteristico della versione della *GdI* che andiamo a elaborare in quanto, come vedremo, rappresenterà la fondamentale chiave di accesso alla questione della complessità dell'esecuzione, e dunque al rapporto tra essenza e risorse discusso in §2.1.4.

La *GdI* nel fattore $\mathbf{II}_1$ Una volta ricavata l'algebra più idonea, ricostruiamo il principale strumento normativo, presente anche nella versione matriciale in §3.5:

Definizione 4.3.4 (determinante logaritmico in $\mathcal{H}$)**.** *Sia $u \in \mathcal{H}$ e sia $\varrho(u) < 1$, dove $\varrho(x)$ indica il* raggio spettrale *(vd. §D). Allora il* determinante logaritmico $let(I-u)$ *è così definito:*

$$let(I-u) := -tr(log(I-u)) = \sum_{n>0}^{\infty} \frac{tr(u^n)}{n} \tag{4.3.4}$$

Proposizione 4.3.9 (proprietà di let)**.** *Siano $u, v \in \mathcal{H}$ e sia $\varrho(u), \varrho(uv) < 1$. Allora valgono le seguenti:*

(*i*) $let(I-u^*) = \overline{let(I-u)}$*;*

(*ii*) $let(I-uv) = let(I-vu)$*;*

(*iii*) *u, v hermitiani* $\Rightarrow let(I-uv) \in \mathbb{R}^+$*;*

(*iv*) *u nilpotente* $\Rightarrow let(I-uv) = 0$*.*

Dimostrazione. (*i*) Segue dal fatto che $\varrho(u) = \varrho(u^*)$ e che $tr(u^{*n}) = \overline{tr(u^n)}$.

(*ii*) Segue da $\varrho(uv) = \varrho(vu)$ e da $tr((uv)^{n+1}) = tr(u(vu)^n v) = tr(vu(vu)^n) = tr((vu)^{n+1})$.

(*iii*) Si ha che $(uv)^* = v^*u^* = vu$ e dunque $\overline{let(I-uv)} = let(I-(uv)^*) = let(I-vu) = let(I-uv)$.

(*iv*) Sia π la proiezione corrispondente alla chiusura dell'immagine di u (ovvero tale che valga $u = \pi u$) e sia $v := u\pi$; per $k > 0$ si ha che $v^k = (u\pi)^k = u(\pi u)^{k-1}\pi = u^k\pi$. Di conseguenza si ha che $tr(u^k) = tr(\pi u^k) = tr(u^k\pi) = tr(v^k)$, da cui segue $let(I-u) = let(I-v)$. Mostriamo ora, per ricorsione sugli n tali che $u^n = 0$, che $tr(u^k) = 0, 0 < k < n$. Il caso $n = 0$ è immediato. Se $u^{n+1} = 0$, allora si ha che $v^n = u^n\pi = 0$ e per ipotesi ricorsiva dunque che $tr(v^k) = 0, k > 0$. Ne concludiamo che $tr(u^k) = 0$ per ogni $k > 0$, e dunque $let(I-u) = 0$.

□

La principale differenza, nell'uso del determinante logaritmico, rispetto a §3.5, sta nel fatto che i suoi valori spaziano in $\mathbb{C}$, laddove in §3.5 erano limitati allo 0 (nell'ipotesi di convergenza). Questa è una conseguenza del fatto di aver abbandonato il dominio discreto delle matrici a coefficienti $0, 1$ espresse in una base canonica, nel quale la convergenza di $let(I-AB)$ equivaleva di fatto alla nilpotenza della matrice AB e dunque alla terminazione di quella che interpretavamo come una procedura sintattica di riscrittura (l'eliminazione del taglio, appunto). In effetti, come vedremo nel prossimo paragrafo, sulla teoria "soggettiva", l'appartenenza a una sintassi, nel senso che definiremo, degli operatori in questione servirà proprio a garantire che $let(I-uv) \in \{0, \infty\}$. In questo senso, valori $\neq 0, \infty$ del determinante logaritmico mostrano una interazione infinita, ma convergente, che non può essere interpretata in senso genuinamente sintattico: è per questo motivo che assegneremo a ogni design una *scommessa*, ossia un valore $\alpha \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ che possiamo considerare un "misuratore della correttezza sintattica": il caso generale, "sintattico", sarà dato da $\alpha = 0$; tuttavia, dati due design $(0, u), (0, v)$, il risultato della loro interazione, ammesso che sia convergente, sarà il design (vd. sotto) $(let(I - uv), [u]v)$, in cui valori di $let(I - uv)$ diversi da 0 staranno a indicare, analogamente a quanto avviene con i QCS, che i due design non possono condividere la stessa sintassi. Questo ci porta subito alla seguente definizione:

Definizione 4.3.5 (design)**.** *Un design $\mathfrak{d}$ è dato da una coppia $\mathfrak{d} = (\alpha, u)$, con $\alpha \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, detto* scommessa *di $\mathfrak{d}$ e $u \in \mathcal{H}$, detto* trama *di $\mathfrak{d}$, tale che $\|u\| \leq 1$. Il design $\mathfrak{d}$ è inoltre detto* in base π *se $\pi \in \mathcal{H}$ è una proiezione e $\pi u \pi = u$.*

Perveniamo così alla definizione "oggettiva" della dualità, la quale generalizza il criterio di correttezza dei proof-net in questo contesto non sintattico:

Definizione 4.3.6 (dualità)**.** *Due design $\mathfrak{d} = (\alpha, u), \mathfrak{e} = (\beta, v)$ sono* polari*, $\mathfrak{d} \overset{\downarrow}{\sim} \mathfrak{e}$, quando valgono le seguenti condizioni:*

$$\begin{aligned} &\varrho(uv) < 1 \\ &\alpha + \beta + let(I - uv) \neq 0 \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

La condizione sul raggio spettrale corrisponde al criterio di convergenza di $let(I-uv)$, ed è una generalizzazione della richiesta che non si abbiano giri corti (vd. §3.3): infatti, date due matrici $A, B \in \mathcal{M}_n(\{0,1\})$ non polari nel senso della definizione 3.5.3 a pag. 215, si avrebbe $tr((AB)^k) \geq 1$, per un certo $k \in \mathbb{N}, 0 < k < n$, e dunque un ciclo di lunghezza $k < n$ nel grafo rappresentato da AB, da cui la divergenza di $let(I - AB)$. Si noti come sia d'altra parte possibile, nella GdI estesa che stiamo presentando, "forzare" A e B ad avere una interazione convergente: siano infatti u_A, u_B gli operatori associati ad A e B in $\mathcal{H}$ (i quali esistono in virtù del fatto che $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ è una sottoalgebra di $\mathcal{H}$), è possibile allora trovare $\alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| > 0$, tale che $\varrho(u(e^{-\alpha}v)) < 1$, e dunque $let(I-u(e^{-\alpha}v))$ converga. Il risultato di questa interazione sarebbe comunque $\neq 0$, ovvero $u(e^{-\alpha}v)$ rimarrebbe non nilpotente: l'interazione risulterebbe rappresentata da una serie infinita convergente ed il contro-design $(0, e^{-\alpha}v)$ non sarebbe comunque riconosciuto da $(0, u)$ come sintatticamente corretto.

La seconda condizione, invece, è la naturale estensione della richiesta dell'esistenza di un giro lungo: il caso aciclico, ovvero senza giri, corrisponderebbe alla nilpotenza di uv e dunque, nel caso "sintattico" a scommessa 0 (ovvero con $(0, u), (0, v)$), assumendo ovviamente $\varrho(uv) < 1$, a $0 + 0 + let(I - uv) = 0$.

La condizione $\varrho(u) < 1$, in virtù della proposizione 3.5.3 a pag. 216, corrisponde all'invertibilità dell'operatore $I - u$, e permette dunque di ricostruire la formula di esecuzione in analogia con la definizione 3.5.9 a pag. 219, sebbene in un contesto non discreto (segnalato dal ricorso alle scommesse):

Definizione 4.3.7 (applicazione funzionale)**.** *Sia $\mathfrak{f} = (\alpha, u)$ un design in base $\pi + \pi'$, dove π, π' sono proiezioni disgiunte ($\pi\pi' = \pi'\pi = 0$), la cui trama u è dunque rappresentabile* *tramite una matrice a blocchi come* $\left(\begin{smallmatrix} u_{11} & u_{21} \\ u_{12} & u_{22} \end{smallmatrix}\right)$*; sia inoltre* $\mathfrak{a} = (\beta, v)$ *un design in base* π*. Se* $\varrho(u_{11}v) < 1$*, possiamo definire l'*applicazione *di* $\mathfrak{f}$ *ad* $\mathfrak{a}$*, come il design* $[\mathfrak{f}]\mathfrak{a} = (\gamma, [u]v)$ *in base* π'*, dove*

$$\begin{aligned} \gamma &= \alpha + \beta + let(I - u_{11}v) \\ [u]v &= u_{22} + u_{12}u_{11}(\pi - u_{11}v)^{-1}u_{21} \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

Vogliamo a questo punto mostrare come questa definizione "oggettiva" dell'applicazione funzionale è in accordo con la solita fondamentale equazione moltiplicativa 1.2.17 a 64:

$$\sharp(F(a) \cap b) = \sharp(tr(F) \cap a \times b) \tag{1.2.17}$$

sebbene in una forma leggermente modificata, dovuta, ancora una volta, alle scommesse. Lo strumento fondamentale è il seguente lemma:

Lemma 4.3.10. *Sia* $u = \left(\begin{smallmatrix} u_{11} & u_{21} \\ u_{12} & u_{22} \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{H}$ *e sia* $\|u\| \leq 1$*. Siano inoltre* π, π' *proiezioni disgiunte tali che* $\pi u_{11} \pi' = u_{11}$ *e* $(\pi + \pi')u(\pi + \pi') = u$*. Allora* $I - u$ *è invertibile se e solo se* $\pi - u_{11}$ *è invertibile e* $\pi' - (u_{22} + u_{12}(\pi - u_{11})^{-1}u_{21})$ *è invertibile.*

Dimostrazione. Se $\pi - u_{11}$ è invertibile, allora, attraverso un calcolo esplicito, è possibile stabilire che $I - u$ è invertibile se e solo se lo è $\pi' - (u_{22} + u_{12}(\pi - u_{11})^{-1}u_{21})$. Dobbiamo dimostrare dunque solo che l'invertibilità di $I - u$ implica quella di $\pi - u_{11}$. Supponiamo per assurdo che così non sia; usiamo il fatto che $\pi - u_{11}$ è non invertibile se e solo se esiste una successione di vettori dello spazio di Hilbert su cui agisce $\mathcal{H}$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tali che $\|x_n\| = 1$ e $\|(\pi - u_{11})(x_n)\| < 1/n$. Si ha allora che $\|x_n - u_{11}(x_n)\| < 1/n$ e dunque $1 \geq \|u_{11}(x_n) + u_{12}(x_n)\| = \|u(x_n)\| \geq 1 - 1/n$, da cui $\|x_n - u(x_n)\| < 2/n$: abbiamo così verificato che $\|x_n - u(x_n)\| < 2/n$, contro l'invertibilità di $I - u$. □

Questo lemma ci porta alla conclusione cercata:

Teorema 4.3.11. *Siano* $f, u, v \in \mathcal{H}$ *tali che* f *può essere scomposto come* $f = \left(\begin{smallmatrix} f_{11} & f_{21} \\ f_{12} & f_{22} \end{smallmatrix}\right)$ *lungo due proiezioni disgiunte* $\pi + \pi'$ *tali che* $(\pi+\pi')f(\pi+\pi') = f$*,* $\pi u \pi = u, \pi f_{11} \pi = f_{11}$ *e* $\pi' v \pi' = v$*. Valga inoltre* $\varrho(f(u + v)) < 1$*. Allora vale la seguente equazione:*

$$let(I - f(u + v)) = let(I - f_{11}u) + let(I - ([f]u)v) \tag{4.3.7}$$

e, in particolare, $\varrho(f_{11}u) < 1$*.*

Dimostrazione. (cenni) L'idea della dimostrazione è quella di provare anzitutto la versione "esponenziale" della 4.3.7:

$$det(I - f(u + v)) = det(I - f_{11}u)det(I - ([f]u)v) \tag{4.3.8}$$

adoperando il seguente "trucco": data una matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ si ha che $det(A) = det(A')$, dove $A' = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d - ca^{-1}b \end{smallmatrix}\right)$: infatti $det(A') = a(d - ca^{-1}b) = ad - cb =$

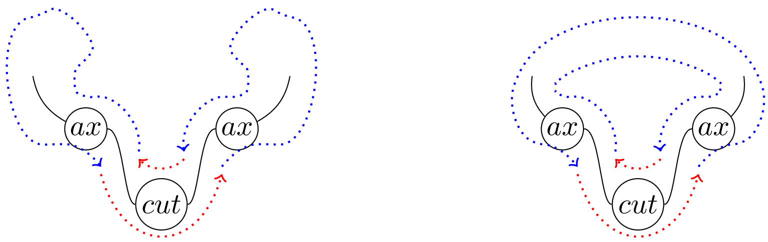
$det(A)$. Di conseguenza si ottiene

$$\begin{aligned}
det(I - f(u+v)) =& det\begin{pmatrix} \pi - f_{11}u & -f_{21}v \\ -f_{12}u & \pi' - f_{22}v \end{pmatrix} \\
&= det\begin{pmatrix} \pi - f_{11}u & 0 \\ 0 & \pi' - f_{22}v - f_{12}u(\pi - f_{11}u)^{-1}f_{21}v \end{pmatrix} \\
&= det\begin{pmatrix} \pi - f_{11}u & 0 \\ 0 & \pi' - ([f]u)v \end{pmatrix} \\
&= det(I - f_{11}u)det(I - ([f]u)v)
\end{aligned} \tag{4.3.9}$$

Tuttavia, questo procedimento è giustificato solo in un contesto matriciale (così come del resto il passaggio al logaritmo è giustificato solo nel caso reale). Per il caso più generale degli operatori del fattore di tipo $\mathbf{II}_1$ si veda (Girard, [37]).

□

L'interpretazione sintattica della 4.3.7 è la seguente: il presupposto dell'applicazione funzionale, in generale, è la nilpotenza dell'operatore $f_{11}u$, ovvero di quella parte del grafo (si pensi ai proof-net) costituita dalla connessione, tramite *cut*-link di f e u, come mostrato dalla 3.5.17 a pag. 218:



cut nilpotente   *cut* non nilpotente   (3.5.17)

Tale nilpotenza assicura una computazione finita del valore di f applicato a u: il caso "sintattico" richiede cioè $let(I - f_{11}u) = 0$, ed è per questo motivo che nelle versioni sinora incontrate della dualità questo terzo componente non era mai apparso. D'altra parte, la possibilità di una convergenza "al limite", ossia come convergenza di una serie infinita, fa emergere questo componente intermedio, il quale non è altro che il "misuratore di correttezza sintattica", la scommessa del design $[\mathfrak{f}]\mathfrak{a}$ la cui trama è proprio $[f]u$ e che si confronta con il design la cui trama è v. Ci troviamo così già nel pieno di una teoria moltiplicativa molto più generale di quelle viste sinora, tanto nella *GdI* quanto nella ludica o negli spazi coerenti (quantistici): è un risultato di enorme rilievo che questa estensione sia possibile, ovvero che la normatività moltiplicativa risulti a tal punto indipendente dai requisiti discreti connessi con la scelta di un linguaggio e di una sintassi. Non resta dunque che scrivere in maniera accurata ciò che in questi risultati è già implicito:

Definizione 4.3.8 (comportamento). *Sia $\pi \in \mathcal{H}$ una proiezione. Un'* etica $\mathbf{E}$ *in base π è un insieme di design in base π. Un* comportamento *in base π è un'etica $\mathbf{G}$ in base π*

uguale al suo bipolare $\mathbf{G}^{\overset{\downharpoonleft}{\sim}\overset{\downharpoonleft}{\sim}}$ *(dove il polare di un insieme è definito come al solito come* $X^{\overset{\downharpoonleft}{\sim}} = \{\mathfrak{d} | \forall \mathfrak{e} \in X, \mathfrak{d} \overset{\downharpoonleft}{\sim} \mathfrak{e}\}$*).*

Definizione 4.3.9. *Siano* $\mathbf{G}, \mathbf{H}$ *comportamenti in base rispettivamente* π, π'*, con* π, π' *disgiunte. Il* prodotto tensoriale $\mathbf{G} \otimes \mathbf{H}$ *è il comportamento in base* $\pi + \pi'$ *definito come segue:*

$$\mathbf{G} \otimes \mathbf{H} = \{\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b} = (\alpha + \beta, u + v) | \mathfrak{a} = (\alpha, u) \in \mathbf{G}, \mathfrak{b} = (\beta, v) \in \mathbf{H}\}^{\overset{\downharpoonleft}{\sim}\overset{\downharpoonleft}{\sim}} \tag{4.3.10}$$

Il teorema che stabilisce la dualità tra $\otimes$ e $\parr$ è a questo punto un corollario del teorema 4.3.11:

Teorema 4.3.12. *Siano* $\mathbf{G}, \mathbf{H}$ *comportamenti in basi disgiunte. Allora il design* $\mathfrak{f} = (\gamma, f) \in (\mathbf{G} \otimes \mathbf{H})^{\overset{\downharpoonleft}{\sim}}$ *se e solo se, per ogni* $\mathfrak{a} = (\alpha, u) \in \mathbf{G}$*, si ha che* $\varrho(fu) < 1$ *e* $[\mathfrak{f}]\mathfrak{a} = (\alpha + \gamma + let(I - fu), [f]u) \in \mathbf{H}^{\overset{\downharpoonleft}{\sim}}$.

Conseguenza immediata del teorema è la sensatezza della definizione del $\parr$ (nella forma del $\multimap$):

Definizione 4.3.10. *Siano* $\mathbf{G}, \mathbf{H}$ *comportamenti in base rispettivamente* π, π'*, con* π, π' *disgiunte.* $\mathbf{G} \multimap \mathbf{H}$ *è il comportamento in base* $\pi + \pi'$ *definito come segue:*

$$\mathbf{G} \multimap \mathbf{H} = (\mathbf{G} \otimes \mathbf{H}^{\overset{\downharpoonleft}{\sim}})^{\overset{\downharpoonleft}{\sim}} = \{\mathfrak{f} | \forall \mathfrak{a} \in \mathbf{G}, [\mathfrak{f}]\mathfrak{a} \in \mathbf{H}\} \tag{4.3.11}$$

Questa definizione conclude la trattazione della teoria "oggettiva" della *GdI*; la cifra dell'astrattezza dei risultati fin qui ottenuti sta nella loro radicale inapplicabilità a casi concreti: a differenza di quanto avveniva con la *GdI* matriciale, gli operatori cui facciamo riferimento non hanno, a priori, alcun significato sintattico, così come la loro interazione, dipendendo in maniera essenziale dagli strumenti analitici della matematica del continuo, è priva di significativi contenuti computazionali. Sarà solo con l'introduzione del "soggetto", della sintassi, che potremo dare inizio a un dialogo, niente affatto chiuso ma tema di una ricerca che è solo ai suoi esordi, tra la geometria "oggettiva" della logica e i presupposti discreti del calcolo: i paragrafi che seguiranno, sulla teoria soggettiva e sull'aritmetica non commutativa, non sono dunque da intendersi come se stabilissero risultati definitivi dotati di un contenuto logico e filosofico sicuro, bensì come primi tentativi di realizzare il progetto, al tempo stesso filosofico e matematico, di una ricerca kantianamente orientata alle condizioni di possibilità dell'interazione logica, nella sua concretezza sintattica e discreta, attraverso

> [...] l'ouverture de l'éspace logique à des techniques non ensembliste. Aprés ce chapitre, on ne pourra plus utiliser des sophismes du genre ≪Les idées c'est du langage; le langage s'écrit avec des symboles a, b, c, etc. ≫: et si ces symbole ne commutaient pas? (Girard, [37])

4.4 La teoria "soggettiva" e iperfinita

In questo paragrafo, attraverso la discussione dei requisiti algebrici per la formulazione di una *GdI* "soggettiva", ovvero per il recupero, nel fattore di tipo $\mathbf{II}_1$, della manipolabilità discreta dei sistemi deduttivi, ci imbatteremo in alcuni interrogativi, destinati a rimanere per il momento aperti, su come inquadrare da un punto di vista filosofico e semiotico le intuizioni sulle nozioni di "finito" e "infinito", invisibili a considerazioni di sola cardinalità, che emergono dall'applicazione delle algebre di operatori.

Verità e nilpotenza La teoria "oggettiva" sin qui delineata ci ha posto di fronte a un universo sintatticamente amorfo, il quale tuttavia si presta molto bene al costituirsi di forme interattive di normatività (i comportamenti). Il proposito di una sintassi trascendentale ci conduce ora alla ricerca, all'interno di questo universo, delle condizioni che garantiscono a questa normatività di potersi esplicitare in una forma concretamente manipolabile, vale a dire in una sintassi. La domanda fondamentale che, dall'interno della *GdI* non commutativa, dovrà guidarci sarà allora la seguente: cos'è una dimostrazione? Si osservi come la risposta essenzialista per cui una dimostrazione è ciò che si accorda con una certa forma, che rispetta un'identità indipendente dai contesti in cui essa può manifestarsi, l'impostazione categoriale e giustificazionista per capirci, non è più a disposizione: basta dare un'occhiata alla definizione 4.3.6 a pag. 256 della dualità per rendersi conto della radicale contestualità cui vanno incontro le norme indotte dai comportamenti; come abbiamo osservato nel paragrafo precedente, del resto, un qualsiasi design non polare a un altro può essere forzato ad esserlo semplicemente agendo sul contesto, su quella che potremmo chiamare l'"irrilevanza scalare" di un fattore moltiplicativo $e^{-\alpha} \in \mathbb{C}$. *La ricerca dell'essenza, da questo momento in poi, non sarà altro che la ricerca di strumenti per gestire, controllare, prevedere i contesti possibili* (e su questa stessa nozione di possibilità avremo da discutere in §4.6).

Tornando alla domanda di partenza, una risposta che anche il più essenzialista potrebbe essere disposto ad accettare, è che, affinchè qualcosa sia una dimostrazione, questo qualcosa debba perlomeno soddisfare due requisiti:

verità *deve esserci un qualcosa di cui la dimostrazione stabilisce la* verità*;*

sintassi *la dimostrazione deve essere un artefatto (linguistico, geometrico, ingegneristico o semplicemente fisico) in qualche modo manipolabile (come direbbe Wittgenstein, deve essere parte di un gioco linguistico).*

Come vedremo, entrambe queste condizioni sono difficilmente soddisfacibili in una teoria puramente oggettiva, come quella proposta sinora. Il punto è quante e quali sono le conseguenze da accettare per l'irriducibile soggettività di queste componenti, e, da un punto di vista tecnico, se la definizione 4.2.28 (pag. 245) di "soggettivo" come "dipendente da ipotesi di commutazione" possa essere la nostra linea guida anche nella *GdI*. La risposta che sarà accennata nelle seguenti pagine, si ricordi, non è da considerarsi in alcun modo definitiva: quanto seguirà non è altro che un insieme più o meno disordinato di esempi tratti da uno scenario molto recente, e del tutto nuovo, della ricerca logica e filosofica.

Per quanto riguarda il requisito della verità, dobbiamo anzitutto osservare che la questione dell'oggetto di cui la dimostrazione stabilisce la verità sembra ammettere una soluzione oggettiva: già a partire dalla ludica, la nozione di comportamento ci ha permesso di elaborare una versione normativa e non linguistica (nel senso di non essere legata ad alcun linguaggio in particolare) di ciò che prima, con maggiore approssimazione, chiamavamo formule ed enunciati (ciò che in §4.6 chiameremo un "forma trascendentale"). Una dimostrazione stabilisce dunque la verità di un comportamento. Il vantaggio principale della nozione di comportamento rispetto a quella di formula è quella che abbiamo chiamato in §2.2.1 "sintassi a posteriori", ovvero il fatto che la dimostrazione non nasce già "siamese" con la sua formula, ma può acquisirne più di una nel corso del suo uso: in breve, *piuttosto che dire che una dimostrazione è ciò che rende vero un enunciato, dovremo dire un enunciato è ciò che può essere reso vero da una dimostrazione.*

Senza la pretesa di addentrarci nel vasto dibattito circa la forma che dovrebbe avere una adeguata teoria della verità, possiamo limitarci a osservare alcune tra le condizioni più rilevanti che riguardano tale nozione, in accordo con (Girard, [37]) (il quale tuttavia chiama la seconda condizione "oggettività", un'espressione che, nell'ambito della presente discussione avrebbe creato un po' di confusione):

coerenza *Due comportamenti duali non possono essere entrambi veri.*

essenza *Se un comportamento* **G** *è vero ed un comportamento* **H** *è isomorfo a* **G***, allora anche* **H** *è vero.*

composizionalità *La verità è conservata dalle premesse alla conseguenza di un'inferenza logicamente corretta.*

Si noti come la versione "linguistica" della condizione di coerenza "due enunciati reciprocamente contraddittori non possono essere entrambi veri" richieda il ricorso alla seconda condizione, quella dell' essenza, dal momento che distinte occorrenze di una formula possono corrispondere a comportamenti distinti e isomorfi (vd. §2.2.1). Si osservi anche l'indipendenza della condizione di coerenza da quella di composizionalità: questa è una conseguenza del fatto che la dualità viene qui considerata una componente primitiva dell'architettura logica, di per sè indipendente dalla regole inferenziali con cui si sceglie di strutturare tale architettura; basti infatti pensare a quanto visto in §3.4 riguardo il principio dell'inferenzialità delle norme, ed allo stesso tempo alla indispensabilità, nell'approccio dei proof-net, della dualità geometrica tra grafo e giri intorno ad esso.

In definitiva, le riflessioni svolte in §2.2.2, §3.4 e ancor più esplicitamente in §4.2, ci portano a concludere che la condizione di composizionalità, a differenza di quella di coerenza, che sembra essere oggettiva, sia irriducibilmente soggettiva. Per quanto riguarda invece la seconda condizione, quella dell'essenza, la questione della sua oggettività sembra rimanere, per il momento, abbastanza oscura: non è infatti una conseguenza diretta del rifiuto della concezione essenzialista della logica il rifiuto della natura essenzialista della verità; una ricostruzione esplicita ed interattiva delle classi di isomorfismo delle dimostrazioni matematiche potrebbe benissimo portare a riconoscere che la verità è costante su queste classi.

La scelta operata in questa tesi è dunque, diversamente dalle diverse opzioni provate da Girard in (Girard, [37, 40, 43]), quella di accontentarsi della condizione di coerenza e di una forma molto indebolita della condizione dell'essenza, ovvero che l'appartenenza a un comportamento di un design "vincente" sia indipendente da quell'"irrilevanza scalare" di cui si è parlato sopra, ovvero dai particolari valori scalari che possono essere moltiplicati alla trama di esso. Arriviamo così alla seguente definizione:

Definizione 4.4.1 (design vincente)**.** *Sia* $\mathfrak{d} = (\alpha, u) \in \mathbf{G}$ *un design nel comportamento* $\mathbf{G}$*.* $\mathfrak{d}$ *è detto* vincente *quando soddisfa le seguenti condizioni:*

certezza $\alpha = 0$*;*

isometria u *è una isometria parziale;*

irrilevanza scalare $\forall z \in \mathbb{C}, z \neq 0,\ (0, zu) \in \mathbf{G}$.

Definizione 4.4.2 (verità)**.** *Un comportamento* $\mathbf{G}$ *è* vero *quando contiene un design vincente.*

Proposizione 4.4.1 (proprietà dei design vincenti)**.** *Siano* $\mathbf{G}$ *e* $\mathbf{H}$ *comportamenti e siano* $\mathfrak{a} = (\alpha, u) \in \mathbf{G}, \mathfrak{f} = (\gamma, f) \in \mathbf{G} \multimap \mathbf{H}$ *design.*

(*i*) *Se* $\mathbf{G}$ *è vero, allora* $\mathbf{G}^{\downarrow\sim}$ *non può esserlo;*

(*ii*) *Se* $\mathfrak{a}$ *e* $\mathfrak{f}$ *sono vincenti, allora* $[\mathfrak{f}]\mathfrak{a}$ *soddisfa certezza e irrilevanza scalare, ed inoltre* $[f]u$ *è* topologicamente nilpotente.

Dimostrazione. (*i*) Sia $\perp = \{(\lambda, 0) | \lambda \neq 0\}$; si tratta di un comportamento in quanto è il polare di $\{(0, u) | u \in \mathcal{H}\}$ (il che ci permette di definire $\mathbf{1} = \perp^{\downarrow\sim}$). Proviamo allora che $\mathbf{G}^{\downarrow\sim} = \mathbf{G} \multimap \perp$: si ha infatti $(\beta, v) \in \mathbf{G}^{\downarrow\sim}$ se e solo se $\forall(\alpha, u) \in \mathbf{G}$ $\alpha + \beta + let(I - uv) \neq 0$ se e solo se $(\alpha + \beta + let(I - uv), 0) \in \perp$. Supponiamo adesso che $(0, u) \in \mathbf{G}$ e $(0, v) \in \mathbf{G}^{\downarrow\sim}$ siano entrambi vincenti. Allora si ha che $\varrho(zuv) < 1, \forall z \neq 0, z \in \mathbb{C}$, e dunque $\varrho(uv) = 0$, da cui segue che $let(I - uv) = 0$, e dunque che $(0, 0) \in \perp$, il che è assurdo.

(*ii*) Come nel caso precedente, la condizione $\varrho(zfu) < 1, \forall z \neq 0$ produce $\varrho(fu) = 0$, che è proprio la definizione di *nilpotenza topologica* (equivalente a $lim_n(fu)^n = 0$). Si ha dunque che $[\mathfrak{f}]\mathfrak{a} = (0, [f]u)$; che per ogni $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$, si abbia $(0, z[f]u) \in \mathbf{H}$ segue dall'equazione 4.3.7 a pag. 257.

□

D'altra parte, dal fatto che u e v siano isometrie parziali non segue affatto che il loro prodotto uv sia una isometria parziale, e dunque non c'è modo di dimostrare, senza ulteriori ipotesi soggettive, la composizionalità della verità:

Proposizione 4.4.2. *Siano* u, v *isometrie parziali. Allora* uv *è un'isometria parziale se e solo se le proiezioni* u^*u *e* vv^* *commutano.*

Dimostrazione. uv è un'isometria parziale se e solo se $(uv(uv)^*)^2 = uv(uv)^*$; la tesi segue allora dalle seguenti identità: $(uv(uv)^*)^2 = (uvv^*u^*)^2 = uvv^*u^*uvv^*u^*$. □

In secondo luogo, la nilpotenza topologica, sebbene annulli il determinante logaritmico, non è una condizione sufficiente per la computabilità dell'interazione: questa proprietà è in effetti troppo debole, come mostrato dal seguente risultato.

Proposizione 4.4.3. *Sia $u \in \mathcal{H}$ un operatore topologicamente nilpotente. Allora esiste una successione $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di operatori nilpotenti tale che $lim_n \|u - u_n\| = 0$.*

Dimostrazione. Si veda (Apostol et al., [4]). □

Non c'è modo dunque di superare la fondamentale richiesta di nilpotenza per garantire la finitezza della computazione. D'altra parte, il prossimo risultato mostra come le condizioni necessarie alla nilpotenza sono proprio quelle necessarie alla composizionalità, legittimando la definizione 4.2.28 a pag. 245 della “soggettività come commutatività”:

Proposizione 4.4.4. *Siano $\mathfrak{f} = (0, f), \mathfrak{a} = (0, u)$ design vincenti rispettivamente nei comportamenti $\mathbf{G} \multimap \mathbf{H}$ e $\mathbf{G}$, e scomponiamo f in blocchi come $\left(\begin{smallmatrix} f_{11} & f_{21} \\ f_{12} & f_{22} \end{smallmatrix}\right)$. Allora, se per ogni $n \in \mathbb{N}$, $(f_{11}u)^n$ è ancora una isometria parziale, il design $[\mathfrak{f}]\mathfrak{a}$ è vincente in $\mathbf{H}$ (ovvero $f_{11}u$ è nilpotente).*

Dimostrazione. La norma di una isometria parziale è uguale a 0 o a 1. D'altra parte, per ipotesi, $\varrho(f_{11}u) = \liminf \|(f_{11}u)^n\|^{1/n} = 0$, il che è possibile solo se $\|(f_{11}u)^N\| = 0$, per un certo $N \in \mathbb{N}$. Ne concludiamo che $(f_{11}u)^N = 0$ e dunque $f_{11}u$ è nilpotente. □

Attraverso le proposizioni 4.4.2 e 4.4.4 siamo così portati alle seguenti definizioni:

Definizione 4.4.3 (algebra di Boole di proiezioni)**.** *Un*'algebra di Boole $\mathcal{B} \subset \mathcal{H}$ *di proiezioni è un'algebra di proiezioni di $\mathcal{H}$ commutativa e chiusa per unione (ovvero la somma), intersezione (ovvero il prodotto) e complementare (ovvero l'operazione $I - \pi$).*

Definizione 4.4.4 (monoide epidittico)**.** *Sia $\mathcal{B} \subset \mathcal{H}$ un'algebra di Boole di proiezioni. Un* monoide epidittico *$\mathcal{E} \subset \mathcal{H}$ di algebra $\mathcal{B}$ è uno $*$-monoide numerabile di operatori di $\mathcal{H}$ (chiuso cioè per composizione e aggiunzione, contenente I e 0) tale che, per ogni $\pi \in \mathcal{B}$ ed ogni $u \in \mathcal{E}$, si ha che $u\pi u^* \in \mathcal{B}$.*

Questa definizione costituisce un raffinamento tecnico della tesi 4.2.27 a pag. 244. Che un monoide epidittico sia il candidato ideale a rappresentare una sintassi è mostrato del resto dalla seguente proposizione:

Proposizione 4.4.5 (proprietà del monoide epidittico)**.** *Sia $\mathcal{E}$ un monoide epidittico sull'algebra di Boole $\mathcal{B}$. Allora valgono le seguenti:*

(*i*) *$\mathcal{E}$ è uno $*$-monoide di isometrie parziali;*

(*ii*) *$\varrho(u) < 1$ e $u \in \mathcal{E} \Rightarrow u$ nilpotente.*

Dimostrazione. La (i) segue dal fatto che $I \in \mathcal{B}$: infatti, per ogni $u \in \mathcal{E}$, si ha $uIu^* = uu^* \in \mathcal{B}$. In virtù della caratterizzazione delle isometrie parziali alla fine di §D, si vede che u è una isometria parziale. Si noti che la definizione 4.4.4 è ben posta in quanto, se $u, v \in \mathcal{E}$, allora si ha $(uv(uv)^*)^2 = (uvv^*u^*)^2 = uvv^*u^*uvv^*u^*$, e del resto $u^*u, vv^* \in \mathcal{B}$, e dunque commutano: in altre parole, uv è ancora una isometria parziale e si ha che $uv\mathcal{B}v^*u^* \subset u\mathcal{B}u^* \subset \mathcal{B}$. La (ii) segue allora da un argomento analogo a quello della proposizione 4.4.4.

□

Possiamo a questo punto dare una definizione di *dimostrazione* che soddisfa tanto la coerenza quanto la composizionalità della verità e, in virtù della dimensione numerabile del monoide epidittico, anche il requisito di manipolabilità:

Definizione 4.4.5 (dimostrazione)**.** *Una* dimostrazione *di un comportamento* $\mathbf{G}$ *è un design* $\mathfrak{d} \in \mathbf{G}$ *vincente che appartiene a un monoide epidittico.*

Proposizione 4.4.6 (proprietà delle dimostrazioni)**.** (i) *Se* $\mathfrak{d}$ *è una dimostrazione di* $\mathbf{G}$*, allora non esiste una dimostrazione di* $\mathbf{G}^{\perp}$*;*

(ii) *Se* $\mathfrak{f}$ *è una dimostrazione di* $\mathbf{G} \multimap \mathbf{H}$ *e* $\mathfrak{a}$ *è una dimostrazione di* $\mathbf{G}$*, allora* $[\mathfrak{f}]\mathfrak{a}$ *è una dimostrazione di* $\mathbf{H}$*.*

Dimostrazione. Si tratta di corollari immediati delle precedenti proposizioni. □

Tra i monoidi epidittici troviamo subito una vecchia conoscenza:

Proposizione 4.4.7. *L'insieme* $\mathcal{P}_n := \{m_\sigma^{e_i} \in \mathcal{M}_n(\{0,1\}) | \sigma \in S_n\}$ *delle matrici di permutazione in una base fissata di* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *è un monoide epidittico.*

Dimostrazione. L'algebra $\mathcal{B}_n := \{\sum_{0<i\leq n}^n x_i e_i | x_i \in \{0,1\}\}$ è chiaramente un'algebra di Boole e si ha che $u \in \mathcal{P}_n \Rightarrow uu^* \in \mathcal{B}_n$. Che $\mathcal{P}_n$ sia uno $*$-monoide è immediato dalle proprietà 3.5.1 (pag. 213) delle matrici di permutazione. □

Una caratteristica importante dei monoidi epidittici è quella di essere chiusa per somme dirette e prodotti tensoriali finiti:

Proposizione 4.4.8. *Siano* $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ *monoidi epidittici. Allora* $\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}'$ *e* $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}'$ *sono monoidi epidittici.*

Dimostrazione. Siano $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ le rispettive algebre di Boole. Si ha che $(\pi_1 \oplus \pi_1')(\pi_2 \oplus \pi_2') = \pi_1\pi_2 \oplus \pi_1'\pi_2'$ e $(\pi_1 \otimes \pi_1')(\pi_2 \otimes \pi_2') = \pi_1\pi_2 \otimes \pi_1'\pi_2'$ e dunque $\mathcal{B} \oplus \mathcal{B}'$ e $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}'$ sono anch'esse algebre di Boole. Si verifica allora facilmente che $\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}'$ e $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}'$ sono monoidi epidittici su tali algebre. □

Una conseguenza di questa proposizione è la possibilità di considerare sistemi diretti $\{\mathcal{B}_{2^n}, \varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{\mathcal{P}_{2^n}, \varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di algebre di Boole e di monoidi epidittici, dove $\mathcal{B}_m$ e $\mathcal{P}_m$ sono definiti come nella proposizione 4.4.7 e $\varphi_n : \mathcal{M}_{2^n}(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_{2^{n+1}}(\mathbb{C})$ è l'isomorfismo definito nella proposizione 4.3.3 (pag. 251). La seguente proposizione ci permette di costruire allora un monoide epidittico $\mathcal{P}$ per l'algebra $\mathcal{H}$:

Proposizione 4.4.9. *I limiti diretti* $\mathcal{B} = \varinjlim_n \mathcal{B}_{2^n} \subset \mathcal{H}$ *e* $\mathcal{P} = \varinjlim_n \mathcal{P}_{2^n} \subset \mathcal{H}$ *sono rispettivamente un'algebra di Boole e un monoide epidittico su di essa.*

Dimostrazione. Il limite diretto $\varinjlim_n \mathcal{M}_{2^n}(\mathbb{C}) = \mathbf{CAR}$ è ultradebolmente denso, per definizione, in $\mathcal{H}$. Procedendo in analogia con la proposizione 4.4.8 si mostra facilmente che se $\pi \in \mathcal{B}$, allora $\pi \in \mathcal{B}_{2^n}$, per un certo n, ossia è una proiezione, e se $\pi, \pi' \in \mathcal{B}$, allora $\pi \in \mathcal{B}_{2^n}, \pi'\mathcal{B}_{2^m}$, per certi $m, n \in \mathbb{N}$, ma allora esiste un $k \in \mathbb{N}$ tale che che $\pi, \pi' \in \mathcal{B}_{2^k}$, e dunque $\pi\pi' = \pi'\pi$. Con lo stesso argomento si prova che $\mathcal{B}$ è chiusa per unione, intersezione e complementare. Allo stesso modo, se $u, v \in \mathcal{P}$, allora $u \in \mathcal{P}_{2^n}, v \in \mathcal{P}_{2^m}$, per certi $m, n \in \mathbb{N}$, e dunque esiste un $k \in \mathbb{N}$ tale che $u, v \in \mathcal{P}_{2^k}$ e $uv \in \mathcal{P}_{2^k} \subset \mathcal{P}$ (in realtà non si tratta di una "vera" inclusione, ma di una iniezione che, in virtù della proposizione 4.4.8, preserva le proprietà algebriche che ci interessano). Infine, da $u \in \mathcal{P}$ segue $u \in \mathcal{P}_{2^k}$, per un certo k, e dunque $uu^* \in \mathcal{B}_{2^k} \subset \mathcal{B}$ (ancora con abuso di notazione). □

La revisione idiomatica Nella descrizione in §4.1 dei requisiti morfologici necessari per implementare nella *GdI* le regole esponenziali la proprietà usata nella proposizione 4.4.8 $(u \otimes v)(u' \otimes v') = uu' \otimes vv'$, nella forma

$$(I \otimes v)(u \otimes I) = (u \otimes I)(I \otimes v) = (u \otimes v) \tag{4.4.1}$$

era risultata fondamentale in quanto, garantendo una forma di *commutazione a priori*, permetteva di isolare delle opportune isometrie (le φ e ψ che "duplicavano" l'universo dei loci) come variabili vincolate, ossia come indipendenti dal contesto in cui venivano applicate.

Possiamo quindi immaginare di attribuire a ogni design un suo insieme (finito) di variabili vincolate "gratuite" introducendo la nozione di *idioma*, che modifica le definizioni 4.3.5 e 4.3.6 a pag. 256 senza tuttavia alterarne lo spirito:

Definizione 4.4.6 (idioma). *Un* idioma $\mathcal{D}$ *è una vN-algebra finita, sottoalgebra di un'algebra di tipo* $\mathbf{II}_1$*, considerata a meno di isomorfismo.*

Dal momento che gli elementi dell'idioma costituiscono variabili vincolate, non c'è nessuna richiesta locativa da fare. Qui si potrebbe obbiettare che gli idiomi reintroducono una forma di essenzialismo per così dire "dalla finestra": sarà tuttavia necessario attendere fino al prossimo paragrafo per scoprire che non è affatto così.

La nozione tecnica di cui abbiamo bisogno per recuperare le definizioni di design e di dualità in questa versione idiomatica è quella di *pseudotraccia*:

Definizione 4.4.7 (pseudotraccia). *Sia* $\mathcal{A}$ *una vN-algebra finita. Una* pseudotraccia a *su* $\mathcal{A}$ *è una forma hermitiana* ($a(u^*) = a(u)$)*, normale e tracciale su* $\mathcal{A}$*, tale che* $a(I_{\mathcal{A}}) \neq 0$.

In altre parole, una pseudotraccia è come una traccia su $\mathcal{A}$, senza però i requisiti di positività e normalizzazione. In particolare, non è uno stato. E' d'altra parte sufficiente per definire un determinante logaritmico

$$let_a(u) = -a(log(I-u)) = \sum_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} \frac{a(u^n)}{n} \tag{4.4.2}$$

Proposizione 4.4.10. *Siano $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ vN-algebre finite, siano $u \in \mathcal{A}, v \in \mathcal{B}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\pi \in \mathcal{B}$ una proiezione; siano inoltre a, b pseudotracce rispettivamente su $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ e $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ uno $*$-isomorfismo normale (nel senso di ultradebolmente continuo) tale che $a = b \circ \varphi$. Allora valgono le seguenti:*

$$let_{\lambda a}(I-u) = \lambda let_a(I-u) \tag{4.4.3}$$

$$let_{a\oplus b}(I-u\oplus v) = let_a(I-u) + let_b(I-v) \tag{4.4.4}$$

$$let_b(I-\varphi(u)) = let_a(I-u) \tag{4.4.5}$$

$$let_{a\otimes b}(I-(u\otimes\pi)) = let_a(I-u)b(\pi) \tag{4.4.6}$$

Dimostrazione. La 4.4.3, la 4.4.4 e la 4.4.5 sono immediate. La 4.4.6 segue dalla 4.4.3 e dalla 4.4.5 applicando lo $*$-isomorfismo $\varphi(u) = ((b(\pi))^{-1})u \otimes \pi$. □

Passiamo dunque alle nuove definizioni:

Definizione 4.4.8 (design)**.** *Un design $\mathfrak{d}$ è dato da una tripla (α, a, u), dove $\alpha \in \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ è la* scommessa*, $u \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{A}$, dove $\mathcal{A}$ è una vN-sottoalgebra finita di $\mathcal{H}$, e $\|u\| \le 1$, è la* trama*, e a è una pseudotraccia su $\mathcal{A}$. $\mathfrak{d}$ è detto* in base π *quando $\pi \in \mathcal{H}$ è una proiezione e si ha che $(\pi \otimes I_{\mathcal{A}})u(\pi \otimes I_{\mathcal{A}}) = u$.*

Possiamo a questo punto definire una nozione di α-equivalenza tra design:

Definizione 4.4.9 (α-equivalenza)**.** *Siano $\mathfrak{d} = (\alpha, a, u)$ e $\mathfrak{e} = (\beta, b, v)$ design di rispettivi idiomi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. Allora $\mathfrak{d}$ è α-equivalente a $\mathfrak{e}$ quando esiste uno $*$-isomorfismo $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e un $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$ tale che $b \circ \varphi = \lambda a$ e $\mathfrak{e} = \varphi(\mathfrak{d}) = (\lambda\alpha, b, \varphi(u))$.*

La nuova definizione della dualità sarà allora del tutto analoga alla definizione di riduzione nel λ-calcolo (vd. (Krivine, [49])): per evitare interferenze, in $(\lambda x.t)u \rightsquigarrow t'[u/x]$, si sceglie di adottare un termine t' α-equivalente a t le cui variabili legate non siano libere in u.

Definizione 4.4.10 (dualità)**.** *Siano $\mathfrak{d} = (\alpha, a, u), \mathfrak{e} = (\beta, b, v)$ design di idioma rispettivamente $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ed entrambi in base π. Allora si ha che $\mathfrak{d} \overset{\downarrow}{\sim} \mathfrak{e}$ se e solo se $\varrho(uv) < 1$ e*

$$\langle \mathfrak{d} | \mathfrak{e} \rangle = \alpha b(I_{\mathcal{B}}) + \beta a(I_{\mathcal{A}}) + let_{tr\otimes a\otimes b}(I - u^{\ddagger}v^{\dagger}) \neq 0 \tag{4.4.7}$$

dove $u^{\ddagger}$ e $v^{\dagger}$ sono le versioni "α-equivalenti" di u e v definite come segue:

$$\begin{aligned} u^{\ddagger} &:= u \otimes I_{\mathcal{B}} \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \\ v^{\dagger} &:= \psi(v \otimes I_{\mathcal{A}}) \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \end{aligned} \tag{4.4.8}$$

dove ψ è l'isomorfismo $\mathcal{H} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

La nuova dualità induce immediatamente la nuova applicazione funzionale:

Definizione 4.4.11. *Siano* $\pi, \pi' \in \mathcal{H}$ *proiezioni disgiunte e siano* $\mathfrak{f} = (\gamma, c, f), \mathfrak{a} = (\alpha, a, u)$ *design rispettivamente in base* $\pi + \pi'$ *e* π *e di idiomi* $\mathcal{C}$, $\mathcal{A}$. *Allora, data la scomposizione di* $f^\ddagger$ *lungo* π *e* π' $f^\ddagger = \left(\begin{smallmatrix} f^\ddagger_{11} & f^\ddagger_{21} \\ f^\ddagger_{12} & f^\ddagger_{22}\end{smallmatrix}\right)$, *qualora si abbia* $\varrho(f^\ddagger_{11}u^\dagger) < 1$, *l'applicazione funzionale* $[\mathfrak{f}]\mathfrak{a}$ *è definita come*

$$[\mathfrak{f}]\mathfrak{a} = (\gamma a(I_\mathcal{A}) + \alpha c(I_\mathcal{C}) + let_{tr\otimes c\otimes a}(I - (f^\ddagger_{11}u^\dagger)), a \otimes c, [f]^\ddagger u^\dagger) \tag{4.4.9}$$

dove $[f]^\ddagger u^\dagger$ *è definito come*

$$f^\ddagger_{22} + f^\ddagger_{12}u^\dagger(\pi \otimes I_\mathcal{A} \otimes I_\mathcal{C} - f^\ddagger_{11}u^\dagger)^{-1}f^\ddagger_{21} \tag{4.4.10}$$

Quest'ultima definizione induce una modifica nella definizione del tensore di due design $\mathfrak{a} = (\alpha, a, u), \mathfrak{b} = (\beta, b, v)$, di idioma rispettivamente $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, ovvero

$$\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b} = (\beta a(I_\mathcal{A}) + \alpha b(I_\mathcal{B}), a \otimes b, u^\ddagger \oplus v^\dagger) \tag{4.4.11}$$

Nel seguito, per semplicità, il ricorso alle varianti $^\ddagger, ^\dagger$ sarà lasciato implicito. La seguente proposizione, del resto, ci assicura che le nuove definizioni non cambiano nulla di tutti i risultati ottenuti con le precedenti:

Proposizione 4.4.11. *Se* $\mathfrak{d} \overset{\downarrow}{\sim} \mathfrak{e}$ *e* $\mathfrak{d}', \mathfrak{e}'$ *sono* α*-equivalenti, rispettivamente, a* $\mathfrak{d}$ *e ad* $\mathfrak{e}$, *allora* $\mathfrak{d}' \overset{\downarrow}{\sim} \mathfrak{e}'$.

Dimostrazione. Siano $\mathfrak{d} = (\alpha, a, u), \mathfrak{e} = (\beta, b, v)$ di idioma, rispettivamente $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ e siano $\varphi : \mathcal{A} \to \varphi(\mathcal{A}), \psi : \mathcal{B} \to \psi(\mathcal{B})$ $*$-isomorfismi tali che $\varphi(\mathfrak{d}) = (\lambda\alpha, a', \varphi(u)), \psi(v) = (\mu\beta, b', \psi(v))$, per certi $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda, \mu \neq 0$, e dunque $a' \circ \varphi = \lambda a$ e $b' \circ \psi = \mu b$. Allora si ha, in virtù della proposizione 4.4.10

$$\begin{aligned}\langle\varphi(\mathfrak{d})|\psi(\mathfrak{e})\rangle &= \lambda\alpha b'(I_{\psi(\mathcal{B})}) + \mu\beta a'(I_{\varphi(\mathcal{A})}) + let_{tr\otimes a'\otimes b'}(I - \varphi(u^\ddagger)\psi(v^\dagger)) \\ &= (\lambda\mu)\alpha b(I_\mathcal{B}) + (\lambda\mu)\beta a(I_\mathcal{A}) + (\lambda\mu)let_{tr\otimes a\otimes b}(I - u^\ddagger v^\dagger) \\ &= (\lambda\mu)\langle\mathfrak{d}|\mathfrak{e}\rangle\end{aligned} \tag{4.4.12}$$

da cui segue la tesi. □

In particolare, dato un design del tipo $\mathfrak{d} = (\alpha, a, u \otimes v)$, possiamo sempre considerare l'isomorfismo banale $1_\mathcal{A} : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ tale che $1_\mathcal{A}(\mathfrak{d}) = (\alpha, tr, u)$ è α-equivalente a $\mathfrak{d}$ ed è, sostanzialmente, un design nel senso della definizione 4.3.5 a pag. 256. Possiamo così vedere che, per i design senza idioma, la teoria idiomatica non aggiunge nulla di nuovo (nessuna interazione non conservativa). D'altra parte, è decisivo che non ogni design sia del tipo di $\mathfrak{d}$, e cioè che non ogni $u \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{A}$ è del tipo $u_1 \otimes u_2$. Questo è ciò che ci permette di "duplicare" i design senza idioma:

Proposizione 4.4.12 (contrazione)**.** *Siano $\pi, \pi', \pi'' \in \mathcal{H}$ proiezioni disgiunte e siano u, v isometrie parziali tali che $u^*u = \pi, uu^* = \pi'$ e $v^*v = \pi, vv^* = \pi''$ (ovvero si ha $u : \pi \to \pi'$ e $v : \pi \to \pi''$). Sia inoltre $\mathfrak{d} = (0, tr, d)$ un design senza idioma e con scommessa 0. Allora esiste un design $\mathfrak{Contr}$ tale che $[\mathfrak{Contr}]\mathfrak{d} = u(\mathfrak{d}) \otimes v(\mathfrak{d}) = (0, Tr, udu^* \oplus vdv^*)$, dove $Tr = tr/2$ è la traccia normalizzata su $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.*

Dimostrazione. Consideriamo l'idioma $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Si ha che $\mathcal{H} \otimes \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{M}_2(\mathcal{H})$: infatti $\mathcal{H} \otimes \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^4 \simeq (\mathcal{H} \otimes \mathbb{C})^4 \simeq \mathcal{H}^4 \simeq \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Considerando la traccia normalizzata $Tr = tr/2$ su $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, possiamo definire $\mathfrak{Contr} = (0, Tr, \left(\begin{smallmatrix} u+u^* & v \\ v^* & 0 \end{smallmatrix}\right))$. Si verifica allora che

$$[\mathfrak{Contr}]\mathfrak{d} = (0, Tr, \begin{pmatrix} udu^* + vdv^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) \tag{4.4.13}$$

è α-equivalente a $u(\mathfrak{d}) \otimes v(\mathfrak{d})$. □

Tuttavia, le possibilità di duplicare si fermano qui: in effetti, nel caso di un design con idioma non banale, la tensorizzazione data dalle $^{\ddagger}, ^{\dagger}$ impedisce ogni forma di duplicazione. In particolare, dato un design di trama $u \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{A}, \mathcal{A} \neq \mathbb{C}$, una sua duplicazione richiederebbe un *automorfismo interno*, ovvero indotto da un elemento $v \in \mathcal{A}$, tale che $v\mathcal{A}v^* \simeq \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$. Un tale automorfismo, analogo alla isometria $\theta : \mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ vista in §4.1, non può esistere in un'algebra finita quale è la $\mathcal{A}$.

L'iperfinito D'altra parte, potremmo dire, non di soli automorfismi interni è fatto il mondo! In effetti, come osserva Girard,

> Les divers paradoxes (Cantor, Burali-Forti, Russell, Richard, Gödel, Turing, etc.) montrent que l'idée d'un sous-marin qui embarquerait tout, y compris le sous-marin lui-même, est absurde: tout ne peut pas être interne. (Girard, [37])

Il fattore di tipo $\mathbf{II}_1$, del resto, si presta facilmente a una doppia lettura: *dall'interno* esso è finito, nel senso di non ammettere automorfismi interni in una sua parte propria (è questo il senso della finitezza algebrica). Tuttavia, *dall'esterno* vediamo chiaramente che è un oggetto infinito nel senso forte di non numerabile, e dunque possiamo immaginare che ammetta automorfismi di ogni tipo. Il concetto di automorfismo esterno di un'algebra $\mathcal{A}$ è reso dalla nozione di *rappresentazione automorfica* di un gruppo su $\mathcal{A}$:

Definizione 4.4.12 (rappresentazione automorfica)**.** *Sia $\mathcal{A}$ un'algebra e G un gruppo discreto (finito o numerabile). Una* rappresentazione automorfica *di G su $\mathcal{A}$ è un omomorfismo $\alpha : G \to Aut(\mathcal{A})$, dove $Aut(\mathcal{A})$ è l'insieme degli automorfismi di $\mathcal{A}$, ovvero una mappa che a ogni $g \in G$ associa un automorfismo $\alpha_g : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ tale che:*

(i) $g, h \in G, a \in \mathcal{A} \Rightarrow \alpha_g(\alpha_h(a)) = \alpha_{g \circ h}(a)$

(ii) $a \in \mathcal{A} \Rightarrow \alpha_{1_G}(a) = a$, *dove $1_G \in G$ è l'unità del gruppo.*

Il problema che ci riguarda è allora quello di capire le condizioni alle quali l'azione esterna di un gruppo su $\mathcal{H}$, tramite una rappresentazione automorfica, possa essere in qualche modo “internalizzata”. La soluzione matematica più elegante è data dai *prodotti incrociati*, per introdurre quali dobbiamo anzitutto definire il concetto di algebra di convoluzione di un gruppo discreto:

Definizione 4.4.13 (anello di convoluzione). *Sia G un gruppo discreto. L'*anello di convoluzione *di G è l'algebra delle successioni $(x_g)_{g\in G}$ a valori in $\mathbb{C}$ che sono non nulle per al più un numero finito di $g \in G$, munita della somma e dell'operazione di* convoluzione *seguente:*

$$(x_g) * (y_g) := (\sum_{hk=g} x_h y_k)_{g\in G} \tag{4.4.14}$$

Si può vedere facilmente che, se $\delta_g(h) := \begin{cases} 0 & \text{se } h \neq g \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$, allora $\delta_g * \delta_h = \delta_{gh}$. Possiamo a questo punto definire l'*algebra di convoluzione*:

Definizione 4.4.14 (algebra di convoluzione di un gruppo discreto). *Sia G un gruppo discreto. L'*algebra di convoluzione di G*, $\mathcal{A}[G]$, è definita come l'insieme delle successioni $(x_g)_{g\in G} \in \ell^2(G)$ tali che, per ogni $(y_g) \in \ell^2(G)$, $(x_g) * (y_g) \in \ell^2(G)$, munito della somma e della convoluzione.*

Il risultato fondamentale su queste algebre, che le collega direttamente ai nostri interessi, è il seguente:

Teorema 4.4.13. *Sia G un gruppo discreto. Allora $\mathcal{A}[G]$ è una vN-algebra finita.*

Dimostrazione. Sappiamo che $\mathcal{A}[G] \subset \mathcal{B}(\ell^2(G))$ contiene (una copia isomorfa di) G, sotto la forma delle δ_g e dunque anche $\ell^1(G) = \{(x_g) | \sum_{g\in G} |x_g| < \infty\}$. D'altra parte, sia $[G]\mathcal{A}$ l'algebra degli elementi $(x_g) \in \ell^2(G)$ tali che, per ogni $(y_g) \in \ell^2(G)$, $(y_g)*(x_g) \in \ell^2(G)$ e sia $u \in \mathcal{B}(\ell^2(G))$ nel commutatore di $[G]\mathcal{A}$. Allora, per $(x_g) \in [G]\mathcal{A}$, si ha che $u((x_g)) = u(\delta_1 * (x_g)) = u(\delta_1) * (x_g)$, ovvero che u equivale alla convoluzione a sinistra per $u(\delta_1)$, da cui $u \in \mathcal{A}[G]$. Ne segue che $\mathcal{A}[G]$ è il commutatore di $[G]\mathcal{A}$.

D'altra parte, se consideriamo gli operatori di moltiplicazione a destra $(x_g) * \delta_h = (x_{gh})$, che sono unitari (infatti si ha $\langle (x_g) * \delta_h | (y_g) \rangle = \langle (x_{gh}) | (y_g) \rangle = \langle (x_g) | (y_{gh^{-1}}) \rangle = \langle (x_g) | (y_g) * \delta_h^* \rangle$), possiamo verificare che $\mathcal{A}[G]$ commuta con ognuno di essi, ed è dunque il commutatore di una C^*-algebra, ovvero una vN-algebra.

Infine, $tr((x_g)) := x_1$ definisce uno stato fedele: si ha infatti $tr((x_g)(x_g)^*) = \sum x_g \overline{x_g} > 0$, per $(x_g) \neq 0$ (da $(x_g)^* = (\overline{x}_{g^{-1}})$). Inoltre, $tr((x_g) * (y_g)) = \sum x_g y_{g^{-1}} = \sum x_{g^{-1}} y_g = tr((y_g) * (x_g))$ e si ha $tr(u) = \langle u(\delta_1) | \delta_1 \rangle$, ovvero tr è tracciale e normale.

□

A partire da un gruppo discreto G, possiamo dunque costruire una vN-algebra: vediamo adesso come l'azione di G su $\mathcal{H}$ induce una “internalizzazione” di $\mathcal{A}[G]$ in $\mathcal{A}$:

Definizione 4.4.15 (prodotto incrociato). *Sia G un gruppo discreto (finito o numerabile) e sia α una rappresentazione automorfica di G su una vN-algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathbb{H})$. Il* prodotto incrociato *$\mathcal{A} \rtimes_\alpha G \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}[G]$ è la chiusura ultradebole (equivalentemente, il bicommutatore) dell'algebra generata dagli operatori $\tilde{\alpha}(u), \ell_g$, $u \in \mathcal{A}, g \in G$, agenti su $\mathbb{H} \otimes \ell^2(G)$, dati da*

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(u)(x \otimes g) &:= \alpha_{g^{-1}}(u)(x) \otimes g \\ \ell_g(x \otimes h) &:= x \otimes gh \end{aligned} \tag{4.4.15}$$

Possiamo renderci conto di come la costruzione $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ "inghiottisca" gli automorfismi esterni α_g attraverso la seguente proposizione:

Proposizione 4.4.14. *Con le notazioni della definizione 4.4.15, si ha che gli $\tilde{\alpha}(u), u \in \mathcal{A}$, generano un'algebra isomorfa a $\mathcal{A}$, mentre, per ogni $g \in G$, si ha che $\ell_g \mathcal{A} \ell_g^* \simeq \alpha_g(\mathcal{A})$.*

Dimostrazione. Entrambe le tesi sono una conseguenza immediata della seguente equazione:

$$\ell_g \tilde{\alpha}(u) \ell_g^* = \tilde{\alpha}(\alpha_g(u)) \tag{4.4.16}$$

la quale è verificata come segue:

$$\begin{aligned} \ell_g \tilde{\alpha}(u) \ell_g^*(x \otimes h) &= \ell_g \tilde{\alpha}(u)(x \otimes g^{-1}h) = \ell_g(\alpha_{gh^{-1}}(u)(x) \otimes g^{-1}h) \\ &= \alpha_{gh^{-1}}(u)(x) \otimes h = \tilde{\alpha}(\alpha_g(u)) \end{aligned} \tag{4.4.17}$$

□

Vogliamo a questo punto trovare una classe di gruppi discreti G tali che $\mathcal{H} \rtimes G \simeq \mathcal{H}$: solo così l'inghiottimento potrà essere considerato una vera internalizzazione. L'aspetto interessante sarà una caratterizzazione algebrica delle proprietà morfologiche delle delocalizzazioni che è possibile costruire nel fattore di tipo $\mathbf{II}_1$: ci aspettano delle rilevanti sorprese.

Un primo risultato riguarda i gruppi cosiddetti "a classi di coniugazione infinite":

Definizione 4.4.16 (gruppo c.c.i.). *Un gruppo discreto G è detto* a classi di coniugazione infinite*, (c.c.i.), quando per ogni $g \in G, g \neq 1_G$, l'insieme $\{h^{-1}gh | h \in G\}$ ha cardinalità infinita.*

Proposizione 4.4.15. *Se G è un gruppo c.c.i., allora l'algebra $\mathcal{A}[G]$ è un fattore.*

Dimostrazione. Sia $(x_g) \in Z(\mathcal{A}[G])$ e sia G c.c.i.; allora (x_g) commuta con gli operatori di moltiplicazione δ_h, e dunque $x_{gh} = x_{hg}$, per ogni $g, h \in G$. Di conseguenza (x_g) è costante sulle sue classi coniugazione e inoltre $(x_g) \in \ell^2(G)$ solo se $x_g = 0$ per ogni $g \neq 1_G$. Ne segue che $Z(\mathcal{A}[G]) \simeq \mathbb{C}$, e dunque $\mathcal{A}[G]$ è un fattore. □

Un esempio di gruppo c.c.i. di cui ci serviremo in seguito (vd. §4.5) è il gruppo $\mathfrak{S}$ delle permutazioni di $\mathbb{N}$ che spostano al più un numero finito di elementi. Per individuare il fattore $\mathbf{II}_1$, tuttavia, abbiamo bisogno di una ulteriore proprietà, già incontrata in §4.1, ovvero quella di essere *localmente infinito*. Diamo anzitutto una caratterizzazione del fattore di tipo $\mathbf{II}_1$ di fondamentale importanza:

Definizione 4.4.17 (iperfinitezza)**.** *Una vN-algebra $\mathcal{A}$ è detta* iperfinita *quando è la chiusura ultradebole (equivalentemente, il bicommutatore) dell'unione di una successione crescente di algebre di dimensione finita.*

Il teorema decisivo, la cui dimostrazione è omessa, è il seguente:

Teorema 4.4.16. *Ogni fattore finito e iperfinito è isomorfo a* $\mathbf{II}_1$.

Il fattore di tipo $\mathbf{II}_1$ viene comunemente chiamato, per via di questo risultato, *il* fattore iperfinito. Si noti che l'iperfinitezza è di per sè indipendente dalla finitezza, dal momento che le algebre di tipo $\mathbf{II}_\infty$ e $\mathbf{III}$ sono infinite e iperfinite. Il risultato che ci interessa è allora il seguente.

Proposizione 4.4.17. *Sia G un gruppo discreto. Se G è* localmente finito*, ossia ogni insieme finito $G' \subset_f G$ genera un sottogruppo finito di G, allora $\mathcal{A}[G]$ è iperfinita.*

Dimostrazione. Se $H \leq G$, allora $\mathcal{A}[H] \leq \mathcal{A}[G]$, e dunque, se $G =\uparrow \bigcup_{H \subset_f G} \overline{H}$, dove $\overline{H}$ indica la chiusura di H, si ha che $\mathcal{A}[G] =\uparrow \bigcup_{H \subset_f G} \mathcal{A}[H]$. D'altra parte, se $u \in \mathcal{A}[G]$, allora u è limite ultradebole delle sue restrizioni u_H, date da $u_H(g) = u_g(g \in H), u_H(g) = 0(g \notin H)$.

□

Corollario immediato delle 4.4.15 e 4.4.17 è che se G è un gruppo discreto c.c.i. e localmente finito, allora $\mathcal{A}[G] \simeq \mathcal{H}$. D'altra parte, servendoci di un ulteriore risultato (la cui dimostrazione è omessa) e cioè che

Proposizione 4.4.18. *Se $\mathcal{A}$ è un fattore, G un gruppo discreto, α una rappresentazione automorfica di G su $\mathcal{A}$ tale che, per $g \neq 1_G$, gli α_g non siano interni, allora $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ è un fattore.*

arriviamo al seguente teorema, che costituisce la conclusione di queste dense pagine algebriche:

Teorema 4.4.19. *Se $\mathcal{A} \simeq \mathcal{H}$, G è un gruppo discreto c.c.i. e localmente finito, α una rappresentazione automorfica di G su $\mathcal{A}$ tale che, per $g \neq 1_G$, gli α_g non siano interni, allora $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G \simeq \mathcal{H}$.*

I gruppi c.c.i. localmente finiti sono dunque quelli che davvero $\mathcal{H}$ riesce a “inghiottire” al suo interno. Come vedremo più avanti, che la costruzione $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$, a queste condizioni, costituisca una buona soluzione è confermato anche dalla stabilità del monoide epidittico rispetto ad essa.

E' facile del resto convincersi che il gruppo $\mathfrak{G}$ menzionato sopra è localmente finito: dato un sottoinsieme finito $G' = \{g_1, \ldots, g_k\} \subset_f \mathfrak{G}$, esisterà un $N \in \mathbb{N}$ tale che $G' \subset \mathfrak{G}[1, \ldots, N]$, e dunque $\sharp G' \leq !N$. D'altra parte, il ricorso a tali gruppi esclude definitivamente la possibilità di rappresentare la τ di §4.1, ovvero quell'isometria che permetteva di passare da $(I \otimes (I \otimes u))$ a $(I \otimes I) \otimes u$: abbiamo così una refutazione geometrico-algebrica del principio $!A \vdash !!A$ e più in generale della regola esponenziale

$$\frac{\vdash ?\Gamma, A}{\vdash ?\Gamma, !A}\ (!) \tag{4.4.18}$$

In §4.1 avevamo del resto osservato come, in assenza di questo principio, ammesso che si riesca a rappresentare la regola esponenziale "leggera"

$$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash ?\Gamma, !A}\ (!) \tag{4.4.19}$$

è possibile calcolare un limite superiore per il coefficiente di nilpotenza, che risulta essere iperesponenziale nel numero massimo di applicazioni a ogni profondità; si ricordi che, come abbiamo notato in §2.1.4, l'aspetto principale è che, in assenza della regola (!), la profondità risulta essere un invariante della dinamica dell'eliminazione del taglio. Questa profondità corrisponde, nella GdI, al numero di volte in cui si ricorre, nella versione "hilbertiana" in §4.1, all'isometria θ, e nel caso presente, non commutativo, agli automorfismi esterni "inghiottiti" dall'algebra $\mathcal{H}$.

In definitiva, l'iperfinitezza corrisponde a una forma più elaborata di finitezza, o meglio, seguendo Girard (vd. (Girard, [37])), a una *finitezza qualitativa*, associata alla possibilità finita di "suddividere" lo spazio durante la computazione, moltiplicando il numero dei loci:

> Au lieu de raetisser les chambres, on les a peintes de ≪couleurs≫différentes, puis combiné la chambre i (coloriée en ≪' ≫) avec la chambre j (coloriée en ≪" ≫). C'est une variante *qualitative* de l'hôtel de Hilbert, qui repose sur la possibilité de créer de nouvelles couleurs *ad libitum*, et qui correspond, pur l'essentiel, à la *contraction.* (Girard, [37])

Una finitezza del prodotto tensoriale $\otimes$, di contro alla finitezza *quantitativa*, già discussa, ovvero quella della somma diretta $\oplus$.

Finito, infinito, iperfinito Il linguaggio, stando alle definizioni standard (ad esempio quella in §A), è un insieme infinito di formule, costruito con un insieme infinito di variabili. Sulla base di quanto visto in §2.1.4,§2.2.1,§4.1 e in questo stesso paragrafo, d'altra parte, dietro queste infinite formule e queste infinite variabili si celano delle strategie morfologiche dalla cui struttura dipende in fondo la possibilità stessa e il senso secondo il quale chiamiamo il linguaggio infinito. Un linguaggio che ammette le delocalizzazioni φ, ψ che duplicano lo spazio è in un certo senso "più infinito" di uno che non ce l'ha, così come un linguaggio che ammette la θ discussa sopra è "più infinito" di uno che non ce l'ha. Ai diversi sistemi logici LL, ELL, LLL dovremmo forse assegnare diverse "taglie" di infinito?

Scrive Chomsky:

> Il linguaggio umano è basato su una proprietà elementare che sembra a sua volta isolata dal punto di vista biologico: la proprietà dell'infinità discreta, che appare nei bambini nella sua forma più pura nei numeri naturali 1,2,3,... (Chomsky, [10])

Esisterebbe dunque una unica proprietà, l'infinità discreta, che accomuna tutti i casi in cui, per capirci, mettiamo dei puntini di sospensione. Questa proprietà, stando a Chomsky, è responsabile della competenza ricorsiva di cui le sintassi logiche sono un chiaro esempio. Eppure, tornando ai nostri sistemi logici "leggeri", abbiamo osservato in §2.1.4 come la capacità ricorsiva associata a ognuno di questi fosse in un certo senso peculiare, inafferrabile con il solo ricorso alla "ricorsione categoriale", ovvero agli NNO.

Consideriamo la struttura delle definizioni per ricorsione primitiva, la costruzione fondamentale dell'infinità discreta:

$$\begin{aligned} f(0, x_1, \ldots, x_n) &= g(x_1, \ldots, x_n) \\ f(n+1, x_1, \ldots, x_n) &= h(n, f(n), x_1, \ldots, x_k) \end{aligned} \tag{4.4.20}$$

Possiamo così descrivere i limiti delle logiche "leggere" rispetto a questa costruzione:

(infinito LLL) Corrisponde a quella che in teoria della complessità è nota come "ricorsione predicativa": l'idea è che l'esecuzione della funzione $h(n, f(n), x_1, \ldots, x_k)$ non deve applicare contrazioni all'argomento $f(n)$. Questa richiesta corrisponde direttamente alla rigida stratificazione indotta dalla regola

$$\frac{\vdash A, B}{\vdash ?A, !B}\ (!_{\ell\ell\ell}) \tag{4.4.21}$$

e permette di rappresentare tutte e sole le funzioni di complessità polinomiale (vd. teorema 2.1.8 a pag. 124).

(infinito ELL) La versione liberalizzata

$$\frac{\vdash \Gamma, B}{\vdash ?\Gamma, !B}\ (!_{e\ell\ell}) \tag{4.4.22}$$

rispetta la stratificazione, ma ammette che esista una quantità costante k, funzione della h, che limita il numero di contrazioni annidate applicabili "a una stessa profondità" (vd. teoremi 2.1.8 e 2.1.9 in §2.1.4), ovvero applicabili, nell'esecuzione di $h(n, f(n), x_1, \ldots, x_k)$, all'argomento $f(n)$: è proprio il caso, ad esempio, della definizione ricorsiva dell'esponenziale (in cui la costante k è uguale a 2):

$$\begin{aligned} 2^0 &= 1 \\ 2^{n+1} &= 2^n \cdot 2 (= 2^n + 2^n) \end{aligned} \tag{4.4.23}$$

Questa richiesta permette di rappresentare tutte e sole le funzioni di complessità elementare (vd. teorema 2.1.9 a pag. 125). E' facile del resto notare come già la definizione della funzione iperesponenziale:

$$\begin{aligned} 2_0 &= 1 \\ 2_{n+1} &= 2^{2_n} \end{aligned} \tag{4.4.24}$$

non rispetti i requisiti degli infiniti leggeri, dal momento che il numero di contrazioni eseguite alla profondità $n+1$ non è costante, ma è funzione di 2_n.

(infinito NL) Nel prossimo paragrafo avremo a che fare con un infinito ancora più sorprendente, in quanto non esprimibile direttamente in termini ricorsivi: l'idea dell'infinito NL è quella secondo cui l'applicazione di una funzione al suo argomento determina uno spazio di interazione la cui dimensione è costante nel corso del calcolo. Le potenzialità di questo infinito dipendono da una questione aperta in teoria della complessità, ovvero se

$$NL = P \tag{4.4.25}$$

(è noto del resto che $NL \subseteq P$).

In questo capitolo ci stiamo rendendo conto di come la descrizione di queste sottili differenze dovrebbe essere condotta, piuttosto che col riferimento a questa o a quell'altra regola, o a questa o quell'altra limitazione alla ricorsione primitiva, attraverso l'analisi morfologica dell'algebra delle delocalizzazioni richiesta da ognuna delle classi di infinito, in accordo con la scommessa locativa 2.2.12 a pag. 136. In definitiva, secondo questa prospettiva, parlare dell'infinità discreta come di una proprietà elementare risulta pregiudiziale per una seria analisi matematica (e morfologica allo stesso tempo) delle complesse dinamiche sottese all'apparente "monismo dei puntini di sospensione".

Del resto, tra le conclusioni principali di questo e del precedente paragrafo, c'è che una descrizione adeguata dei loci, ovvero dei supporti per i segni linguistici considerati indipendentemente dal loro essere supporti, debba presupporre che l'algebra che li descrive sia finita e iperfinita (per rilevanti questioni matematiche). Non si deve, a questo punto, pensare che la GdI iperfinita, supponendo queste sofisticate forme di finitezza costitutiva dei suoi artefatti, si impegni nella tesi finitista secondo cui l'infinito in fondo non esiste (in qualche senso di "esiste"): in effetti, come osserva Girard, una delle conseguenze dell'incompletezza è proprio l'impossibilità di porre un confine netto tra finito e infinito:

> Ce défaut rédhibitoire est au coeur du théorème d'incomplétude: ≪le finitisme n'est pas fini ≫. Il n'y a aucune ligne de demarcation fini/infini qui séparerait des méthodes ≪finitistes ≫, ≪prédicativistes ≫, etc. de celles qui ne le sont pas [...] (Girard, [37])

Quello di cui la GdI si fa partecipe è un finitismo che potremmo definire "contestuale" (in accordo col fatto che l'interazione in generale, nella GdI, è "contestuale"): è solo relativamente a uno specifico contesto di interazione che possiamo porre un limite finito al numero dei loci o al numero delle contrazioni ammesse (vd. infinito ELL), dal momento che il fattore di tipo $\mathbf{II}_1$ ammette, in generale, quantità arbitrariamente grandi di loci e permette di dividere lo spazio un numero arbitrariamente grande di volte. Da un punto di vista semiotico, mi sembra di poter aggiungere che da una parte, la finitezza dei supporti dei segni linguistici è un evidente presupposto di una rappresentazione di questi come indipendenti dalle dinamiche normative di cui si fanno portatori. Dall'altra, bisogna considerare l'impossibilità di porre un limite a priori al numero dei segni o al numero delle loro possibili suddivisioni, pena un regresso del tipo del classico argomento del "sorite" (un granello di sabbia non fa un mucchio, se n granelli non fanno un mucchio, di certo $n + 1$ granelli non migliorano la situazione, ma allora come è possibile che ci siano mucchi?).

La soluzione, matematicamente elegante, che consiste nella distinzione tra automorfismi interni ed esterni, pone delle originali questioni di interesse filosofico: se le contrazioni, vale a dire, sostanzialmente, gli infiniti, corrispondono a forme di "internalizzazione" (prodotti incrociati) di automorfismi esterni, e se questi ultimi sono i soli a rendere conto dell'aspetto genuinamente infinito dell'algebra, come deve essere interpretata la natura ancora finita e iperfinita del risultato di questo procedimento? In particolare, cosa significa, concretamente, che le sintassi sono generate da gruppi localmente finiti?

> Le sujet dispose de certaines éléments du groupe, dont il pourra faire ce qui'il veut, à la manière d'un jeu de construction, essentiellement des combinaisons linéaires et des produit, i.e. des *convolutions*. Mais il ne pourra jamais construire un élément qui ne fasse pas partie du sous-groupe *fini* ainsi engendré: c'est la finitude interne du langage. (Girard, [37])

Questa finitezza interna, tanto quantitativa quanto qualitativa, del linguaggio, di contro alla natura in infiniti modi infinita dei contenuti espressi linguisticamente, costituisce uno degli interrogativi attraverso i quali la *GdI* si oppone alla posizione "trasparentista" (vd. §1.1.1), ovvero alla identificazione dell'implicito, dei "puntini", con l'esplicito, vale a dire con la totalità pienamente coesistente di ciò cui i puntini fanno riferimento.

> Dire che esiste un'infinità di casi possibili non significa che c'è un numero tanto grande di casi che non riusciamo a farli stare tutti negli archivi. (Wittgenstein, [74])

Mi sembra di poter affermare che la questione del rapporto tra finitezza interna e infinità esterna, che è un po' la questione, detta in maniera un po' vaga, del rapporto tra sintassi e semantica, ci riconduce al problema dell'"*illusion* of entertaining and expressing meaning" (McDowell, [54]), vd. §2.1.3, ossia alla questione filosofica, rispetto alla quale la presente tesi non ha, ovviamente, alcuna pretesa di giungere a conclusioni che possano essere considerate conclusive, di coniugare un'essenza che si vorrebbe "oggettiva", ideale e indipendente da ogni contesto con le sue, irrimediabilmente contestuali, spazio-temporalmente situate, e quindi "soggettive", apparizioni concrete.

Nel prossimo paragrafo mostreremo l'applicazione della *GdI* idiomatica e iperfinita al caso dell'aritmetica. Quella che vedremo non è che una delle possibili applicazioni della teoria: altre, riguardanti la ricostruzione della logica additiva e di quella esponenziale (nelle versioni leggere di *ELL* e *LLL*, come accennato sopra), possono essere trovate in (Girard, [40]), e non saranno qui presentate per non eccedere in quella risorsa che si sta rivelando essenziale, ovvero lo spazio.

4.5 L'aritmetica non commutativa

Abbiamo finalmente gli strumenti per elaborare un esempio difficilmente catalogabile nel panorama essenzialista: costruiremo esplicitamente delle *rappresentazioni* reciprocamente isomorfe dei numeri naturali, replicando gli *interi Curry-Howard* (vd. §2.1.2) nel contesto non commutativo della GdI, le quali tuttavia, *a seconda del contesto* in cui sono valutate, potranno dare risultati completamente diversi.

> nella GdI, the various N_n are the same ≪up to renaming ≫, i.e. up to isomorphy: what will eventually be recognised as a variable, i.e. excluded from the interaction, depends upon the possible interactions, i.e. upon the context. In this way, GdI proposes a sort of ≪not-yet-frozen syntax ≫. (Girard, [43])

D'altra parte, come vedremo, lo studio dei coefficienti di nilpotenza permetterà di dotare le varie forme di "riconoscimento delle variabili" di un preciso contenuto in termini di complessità computazionale: la questione del rapporto tra essenza, uso e risorse spazio-temporali viene condotta quindi a una possibile risposta la quale, come già era stato il caso con il teorema di sequenzializzazione che, si ricordi, costituisce il perno attorno al quale si snoda tutta la GdI, rende inseparabili le condizioni normative del senso da quelle della manipolabilità sintattica e, dunque, computazionale.

Numeri e permutazioni Torniamo per un momento alla rappresentazione "alla Curry-Howard" dei numeri naturali:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{X \vdash X} \quad \dots \quad \dfrac{}{X \vdash X}}{X \to X, \dots, X \to X, X \vdash X}\ (\to L)}{X \to X, X \vdash X}\ (C)}{(X \to X) \vdash X \to X}\ (\to R)}{\vdash (X \to X) \to (X \to X)}\ (\to R)}{\vdash \mathbb{N}_{\mathrm{ch}}}\ (\forall R) \tag{2.1.32}$$

Dimenticando per un momento le contrazioni operate, possiamo rappresentare in MLL il numero n attraverso una derivazione del sequente $\underbrace{X \multimap X, \dots, X \multimap X}_{n \text{ volte}}, \vdash X \multimap X$, ovvero di $\vdash \underbrace{X^\perp \otimes X, \dots, X^\perp \otimes X}_{n \text{ volte}}, X \multimap X$. Ad esempio, nel caso del numero 2, abbiamo la seguente derivazione π_2 (in cui abbiamo evidenziato i loci delle occorrenze di X):

$$\pi_2 : \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash X_1^\perp, X_6}\ (Ax) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\vdash X_3^\perp, X_2}\ (Ax) \quad \dfrac{}{\vdash X_5^\perp, X_4}\ (Ax)}{\vdash X_2, X_3^\perp \otimes X_4, X_5^\perp}\ (\otimes)}{\vdash X_1^\perp \otimes X_2, X_3^\perp \otimes X_4, X_5^\perp, X_6}\ (\otimes)}{\vdash X_1^\perp \otimes X_2, X_3^\perp \otimes X_4, X_5 \multimap X_6}\ (\multimap) \tag{4.5.1}$$

che corrisponde, nella GdI matriciale, alla seguente matrice di permutazione $\underline{\pi_2} \in \mathcal{M}_6(\mathbb{C})$:

$$\underline{\pi_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.5.2}$$

Tuttavia, nella versione "contratta" tanto di π_2 quanto di ogni altra π_n, la cui conclusione è $\vdash ?(X^\perp \otimes X), !(X \multimap X)$, occorrono esattamente 4 loci: dobbiamo trovare cioè un modo di far rientrare tutte le π_n in $\mathcal{M}_4(\mathcal{A})$, per un'opportuna algebra $\mathcal{A}$. Per far ciò associamo a ognuna delle quattro occorrenze di X in $\vdash ?(X_1^\perp \otimes X_2), !(X_3 \multimap X_4)$ un "significato dinamico" come segue:

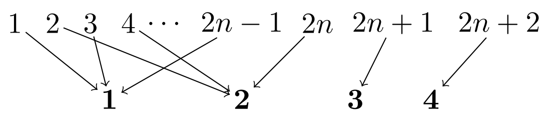
1 *origine nascosta*

2 *obiettivo nascosto*

3 *origine visibile*

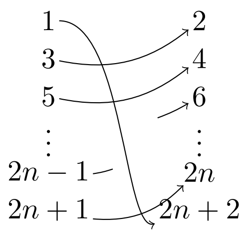
4 *obiettivo visibile*

Nel caso di π_2, una contrazione "manda" in **1** le occorrenze 1,3, e "manda" in **2** le occorrenza 2,4, lasciando invece invariata la posizione delle occorrenze 5,6. Più in generale, n contrazioni in π_n, che ha esattamente $2n+2$ occorrenze di formule, invieranno in **1** le occorrenze dispari $1, \dots, 2n-1$, in **2** le occorrenze pari $2, \dots, 2n$ e, rispettivamente, in **3** e in **4** le ultime due occorrenze $2n+1, 2n+2$: abbiamo cioè la seguente situazione:



(4.5.3)

Possiamo a questo facilmente vedere che $\underline{\pi_2}$ (e in generale $\underline{\pi_n} \in \mathcal{M}_{2n+2}(\mathbb{C})$) può essere descritta come l'insieme delle "frecce" di tipo *origine* $\mapsto$ *obiettivo* o, equivalentemente, *dispari* $\mapsto$ *pari*, del seguente tipo:



(4.5.4)

E' chiaro allora, in virtù del teorema 3.3.7 di sequenzializzazione (pag. 197), che le matrici polari alle $\underline{\pi_n}$ dovranno essere del tipo *pari* $\mapsto$ *pari*, *dispari* $\mapsto$ *dispari* con in più una "freccia" del tipo *pari* $\mapsto$ *dispari*, ovvero la $2 \mapsto 1$. In definitiva, le $\underline{\pi_n}$ rappresentano un cammino incompleto, frammentario, che viene realizzato solo attraverso l'interazione con una matrice polare.

Proviamo adesso a realizzare concretamente l'associazione 4.5.3 come segue: trasformiamo anzitutto $\underline{\pi_n} \in \mathcal{M}_{2n+2}(\mathbb{C})$ nella matrice "gonfiata" $M_n \in \mathcal{M}_{4n+4}(\mathbb{C})$ nella quale le posizioni $0, \dots, n+1$ corrispondono alle posizioni di $\underline{\pi_n}$ "mandate" in **1**, le posizioni $n+2, \dots, 2(n+1)$ a quelle "mandate" in **2**, le posizioni $2n+2, \dots, 3(n+1)$ a quelle "mandate" in **3** e le posizioni $3n+3, \dots, 4(n+1)$ a quelle "mandate" in

4. Possiamo cioè indiciare le posizioni, i loci, cui si applica M_n attraverso coppie $(i, j) \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\} \times \{0, \ldots, n\}$, e stabilire la seguente associazione:

$$\begin{aligned}
&1, 3, \ldots, 2n-1 \mapsto (\mathbf{1}, 0), (\mathbf{1}, 1), \ldots, (\mathbf{1}, n-1)\\
&2, 4, \ldots, 2n \mapsto (\mathbf{2}, 0), (\mathbf{2}, 1), \ldots, (\mathbf{2}, n-1)\\
&2n+1 \mapsto (\mathbf{3}, n)\\
&2n+2 \mapsto (\mathbf{4}, n)
\end{aligned} \tag{4.5.5}$$

Nel caso di $\underline{\pi}_2$ otteniamo allora la seguente $M_2 \in \mathcal{M}_{12}(\mathbb{C})$:

$$M_2 = \begin{pmatrix}
0 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & 0 \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & 0 & 0 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & 0 & 0
\end{pmatrix} \tag{4.5.6}$$

che è della forma

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & v_2 & u_2 & 0 \\ v_2^* & 0 & 0 & w_2^* \\ u_2^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.5.7}$$

con $u_2, v_2, w_2 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ isometrie parziali. Siano ora $\pi_0, \pi_1, \pi_2 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ le tre proiezioni che rappresentano la base canonica di $\mathbb{C}^3$; possiamo facilmente verificare che

$$\begin{aligned} u_2^* u_2 &= \pi_0 \\ v_2^* v_2 &= \pi_1 \\ w_2^* w_2 &= \pi_2 \end{aligned} \tag{4.5.8}$$

$$\begin{aligned} u_2 u_2^* &= \pi_1 \\ v_2 v_2^* &= \pi_2 \\ w_2 w_2^* &= \pi_0 \end{aligned} \tag{4.5.9}$$

In altre parole le isometrie parziali u_2, v_2, w_2 rappresentano il cammino $\pi_0 \overset{u_2}{\mapsto} \pi_1 \overset{v_2}{\mapsto} \pi_2 \overset{w_2}{\mapsto} \pi_0$. Il procedimento può essere generalizzato, mostrando che ogni $\underline{\pi}_n$ "gonfiato" in un $M_n \in \mathcal{M}_{4n+4}(\mathbb{C})$ è della forma

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & v_n & u_n & 0 \\ v_n^* & 0 & 0 & w_n^* \\ u_n^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_n & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.5.10}$$

con le $u_n, v_n, w_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ che soddisfano, date le proiezioni canoniche $\pi_0, \ldots, \pi_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} u_n^* u_n &= \pi_0 \\ v_n^* \pi_{i+1} &= \pi_i \\ w_n^* w_n &= \pi_n \end{aligned} \qquad (4.5.11) \qquad \begin{aligned} u_n u_n^* &= \pi_1 \\ v_n \pi_i &= \pi_{i+1} \\ w_n w_n^* &= \pi_0,\ 0 \le i < n \end{aligned} \qquad (4.5.12)$$

e dunque istituiscono un cammino $\pi_0 \overset{u_n}{\mapsto} \pi_1 \overset{v_n}{\mapsto} \pi_2 \overset{v_n}{\mapsto} \cdots \overset{v_n}{\mapsto} \pi_{n-1} \overset{v_n}{\mapsto} \pi_n \overset{w_n}{\mapsto} \pi_0$. In definitiva abbiamo $M_n \in \mathcal{M}_4(\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C}))$: data quindi una famiglia $(\varphi_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ di immersioni $\varphi_{n+1} : \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C}) \to \mathcal{H}$, definendo le isometrie parziali $a_n := \varphi_{n+1}(u_n), b_n = \varphi_{n+1}(v_n), c_n = \varphi_{n+1}(w_n)$, possiamo rappresentare ogni numero naturale con il seguente operatore $N_n \in \mathcal{M}_4(\mathcal{H})$:

$$N_n = \begin{pmatrix} 0 & b_n & a_n & 0 \\ b_n^* & 0 & 0 & c_n^* \\ a_n^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_n & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (4.5.13)$$

in cui, data la scomposizione dell'identità di $\mathcal{H}$ come $I = \pi_{n.0} \oplus \pi_{n.1} \oplus \cdots \oplus \pi_{n.n}$, le a_n, b_n, c_n soddisfano

$$\begin{aligned} a_n^* a_n &= \pi_{n.0} \\ b_n^* \pi_{n.i+1} &= \pi_{n.i} \\ c_n^* c_n &= \pi_{n.n} \end{aligned} \qquad (4.5.14) \qquad \begin{aligned} a_n a_n^* &= \pi_{n.1} \\ b_n \pi_{n.i} &= \pi_{n.i+1} \\ c_n c_n^* &= \pi_{n.0},\ 0 \le i < n \end{aligned} \qquad (4.5.15)$$

Isomorfismi e interferenza: le osservazioni Si noti che la rappresentazione N_n dipende dal morfismo φ_{n+1} e che, dunque, al variare di questo, possiamo ottenere una quantità non numerabile di rappresentazioni *isomorfe* dello stesso numero naturale in $\mathcal{M}_4(\mathcal{H})$. D'altra parte, la cifra di tale isomorfismo è data dall'invarianza del risultato al variare dei morfismi φ_{n+1} adottati: l'essenzialista, cioè, considererà tali morfismi le *variabili vincolate* della rappresentazione N_n. Ma possiamo esser certi che, al di là dell'essenzialista, più concretamente, anche gli operatori di $\mathcal{M}_4(\mathcal{H}) \simeq \mathcal{H}$ riconosceranno tali variabili come vincolate?

Gli operatori da contrapporre agli N_n dovranno consistere sostanzialmente in una rappresentazione di una (para)-derivazione di $\vdash !(X_2 \multimap X_1) \otimes ?(X_3 \otimes X_4^\perp)$ e dunque saranno della forma

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & v & 0 & 0 \\ v^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w \end{pmatrix} \qquad (4.5.16)$$

per opportune isometrie parziali $u, v, w \in \mathcal{H}$. In effetti, nel caso matriciale di M_2, se consideriamo la matrice:

$$F_2 = \begin{pmatrix} 0 & I_3 & 0 & 0 \\ I_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \qquad (4.5.17)$$

la matrice FM_2 che rappresenta l'interazione è la seguente:

$$FM_2 = \begin{pmatrix} v^* & 0 & 0 & w^* \\ 0 & v & u & 0 \\ u^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & 0 & 0 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & 0 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.5.18}$$

la quale rappresenta a sua volta il ciclo di lunghezza 6 $(\mathbf{1}, 0) \mapsto (\mathbf{3}, 3) \mapsto (\mathbf{2}, 0) \mapsto (\mathbf{2}, 1) \mapsto (\mathbf{4}, 3) \mapsto (\mathbf{1}, 1) \mapsto (\mathbf{1}, 0)$ ovvero, modulo l'associazione 4.5.5, il ciclo $1 \mapsto 5 \mapsto 2 \mapsto 4 \mapsto 6 \mapsto 3 \mapsto 1$, vale a dire un giro lungo in $\mathcal{M}_6(\mathbb{C})$ (ma si ricordi che siamo nella versione "gonfiata" in $\mathcal{M}_{12}(\mathbb{C})$). Più in generale vale il seguente teorema:

Teorema 4.5.1 (interazione essenzialista)**.** *Se le isometrie parziali $u, v, w \in \mathcal{H}$ commutano con le a_n, b_n, c_n che occorrono in N_n, allora il risultato dell'interazione tra Φ e N_n è indipendente da queste ultime, ovvero si ha (supponendo $\varrho(\Phi N_n) < 1$)*

$$let(I - \Phi N_n) = let(I - v^n w v^{*n} u)/2n + 2 \tag{4.5.19}$$

Dimostrazione. Da quanto abbiamo osservato sopra segue che, se p non è un multiplo di $2n + 2$, $tr(\Phi N_n)^p = 0$, da cui segue

$$let(I - \Phi N_n) = \sum_{k>0}^{\infty} \frac{tr((\Phi N_n)^{k(2n+2)})}{k(2n+2)} \tag{4.5.20}$$

Si può allora verificare che si ha

$$(\Phi N_n)^{k(2n+2)} = \begin{pmatrix} A_{n.k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{n.k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{n.k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{n.k} \end{pmatrix} \tag{4.5.21}$$

con

$$\begin{aligned} A_{n.k} &= \pi_{n.1} v^{*n-1} u (v^n w v^{*n} u)^{k-1} v^n w v^* + \cdots + \pi_{n.n-1} v^* u (v^n w v^{*n} u)^{k-1} v^n w v^{*n-1} \\ B_{n.k} &= \pi_{n.n} v^{n-1} w v^{*n} u (v^n w v^{*n} u)^{k-1} v + \cdots + \pi_{n.2} v w v^{*n} u (v^n w v^{*n} u)^{k-1} v^{n-1} \\ C_{n.k} &= \pi_{n.1} (v^n w v^{*n} u)^k \\ D_{n.k} &= \pi_{n.0} (v^{*n} u v^n w)^k \end{aligned} \tag{4.5.22}$$

da cui segue che

$$tr(C_{n.k}) = tr(D_{n.k}) = \frac{tr((v^n wv^{*n}u)^k)}{n+1} \tag{4.5.23}$$

e

$$tr(A_{n.k}) = tr(B_{n.k}) = n \cdot tr(C_{n.k}) \tag{4.5.24}$$

e dunque $tr((\Phi N_n)^{k(2n+2)} = \frac{tr(A_{n.k}+B_{n.k}+C_{n.k}+D_{n.k})}{4} = \frac{tr((v^n wv^{*n}u)^k)}{2}$, da cui la tesi.

□

Possiamo a questo punto dare una definizione rigorosa dei concetti in gioco, chiaramente ripresa dal vocabolario quantistico:

Definizione 4.5.1. *Sia $\mathcal{A} = \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ un'algebra di dimensione finita e siano $\mathcal{I}, \mathcal{O}$ sottoalgebre di $\mathcal{H}$. Una* rappresentazione di algebra *$\mathcal{I} \leq \mathcal{H}$ di un numero $n \in \mathbb{N}_n$ è un design del tipo $\mathfrak{N}_n = (0, tr, N_n)$ di idioma banale e a scommessa zero, indotto da un morfismo algebrico $\varphi_{n+1} : \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C}) \to \mathcal{I}$.*

*Un'*osservazione di algebra *$\mathcal{O} \leq \mathcal{H}$ è un design $\mathfrak{Oss} = (0, tr, \Phi)$ a scommessa zero e di idioma $\mathcal{A}$, con $\Phi \in \mathcal{M}_4(\mathcal{O}) \otimes \mathcal{M}_k(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{M}_4(\mathcal{M}_k(\mathcal{O}))$.*

L'interazione tra una rappresentazione di n ed un'osservazione è la misura *$\langle \mathfrak{Oss} | \mathfrak{N}_n \rangle$, da intendersi come infinita nel caso in cui $\varrho(\Phi N_n) \geq 1$.*

Queste definizioni ci permettono di riformulare il teorema 4.5.1 come segue:

Teorema 4.5.2 (oggettività della misura)**.** *Se le due sottoalgebre $\mathcal{O}, \mathcal{I} \leq \mathcal{H}$ commutano, nel senso che per ogni $u \in \mathcal{O}, v \in \mathcal{I}$ $uv = vu$, allora, dati una rappresentazione di algebra $\mathcal{I}$ di n $\mathfrak{N}_n$, un'osservazione di algebra $\mathcal{O}$ $\mathfrak{Oss}$ e un automorfismo $\theta \in Aut(\mathcal{I})$, vale la seguente:*

$$\langle \mathfrak{Oss} | \mathfrak{N}_n \rangle = \langle \mathfrak{Oss} | \theta(\mathfrak{N}_n) \rangle \tag{4.5.25}$$

Dove $\theta(\mathfrak{N}_n) = (0, tr, \theta(N_n))$ e $\theta(N_n)$ è l'operatore ottenuto applicando θ alle sue entate.

Una coppia di sottoalgebre che soddisfi l' *oggettività della misura* è chiamata in (Girard, [43]) *coppia normativa.* Ad esempio, un modo per ottenere una commutazione a priori è quello di mettere tutti gli ingressi di Φ nel suo idioma, il che porta alla coppia normativa $(\mathcal{H}, \mathbb{C} \cdot I)$ ed alla seguente definizione:

Definizione 4.5.2 (Numeri essenzialisti)**.** *Siano $f, a, b \in \mathcal{H}$ isometrie parziali di supporti rispettivamente, $\pi_1 + \pi_2, \pi_3, \pi_4$, dove queste ultime sono proiezioni disgiunte "canoniche" di $\mathcal{M}_4(\mathbb{H})$ tali che, per opportune isometrie parziali $u : \pi_3 \to \pi_1, v : \pi_4 \to \pi_2$ di $\mathcal{M}_4(\mathcal{H})$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, si abbia che $[f]^n(uau^*) = [f]([f](\ldots([f](uau^*))\ldots))$ e $let(I - ([f]^n(uau^*))(vbv^*))$ siano tutti definiti e reali. Considerando allora l'operatore $\Phi_{fab} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{H} \simeq \mathcal{M}_4(\mathcal{H})$ definito come*

$$\Phi_{fab} = \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{f}} & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix} \tag{4.5.26}$$

definiamo l'osservazione, di algebra $\mathbb{C}$ *e idioma* $\mathcal{H}$, $\mathfrak{Ev}_{fab} = (0, tr, \Phi_{fab})$ *e l'insieme* $\mathfrak{Ev}$ *di tali osservazioni, al variare di* f, a, b*. I* numeri essenzialisti[5] *sono definiti come gli elementi del comportamento* $\mathbf{nat} = \mathfrak{Ev}^{\perp\sim}$.

La natura essenzialista dei design in **nat** è data dal fatto che, in virtù del teorema 4.5.1, tale comportamento ospita tutte quante le rappresentazioni $\mathfrak{N}_n$. In effetti, dal punto di vista di $\mathfrak{Ev}$, le entrate di $\mathfrak{N}_n$ sono davvero vincolate nel senso di essere arbitrariamente sostituibili. Il punto debole di **nat** è che si tratta di un comportamento esclusivamente teorico, nel senso che sui suoi elementi non è possibile definire alcuna funzione: infatti gli elementi di $\mathfrak{Ev}$, ogni volta che incontrano un entrata a_n, b_n, c_n di N_n, "nascondono" le proprie "vere" entrate f, a, b nell'idioma, e applicano un operatore del tipo $z \cdot I$, $z \in \mathbb{C}$, come a dire: alzo le mani!

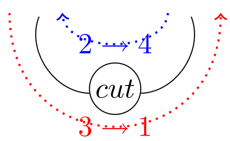
Questo paradosso, che sarà approfondito più avanti, richiama, a mio parere, le osservazioni fatte in §2.1.4 sul problema kantiano dello schematismo: abbiamo raggiunto una versione "pura" dei numeri, come una categoria dell'intelletto, talmente pura che non riusciamo a farci assolutamente niente! L'unico modo per agire concretamente sulle nostre rappresentazioni è dunque arrischiarsi nel mondo non commutativo delle sottoalgebre di $\mathcal{H}$, alla ricerca di forme stabili di interazione, che permettano di tenere a bada le interferenze e stabilire forme, contestualizzate, dell'oggettività della misura 4.5.25. La sfida è dunque quella di trovare coppie normative non banali.

Per comprendere meglio la questione, vediamo un esempio concreto: supponiamo di voler mettere in scena una moltiplicazione di due operatori N_n e N_m: nei termini degli interi Curry-Howard, questo significa introdurre un taglio tra le occorrenze $\mathbf{3}, \mathbf{4}$ di n_{ch} e le occorrenze $\mathbf{1}, \mathbf{2}$ di m_{ch}:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, n_{\text{ch}} \\ \vdash ?(X_1^\perp \otimes X_2), !(X_3 \multimap X_4)\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\, m_{\text{ch}} \\ \vdash ?(X_1^\perp \otimes X_2), !(X_3 \multimap X_4)\end{array}}{\vdash ?(X_1^\perp \otimes X_2), !(X_3 \multimap X_4)}\ cut \tag{4.5.27}$$

E' facile verificare che la procedura di eliminazione del taglio potrà essere svolta "moltiplicando" n_{ch} per m volte, in modo da aderire alle m occorrenze contratte di $?(X_1^\perp \otimes X_2)$ in m_{ch}, ottenendo alla fine una derivazione cut-free di $\vdash ?(X_1^\perp \otimes X_2), !(X_3 \multimap X_4)$ con esattamente nm occorrenze contratte di $?(X_1^\perp \otimes X_2)$, ovvero la derivazione $(nm)_{\text{ch}}$.

Nei termini di GdI, il taglio in 4.5.27 corrisponde a una simmetria che scambia gli indici $\mathbf{3}, \mathbf{4}$ di N_n con gli indici $\mathbf{1}, \mathbf{2}$ di N_m: si pensi infatti a come avviene l'attraversamento di un *cut*-link (vd. §3.3):



(4.5.28)

[5] Chiamati in (Girard, [43]) "entiers anomiques".

Consideriamo come esempio il caso della moltiplicazione di N_2 e N_3: a questi due operatori associamo rispettivamente i cammini (indotti dalle loro entrate)

$$\pi_0 \overset{u_2}{\mapsto} \pi_1 \overset{v_2}{\mapsto} \pi_2 \overset{w_2}{\mapsto} \pi_0 \tag{4.5.29}$$

e

$$\theta_0 \overset{u_3}{\mapsto} \theta_1 \overset{v_3}{\mapsto} \theta_2 \overset{v_3}{\mapsto} \theta_3 \overset{w_3}{\mapsto} \theta_0 \tag{4.5.30}$$

rispetto a due distinte scomposizioni dell'identità di $\mathcal{H}$ in proiezioni disgiunte $I = \pi_0 \oplus \pi_1 \oplus \pi_2 = \theta_0 \oplus \theta_1 \oplus \theta_2 \oplus \theta_3$. Per calcolare il risultato dell'interazione dobbiamo fare riferimento alle equazioni 3.5.15 a pag. 216, le quali ci danno l'operatore $N_2 \times N_3 \in \mathcal{M}_4(\mathcal{H})$ che, scomposto lungo le proiezioni associate a $\mathbf{1} \oplus \mathbf{2}$, $\mathbf{3} \oplus \mathbf{4}$, è del tipo $\left(\begin{smallmatrix} N_{11} & N_{21} \\ N_{21} & N_{22} \end{smallmatrix}\right)$ con le sue entrate date da:

$$\begin{aligned}
N_{11} &= \begin{pmatrix} 0 & v_2 \\ v_2^* & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_2 & 0 \\ 0 & w_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & v_3 \\ v_3^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2^* & 0 \\ 0 & w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & v_2 + u_2 v_3 w_2 \\ v_2^* + w_2^* v_3^* u_2^* & 0 \end{pmatrix} \\
N_{21} &= \begin{pmatrix} u_2 & 0 \\ 0 & w_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3 & 0 \\ 0 & w_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 u_3 & 0 \\ 0 & w_2^* w_3^* \end{pmatrix} \\
N_{12} &= \begin{pmatrix} u_3^* & 0 \\ 0 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2^* & 0 \\ 0 & w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_3^* u_2^* & 0 \\ 0 & w_3 w_2 \end{pmatrix} \\
N_{22} &= 0 + \begin{pmatrix} u_3^* & 0 \\ 0 & w_3 \end{pmatrix} \cdot 0 \cdot \begin{pmatrix} u_3 & 0 \\ 0 & w_3^* \end{pmatrix} = 0
\end{aligned} \tag{4.5.31}$$

e dunque $N_2 \times N_3$ è l'operatore:

$$N_2 \times N_3 = \begin{pmatrix} 0 & v_2 + u_2 v_3 w_2 & u_2 u_3 & 0 \\ v_2^* + w_2^* v_3^* u_2^* & 0 & 0 & w_2^* w_3^* \\ u_3^* u_2^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_3 w_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.5.32}$$

Il risultato che ci interessa è allora il seguente:

Proposizione 4.5.3. *Se $N_k \in \mathcal{M}_4(\mathcal{I})$ e $N_h \in \mathcal{M}_4(\mathcal{I}')$ e le due algebre $\mathcal{I}, \mathcal{I}'$ commutano, allora $N_k \times N_h = N_{h \times k}$.*

Dimostrazione. Ci limitiamo al caso di $N_2 \times N_3$: in virtù della proposizione 4.4.2 a pag. 262, la condizione che $\mathcal{I}$ e $\mathcal{I}'$ commutino è sufficiente per provare che le entrate di $N_2 \times N_3$ siano isometrie parziali. Infatti si ha che $(u_2 u_3 u_3^* u_2^*)^2 = u_2 u_3 u_3^* u_2^* u_2 u_3 u_3^* u_2^* = u_2 u_2^* u_3 u_3^*$ e dunque $u_2 u_3 : \pi_0 \theta_0 \to \pi_1 \theta_1$. Analogamente si ottiene $w_3 w_2 : \pi_2 \theta_3 \to \pi_0 \theta_0$. D'altra parte, si ha $v_2 u_2 v_3 w_2 = w_2^* v_3^* u_2^* v_2^* = 0$, in quanto $v_2 u_2 = u_2^* v_2^* = 0$ e dunque $(v_2 + u_2 v_3 w_2)(v_2 + u_2 v_3 w_2)^* = v_2 v_2^* + u_2 v_3 w_2 w_2^* v_3^*$ è somma di proiezioni disgiunte e quindi è una proiezione. Vediamo allora che l'isometria parziale $u_2 v_3 w_2$ manda $\pi_2 \theta_1 \to \pi_1 \theta_2$ e $\pi_2 \theta_2 \to \pi_1 \theta_2$ e la v_2 può essere ristretta all'isometria parziale $v_2(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$ (si tratta di una sorta di incarnazione - vd. §2.2.2), ottenendo infine il seguente cammino:

$$\pi_0 \theta_0 \overset{u_2 u_2}{\mapsto} \pi_1 \theta_1 \overset{v_2 \theta_1}{\mapsto} \pi_2 \theta_1 \overset{u_2 w_2 v_3}{\mapsto} \pi_1 \theta_2 \overset{v_2 \theta_2}{\mapsto} \pi_2 \theta_2 \overset{u_2 w_2 v_3}{\mapsto} \pi_1 \theta_3 \overset{v_2 \theta_3}{\mapsto} \pi_2 \theta_3 \overset{w_2 w_3}{\mapsto} \pi_0 \theta_0 \tag{4.5.33}$$

che attraversa esattamente $(3 \times 2) + 1$ proiezioni disgiunte. $\square$

Come si vede bene dalla dimostrazione di questa proposizione, la richiesta normativa di commutazione corrisponde a una richiesta di spazio: se il prodotto tra le isometrie parziali di N_2 e quelle di N_3 produce isometrie parziali, queste ultime allora avranno come domini e immagini i prodotti dei domini e delle immagini delle isometrie parziali da cui provengono, producendo così una suddivisione dello spazio entro cui l'interazione può svolgersi senza interferenze, con una conseguente moltiplicazione dei loci disponibili. In definitiva, la ricerca delle coppie normative non è altro che uno studio delle condizioni alle quali è possibile produrre nuovo spazio e, come vedremo attraverso il prossimo fondamentale esempio, la dimensione dello spazio prodotto, la cifra della specifica normatività espressa dalla coppia, è limitata dal coefficiente di nilpotenza dell'interazione.

Gli interi NL Concludiamo la trattazione dell'aritmetica non commutativa con il fondamentale esempio degli *interi* NL, che costituisce il primo caso non banale di coppia normativa elaborato da Girard (vd. (Girard, [43])).

Consideriamo il prodotto tensoriale di ω copie di $\mathcal{H}$, ossia $\mathcal{K} = \bigotimes_{n>0} \mathcal{H}_n \simeq \mathcal{H}$ ed il gruppo $\mathfrak{G}$ menzionato in §4.4 delle permutazioni su $\mathbb{N}$ che spostano al più un numero finito di numeri. Sia $\mathcal{H}_i$ la sottoalgebra di $\mathcal{K}$ degli operatori del tipo $I \otimes I \otimes \cdots \otimes u \otimes I \otimes \ldots$, ovvero degli $\bigotimes u_n$, con $u_n = I$, per $n \neq i$; allora una rappresentazione automorfica di $\mathfrak{G}$ su $\mathcal{K}$ è data, per $\sigma \in \mathfrak{G}$, da $\sigma(\bigotimes u_n) = \bigotimes u_{\sigma(n)}$. Essendo $\mathfrak{G}$ localmente finito e c.c.i., in virtù del teorema 4.4.19 (pag. 271), il prodotto incrociato $\mathcal{K} \rtimes \mathfrak{G}$, che internalizza l'azione di $\mathfrak{G}$, è ancora isomorfo a $\mathcal{H}$. In particolare, a ogni $\sigma \in \mathfrak{G}$ è associato l'automorfismo interno di $\mathcal{K} \rtimes \mathfrak{G}$

$$\sigma \cdot \bigotimes u_n = (\bigotimes u_{\sigma(n)}) \cdot \sigma \tag{4.5.34}$$

Chiameremo $\mathcal{S}$ la sottoalgebra generata dai $\sigma \in \mathfrak{G}$.

La densità ultradebole dei prodotti tensoriali infiniti dell'algebra finito dimensionale $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, che è una conseguenza della densità ultradebole del limite diretto $\varinjlim_n \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ in $\mathcal{H}$, permette di costruire un monoide epidittico $\mathcal{E}_{\mathcal{K}} := \varinjlim_n \mathcal{P}_n$ per $\mathcal{K}$, dove i $\mathcal{P}_n$ sono i monoidi epidittici definiti in 4.4.7 (pag. 264). Possiamo a questo punto definire i monoidi epidittici di cui ci serviremo in seguito:

Proposizione 4.5.4. *Sia* $\mathbf{Perm}_n^{e_i} \subset \mathcal{M}_n(\{0,1\})$ *il gruppo delle matrici di permutazione (parziali) di dimensione* n. *I seguenti insiemi definiscono dei monoidi epidittici, rispettivamente, di* $\mathcal{K} \rtimes \mathfrak{G}, \mathcal{M}_n(\mathcal{K} \rtimes \mathfrak{G}), \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{M}_m(\mathcal{K} \rtimes \mathfrak{G})$*:*

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &:= \{\sigma u | \sigma \in \mathfrak{G}, u \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}\} \\ \mathcal{F}_n &:= \mathbf{Perm}_n^{e_i} \otimes \mathcal{F} \\ \mathcal{G}_{n,m} &:= \mathbf{Perm}_n^{e_i} \otimes \mathcal{F}_m \end{aligned} \tag{4.5.35}$$

Dimostrazione. Che $\mathcal{F}$ sia un monoide epidittico segue dal fatto che le σu sono isometrie parziali (in effetti $(\sigma \cdot)^* = (\sigma^{-1} \cdot)$ definisce una isometria di $\mathcal{K}$) e che $(\sigma_1 \cdot \bigotimes_n u_n)(\sigma_2 \cdot \bigotimes_n v_n) = \bigotimes_n u_{\sigma_1(n)} \bigotimes_n v_{\sigma_1 \sigma_2(n)}$ è ancora una isometria parziale. Che $\mathcal{F}_n$ e $\mathcal{G}_{n,m}$ siano monoidi epidittici segue allora dalla proposizione 4.4.8 a pag. 264. □

Il risultato che ci interessa è il seguente:

Teorema 4.5.5. $(\mathcal{H}_1, \mathcal{S})$ *è una coppia normativa.*

Dimostrazione. Proviamo anzitutto che ogni $\theta_1 \in Aut(\mathcal{H}_1)$ si estende in modo unico in un automorfismo $\theta \in Aut(\mathcal{H})$ che è l'identità su $\mathcal{S}$: se infatti $\theta_1(u \otimes I \otimes \dots) = \vartheta(u) \otimes I \otimes \dots$, definiamo $\theta(\sigma \cdot \bigotimes_n u_n) := \sigma \cdot \bigotimes_n \vartheta(u_n)$.

Siano adesso $N_n, N'_n \in \mathcal{M}_4(\mathcal{H}_1)$, con $N'_n = \mathcal{M}_4(\theta_1)(N_n) = \mathcal{M}_4(\theta)(N_n)$, per un qualche $\theta_1 \in Aut(\mathcal{H}_1)$. Allora, per ogni $\Phi \in \mathcal{M}_4(\mathcal{S}) \otimes \mathcal{M}_k(\mathbb{C}), k \in \mathbb{N}$, si ha

$$\begin{aligned} let(I - \Phi \cdot (\mathcal{M}_4(\theta_1)(N_n) \otimes I_k)) &= let(I - \mathcal{M}_{4k}(\theta)(\Phi \cdot (N_n \otimes I_k))) \\ &= let(I - \Phi \cdot (N_n \otimes I_k)) \end{aligned} \tag{4.5.36}$$

sfruttando l'invarianza di *let* rispetto all'isomorfismo $\mathcal{M}_{4k}(\theta)\cdot$. □

Quello che segue, invece, è un teorema che caratterizza lo spazio (e quindi, a posteriori, anche il tempo), che la coppia normativa $(\mathcal{H}_1, \mathcal{S})$ mette a disposizione per portare a termine interazioni senza interferenza. Definiamo anzitutto la nozione di *operatore* NL:

Definizione 4.5.3 (operatore NL). *Un operatore NL è un qualunque $\Phi \in \mathcal{M}_4(\mathcal{S}) \otimes \mathcal{M}_k(\mathbb{C}), k \in \mathbb{N}$, di idioma finito-dimensionale, con $\|\Phi\| \leq 1$, le cui entrate sono combinazioni lineari finite $\sum_{0<i\leq h}^{h} \lambda_i \sigma_i, h \in \mathbb{N}$ di elementi $\sigma \in \mathfrak{G}$, con coefficienti $\lambda_i > 0$.*

Si ricordi che la classe $NL = NSPACE(log(n))$ è la classe di tutti quei problemi di decisione che una macchina di Turing non deterministica risolve adoperando una quantità di spazio al più logaritmica nella lunghezza della stringa in input. Un buon modo di visualizzare la classe NL è dato dal modello della macchina di Turing *read-only*, ovvero dalla macchina di Turing (non deterministica) le cui testine possono muoversi a piacere lungo la porzione di nastro occupata dalla stringa in input senza tuttavia poter scrivere nulla (si pensi qui all'analogia con l'impossibilità, in un'algebra finita, di costruire la funzione successore $n \mapsto n+1$). Tra le inclusioni note che riguardano NL c'è la seguente:

$$L \subseteq NL \subseteq P \tag{4.5.37}$$

dove $L = DSPACE(log(n))$ è la versione deterministica dello spazio logaritmico e $P = \sum_{k\in\mathbb{N}} DSPACE(n^k)$ è già stata incontrata in §2.1.4. Ancora aperta è la questione che riguarda l'altro verso delle inclusioni, ovvero se si abbia $L = NL = P$.

A ogni operatore NL Φ possiamo associare il seguente insieme:

$$[\Phi] := \{n \in \mathbb{N} | \forall N_n \in \mathcal{M}_4(\mathcal{H}_1)\ let(I - \Phi(N_n \otimes I_k)) = 0\} \tag{4.5.38}$$

Vale allora il seguente:

Teorema 4.5.6. *Per ogni Φ operatore NL, l'insieme $[\Phi] \in NL$*[6].

[6] A rigore, il teorema andrebbe dimostrato per la rappresentazione binaria dei numeri naturali. Ciò che questo teorema in realtà dimostra è che piuttosto l'insieme $2^{[\Phi]} = \{2^n | n \in [\Phi]\}$ è in NL. Per la rappresentazione binaria degli interi nella *GdI* si veda (Girard, [43]).

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{G}_\Phi$ il sottogruppo finito generato dalle entrate di Φ e sia $N \in \mathbb{N}$ il primo intero tale che, per ogni $\sigma \in \mathfrak{G}_\Phi$, $\sigma(i) = i$, per ogni $i \geq N$. L'interazione è dunque limitata alla sottoalgebra di $\bigotimes_{0<i\leq N} \mathcal{H}_i \rtimes \mathfrak{G}[1,\dots,N]$. In virtù del teorema 4.5.5 possiamo sostituire le entrate di N_n con matrici in $\mathcal{M}_{n+1}(\{0,1\})$, e dunque restringerci ulteriormente a $\bigotimes_{0<i\leq N} (\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C}))_i \rtimes \mathfrak{G}[1,\dots,N]$. In definitiva, modulo alcuni isomorfismi, la computazione ha luogo nello spazio $\mathcal{M}_4(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{M}_k(\mathbb{C}) \otimes (\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})) \rtimes \mathfrak{G}[1,\dots,N]$, e dunque Φ e $N_n \otimes I_k$ sono ricondotti a operatori su uno spazio di dimensione $4k(n+1)^N \cdot N!$ la cui base canonica può essere scritta come

$$\{(ai(j_1,\dots,j_N);\sigma)|1 \leq a \leq 4, 1 \leq i \leq k, j_1,\dots,j_N \leq N, \sigma \in \mathfrak{G}[1,\dots,N]\} \tag{4.5.39}$$

L'azione $\Phi((ai(j_1,\dots,j_N);\sigma))$ di Φ sulla base canonica può essere così descritta: se $\tau \in \mathfrak{G}_\Phi$ compare nell'entrata $\Phi_{a'i',ai}$, allora $(a'i'(j_1,\dots,j_N);\tau\sigma)$ occorre in $\Phi((ai(j_1,\dots,j_N);\sigma))$ con la stessa moltiplicità con cui occorre in $\Phi_{a'i',ai}$. L'azione di $N_n \otimes I_k$ può essere invece così descritta: se le entrate $N_{a'j',aj_1}$, sono tutte uguali a 0, $(N_n \otimes I_k)(ai(j_1,\dots,j_N);\sigma) = 0$; altrimenti, se $N_{a'j'_i,aj_1}$ è l'unica entrata non nulla, allora $(N_n \otimes I_k)(ai(j_1,\dots,j_N);\sigma) = (a'i(j'_1,\dots,j_N);\sigma)$.

Si noti che, per una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $let(I - A) = 0$ se e solo se A è nilpotente. Questo equivale a dire che, per p sufficientemente grande, si ha che per ogni $m \geq p$, $(\Phi(N_n \otimes I_k))^m((ai(j_1,\dots,j_N);\iota)) = 0$, dove ι è la permutazione identità su $\{1,\dots,N\}$. Ora, la scrittura su nastro degli elementi della base canonica di uno spazio di dimensione $4k(n+1)^N \cdot N!$ richiede al più $log(n)N + log(4kN!)$ caselle. Dal momento che il calcolo delle iterate $(\Phi(N_n \otimes I_k))^m((ai(j_1,\dots,j_N);\iota))$ può essere portato a termine da una macchina di Turing *read-only* con un numero di testine pari al massimo delle possibili τ che occorrono nelle somme finite $\Phi_{a'i',ai}$, segue che $[\Phi] \in coNL$, ossia nella classe dei complementari dei problemi NL-decidibili. La tesi segue allora da un noto risultato, secondo cui $NL = coNL$.

□

In (Girard, [43]), d'altra parte, è possibile trovare la dimostrazione dell'inverso del teorema 4.5.6, ovvero che, per ogni $X \subset \mathbb{N}$ tale che $X \in NL$, esiste un operatore NL Φ tale che $X = [\Phi]$.

Come interpretare questi risultati? La soluzione forse più naturale è quella di definire anzitutto l'insieme di design $\mathfrak{Fun}_{NL} := \{(0, a, \left(\begin{smallmatrix}\Phi_{11} & \Phi_{21} \\ \Phi_{12} & \Phi_{22}\end{smallmatrix}\right))|\Phi_{11}$ è un operatore $NL\}$. Il comportamento $\mathbf{nat}_{NL}$ degli *interi NL* è allora l'insieme delle rappresentazioni di algebra $\mathcal{H}_1$ di interi $\mathfrak{N}_n$ tali che, per ogni $\mathfrak{f} \in \mathfrak{Fun}_{NL}$, $[\mathfrak{f}]\mathfrak{N}_n$ è definito. In effetti $\mathbf{nat}_{NL}$ è l'ortogonale dell'insieme $\{(\infty, a, \Phi)|\Phi$ è un operatore $NL\}$, e dunque è un comportamento.

Sia ora $\mathcal{F}_n^+ := \{\sum_{0<i\leq k}^k u_i | k \in \mathbb{N}, u \in \mathcal{F}_n\}$ l'insieme delle somme finite di elementi del monoide epidittico $\mathcal{F}_n$. Si noti che, stando alla definizione 4.4.4 a pag. 263, $\mathcal{F}_n^+$ non è un monoide epidittico; tuttavia soddisfa lo stesso il criterio "$\varrho(u) < 1 \Rightarrow u$ nilpotente", ed è necessario per estendere la *GdI* soggettiva al calcolo non deterministico.

La richiesta (soggettiva) che $\mathfrak{N}_n \in \mathcal{F}_4^+$ e $\mathfrak{f} \in \mathcal{G}_{2,4}$, produce allora la nilpotenza di $\Phi_{11}\mathfrak{N}_n$ e dunque, in virtù del teorema 4.5.6, il limite logaritmico allo spazio necessario alla computazione dell'interazione, ovvero un limite a priori al tempo di computazione dell'applicazione della "funzione" $\mathfrak{f}$ (di dominio $\mathbf{nat}_{NL}$ e codominio un qualche comportamento assegnato "a posteriori") all'"argomento" $\mathfrak{N}_n$.

Come si vede dalla dimostrazione del teorema 4.5.6, l'elemento determinante nella caratterizzazione del coefficiente di nilpotenza, che corrisponde alla dimensione dello spazio finito in cui l'interazione ha concretamente luogo (alla porzione finita di nastro - nel senso della macchina di Turing - effettivamente utilizzata nell'esecuzione di un algoritmo), è la cardinalità del sottogruppo, necessariamente finito, generato dalle entrate $\sigma_i \in \mathfrak{G}$ in Φ. Servendosi di gruppi localmente finiti in cui la cardinalità del sottogruppo generato da k elementi è limitata da $f(k)$, per una certa funzione f, si può immaginare di estendere questo approccio alle coppie normative e produrre caratterizzazioni geometriche di diverse classi di complessità, come ad esempio è stato fatto in (Pedicini, Piazza, [55]) per la classe delle funzioni elementari.

4.6 La *GdI* come sintassi trascendentale

Questo paragrafo è dedicato, attraverso un confronto critico con Kant, al senso dell'espressione "trascendentale", e della connessa nozione di "possibile", cui, a mio parere, si deve fare riferimento quando si parla della *GdI* come di una "sintassi trascendentale".

Deduzione trascendentale e deduzione metafisica La celebre definizione di "trascendentale" nella prima *Critica* è la seguente:

> Chiamo *trascendentale* ogni conoscenza che in generale si occupa non tanto di oggetti, quanto invece del nostro modo di conoscere gli oggetti, nel senso che tale modo di conoscenza dev'essere possibile *a priori*. Un sistema di siffatti concetti potrebbe chiamarsi *filosofia trascendentale*. (Kant, [46])

e ancora,

> Occorre cioè chiamare trascendentale non già ogni conoscenza *a priori*, ma soltanto quella mediante cui noi riconosciamo, che e come certe rappresentazioni (intuizioni o concetti) vengono applicate o sono possibili unicamente *a priori* (trascendentale deve chiamarsi cioè la possibilità della conoscenza o l'uso di questa, *a priori*). (Kant, [46])

La filosofia trascendentale che ha in mente Kant deve rivolgersi alla spiegazione di quelle condizioni che rendono la conoscenza, così come siamo abituati a considerarla, qualcosa di possibile. Ma cosa intende dire il filosofo tedesco quando parla di possibilità, di condizioni di possibilità? La questione sembra profondamente intrecciata con quella dell'uso che Kant fa della nozione di "a priori": in effetti, la stessa rivoluzione copernicana citata nella Prefazione, costituisce la soluzione teorica al problema di giustificare la possibilità di forme di conoscenza, come quella matematica, che si manifestano nella loro validità come (almeno apparentemente) indipendenti dall'esperienza empirica.

> Per una volta si tenti dunque, se nei problemi della metafisica possiamo procedere meglio, ritenendo che gli oggetti debbano conformarsi alla nostra conoscenza. Già così, tutto si accorda meglio con la desiderata possibilità di una conoscenza *a priori* degli oggetti, la quale voglia stabilire qualcosa su di essi, prima che ci vengano dati. (Kant, [46])

Il "ritorno al soggetto" che questo passo filosofico, la rivoluzione copernicana, appunto, comporta è anzitutto motivato dal bisogno di determinare il campo del possibile in maniera tale si possa parlare di principi, le leggi della sensibilità e dell'intelletto, la cui validità non sia essa stessa un risultato dell'operare entro tale campo ma risulti di quest'ultimo costitutiva. E' in questo senso che la conoscenza *a priori*, come "fatto" del conoscere di cui alla filosofia sono chieste le ragioni, rimanda, nell'orizzonte kantiano, a un soggetto che possa essere chiamato trascendentale, ovvero costituito non come l'origine o semplicemente il soggetto logico che sottostà a una tale legalità (una tale normatività, verrebbe da dire), bensì come quel soggetto la cui esperienza del mondo è possibile proprio in quanto sottostà a leggi dettate dalla struttura della sensibilità e dell'intelletto. Una volta stabilita la natura di queste leggi, risulta sensato definire la stessa nozione di "possibilità" come avviene nell'Analitica dei Principi:

> Ciò che si accorda con le condizioni formali dell'esperienza (rispetto all'intuizione e ai concetti), è *possibile* (Kant, [46])

In definitiva, l'esplicitazione delle leggi che individuano il soggetto trascendentale (d'ora in poi *s.t.*) delimita l'area di ciò che fa parte per esso di un'esperienza possibile; si ricordi, d'altra parte (vd. §1.1.1), che la deduzione trascendentale ha mostrato come la natura del *s.t.* sia anzitutto sintetica, nel senso che le sue leggi sono anzitutto forme di sintesi delle rappresentazioni (le categorie). Sono dunque quest'ultime a costituire, nel campo dell'intelletto, quella legalità la conformità alla quale costituisce la dimensione del possibile.

Il richiamo alle categorie, anche solo per omonimia, rinvia alla discussione in §2.1.3 della posizione essenzialista: in quel caso, avevamo osservato, la ricostruzione delle "forme di sintesi" di base è considerata il canone cui rapportare ogni mossa linguistica dotata di senso. E' un tale canone a identificare la natura di ciò che viene considerato possibile (questa possibilità corrisponde proprio a ciò che abbiamo chiamato "leggittimità logica"). Avendo così delineato il carattere trascendentale dell'essenzialismo, dovremo forse per questo tacciare di essenzialismo la filosofia kantiana?

Nel generale argomento trascendentale elaborato da Kant nell'Analitica, mi sembra che valga la pena di distinguere, come due premesse indipendenti, la *deduzione trascendentale* (DT) dalla *deduzione metafisica* (DM) delle categorie:

> Nella *deduzione metafisica*, l'origine *a priori* delle categorie è stata mostrata in generale mediante il loro pieno accordo con le funzioni logiche universali del pensiero; nella *deduzione trascendentale*, invece, è stata esposta la possibilità delle categorie come conoscenze *a priori* di oggetti in un'intuizione in generale. (Kant, [46])

In estrema sintesi:

(DT) *Ciò che è possibile è ciò che è conforme alla legalità costitutiva del s.t.*;

(DM) *La legalità è determinata (anzitutto) dalle categorie, le quali sono in corrispondenza 1-1 con le forme sintattiche dei giudizi logici.*

A partire da entrambe le premesse DT e DM, sfruttando il fatto che i giudizi logici cui fa riferimento Kant corrispondono a quelli presenti nella tavola dei giudizi, ricaviamo che l'insieme delle categorie può essere considerato come un insieme finito di costruttori applicando (iterativamente) i quali vengono prodotti i giudizi, e tramite essi, le forme di esperienza possibili (per l'intelletto). Il campo del possibile può dunque essere delimitato per mezzo di una enumerazione delle "unificazioni" conformi alla sintassi dei giudizi logici, vale a dire di quella che, nei termini di Girard (Girard, [38]), potremmo chiamare una *lista delle possibilità*. Risulta così evidente la natura "soggettiva", non nel senso kantiano, ma in quello adoperato in questo capitolo (vd. la definizione 4.2.28 a pag. 245 della "soggettività come commutatività"), della premessa DM, ma non della DT, dal momento che la prima lega la seconda alla dimensione combinatoria di una specifica sintassi, rappresentata della tavola kantiana dei giudizi: è proprio la DM che, nel ricondurre le categorie a un insieme finito di costruttori derivati da una sintassi, lega la posizione kantiana all'essenzialismo discusso nel secondo capitolo, e allo stesso tempo, nel vincolare la legalità del *s.t.* alla specifica "soggettività" della tavola dei giudizi, mette a repentaglio la stessa natura trascendentale dell'impresa, quanto meno nel momento in cui tale impresa sia presa a modello, come è stato sistematicamente fatto nella presente tesi, per una indagine sulle condizioni di possibilità della sintassi in generale.

Tavola dei giudizi	$\longrightarrow$	**Tavola delle categorie**
Quantità		**Quantità**
Universali	$\longrightarrow$	Unità
Particolari	$\longrightarrow$	Pluralità
Singolari	$\longrightarrow$	Totalità
Qualità		**Qualità**
Affermativi	$\longrightarrow$	Realtà
Negativi	$\longrightarrow$	Negazione
Infiniti	$\longrightarrow$	Limitazione
Relazione		**Relazione**
Categorici	$\longrightarrow$	Sostanza
Ipotetici	$\longrightarrow$	Causalità
Disgiuntivi	$\longrightarrow$	Comunanza
Modalità		**Modalità**
Problematici	$\longrightarrow$	Possibilità
Assertori	$\longrightarrow$	Esistenza
Apodittici	$\longrightarrow$	Necessità

La deduzione metafisica delle categorie

(4.6.1)

In definitiva, possiamo azzardare la formula dell' "essenzialismo kantiano" per riferirci a quella posizione secondo cui le condizioni di possibilità dell'esperienza, oggetto della filosofia trascendentale, sono riconducibili a un insieme finito di forme a priori (sintatticamente) esplicitabili, che riconducono il campo del possibile nei limiti di una enumerazione di combinazioni possibili.

Il possibile e la lista delle possibilità Recuperando il percorso tecnico che ci ha condotto dalla teoria dei modelli alla GdI, possiamo evidenziare negli spazi coerenti, la fondamentale struttura semantica che ci ha accompagnato per tutto il percorso, proprio questa forma di essenzialismo, quella indotta dalla DM, nel momento in cui tali spazi sono interpretati come rappresentanti *lo spazio di tutte le interazioni possibili.* Ad esempio, i punti (le partite, vd. §1.2.3) del tensore $X \otimes Y$ di due spazi, costituiscono proprio l'insieme di tutte le possibili combinazioni di punti di X e punti di Y, ovvero il prodotto cartesiano $|X| \times |Y|$. D'altra parte, con l'introduzione dei QCS (vd. §4.2), questa lettura risulta problematica: in effetti tra le interazioni che costituiscono il supporto di uno spazio, non tutte, e soprattutto non tutte insieme, sono interpretabili secondo questa dinamica combinatoria; parlare ad esempio del tensore $X \otimes Y$ di due QCS come dello spazio delle combinazioni dei "punti" di X e di Y può al più avere un senso solamente soggettivo e parziale, dal momento che non c'è alcun modo di ricostruire tutti gli elementi di tale spazio come insiemi, combinazioni, di punti. Per capirci, nei QCS possiamo ancora parlare di categorie e forme dei giudizi, ma non c'è alcun modo di ricondurre la legalità, ovvero la normatività del $s.t.$ a un insieme finito, a una tavola delle categorie, stabilita universalmente e valida in ogni contesto. All'infinità non numerabile dei punti di vista, delle $MASA$ (vd. §4.2) esistenti, corrisponde la parzialità e insufficienza di ogni enumerazione, di ogni lista delle possibilità.

La GdI non commutativa, in questo dibattito, è presentata dallo stesso Girard (vd. (Girard,[38])) come una sorta di "purificazione logaritmica" dalla confusione (assai costruttiva) in cui i QCS revocano la posizione essenzialista: in §3.4 abbiamo mostrato come i punti di uno spazio coerente $[\![A]\!]$ possano essere considerati come i possibili cammini lungo una **PS** di conclusione (etichettata con) A. Nella versione "operatoriale" degli spazi coerenti, ovvero nei QCS, ogni elemento di uno spazio $X \subset \mathcal{H}_k$ è in definitiva una matrice che appartiene all'*algebra esterna*[7] di uno spazio finito dimensionale: dati n loci, ovvero lo spazio n-dimensionale $\mathbb{C}^n$, corrispondente ad esempio a una formula $A_1 \otimes \cdots \otimes A_n$, l'algebra esterna è isomorfa a $\mathcal{M}_{2^n}(\mathbb{C})$, in quanto agisce sullo spazio $\mathbb{C}^{2^n}$. Alle derivazioni di $A_1 \otimes \cdots \otimes A_n$ sono allora associate cricche di una spazio $X \subset \mathcal{H}_{2^n}$, sotto-algebra dell'algebra esterna. In definitiva, data una $MASA$, un punto di vista soggettivo, possiamo dire che gli operatori dei QCS agiscono sui cammini o, equivalentemente, su tutte le possibili combinazioni di punti. Supponendo quindi, in virtù della proposizione 4.2.5 a pag. 239, che gli operatori siano in forma diagonale, la traccia $tr(u)$ non fa altro che "contare" gli elementi della "lista dei cammini possibili".

Del resto, in §3.5 abbiamo osservato come il determinante logaritmico $let(I - A)$ non faccia altro che "contare" i cicli, ovvero i cammini chiusi, nel grafo rappresentato dalla matrice A. Tuttavia, ha senso parlare di questo conteggio soltanto nel caso in cui la serie

[7]Se $(e_i)_{i \leq k}$ è una base dello spazio $\mathbb{C}^k$, allora l'algebra esterna su esso è l'algebra degli operatori lineari che agiscono sullo spazio generato dalle combinazioni $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_h}, h \leq k$ di elementi di $(e_i)_{i \leq k}$, chiaramente isomorfo a $\mathbb{C}^{2^k}$, lo spazio dei "cammini" sui loci di $\mathbb{C}^n$.

$\sum_{n>0}^{\infty} \frac{Tr(A^n)}{n}$ converga (una questione, quella della convergenza delle serie, che, nella sua forma generale, è ben al di là di ogni pretesa combinatoria): non c'è alcun modo, cioè, di ricondurre i cammini possibili a una lista specificata una volta per tutte.

La correlazione tra questi due approcci è elegantemente rilevata dalla seguente equazione, valida in tutte le algebre finito-dimensionali:

$$tr(\Lambda(iu)\Lambda(iv)) = det(I - uv) \tag{4.6.2}$$

in cui l'operazione $\Lambda(u)$ corrisponde al passaggio all'algebra esterna. Ricordando che $-log(det(I - uv)) = let(I - uv)$, possiamo rileggere la *GdI* come una forma di "restringimento logaritmico" degli spazi coerenti, in cui i moltiplicativi passano dal tensore $A \otimes B$ alla somma diretta $A \oplus B$. L'aspetto interessante di questa connessione è che ogni algebra esterna infinita è del tipo $\mathbf{I}_\infty$ e dunque non ammette una traccia, il che rende algebricamente impossibile l'estensione dei *QCS* al caso infinito, e dunque agli esponenziali. Con le parole di Girard,

> The dialogue between questions and answers has been replaced with the space of their interactions; if one can hardly oppose this in finite dimension, this reduction of the potential to the *list of possibles* diverges in infinite dimension: it is no longer a heresy, it is an impossibility. (Girard, [38])

Insomma, rielaborando le parole di Girard alla luce della discussione fatta sopra, ci troveremmo di fronte a quella che potremmo considerare una refutazione algebrica della deduzione metafisica di Kant, e con essa della pretesa di ricondurre il campo del possibile alla combinatoria infinita legata a un insieme finito di generatori specificato una volta per tutte. La questione della finitezza dell'algebra dei loci, in fondo, è direttamente connessa con quella della normatività dell'infinito combinatorio, o meglio, degli infiniti combinatori o discreti, discussa in §4.4.

In effetti, la morale da trarre dall'approccio della *GdI* alla questione della sintassi, è proprio quella di una deduzione trascendentale, di una *DT*, senza alcuna *DM*: dovendo gran parte dei suoi meriti al teorema 3.3.7 di sequenzializzazione (pag. 197), sempre presente nella forma "soggettiva" della nilpotenza, la *GdI* rappresenta l'interazione tra due design come un tentativo reciproco di esplicitazione, vale a dire come ciò chè dà luogo al costituirsi di forme di accordo. Queste ultime, entro i limiti (commutativi) di una adeguata gestione delle interferenze, dei contesti imprevisti, entro i limiti morfologici cioè, come dice Girard, di un "lexique commun" (Girard, [37]), fanno sì che l'interazione stessa sia interpretabile secondo procedure generative, combinatorie e dunque, in ultima analisi, sintattiche. La normatività insita nella formazione dei comportamenti è sì costitutiva del campo del possibile, in accordo con la *DT*, ma in tale normatività, irrimediabilmente "a posteriori" (vd. §2.2.1), lo spazio dell'"a priori" è relegato entro i confini, parziali e soggettivi, dei singoli monoidi epidittici, epigono dei "dialoghi valutativi" discussi in §2.2.2, quelli cioè che assumono come limite invalicabile dell'interazione un insieme di regole, una sintassi, decisa una volta per tutte. Ai dialoghi valutativi, ai monoidi epidittici, la cui ineluttabile insufficienza è un corollario dell'incompletezza di Gödel, è negato un genuino sguardo trascendentale, rivolto cioè al di là dei confini della loro idiosincratica, "soggettiva", normatività.

Le "forme trascendentali" E' solo nei termini di questo senso "purificato" di trascendentale che mi sembra si possa parlare, come fa Girard, nella *GdI*, di *forme trascendentali*:

(I Forma) La *dualità* geometrica è la forma trascendentale della *negazione linguistica.*

La negazione lineare si è rivelata la chiave per ricostruire il rapporto tra derivazione e contro-modello nella forma del tutto generale della dualità. Infatti, come osservato in §1.2.5, la negazione classica nasconde come "soggettive", irrilevanti, le simmetrie geometriche connesse con la dualità. Quest'ultima, infatti, non è intesa come un connettivo logico ma come il perno vero e proprio dell'interazione: quando due design si confrontano, il riconoscimento tra i due si manifesta come un reciproco scambio di componenti fino a un improvviso arresto: uno dei due design cala il demone, ovvero riconosce la vittoria dell'avversario. La conseguenza è che un confronto senza arresto non può che durare all'infinito, generando divergenza. Da tutto ciò emerge un modo nuovo di guardare al *principio di non contraddizione*, relativo alla negazione linguistica: nell'attribuire un senso a un asserto un parlante si impegna a non attribuire alcuna pertinenza alla tesi di un interlocutore il cui design generi un'interazione in cui nessuno dei due è disposto a cedere. La contraddizione corrisponderebbe a un pareggio, o a una divergenza, ma le norme del gioco non consentono il pareggio, nè la divergenza. La dualità, in sostanza, non correla contenuti già fissati ma è essa stessa il motore del costituirsi di questi contenuti.

(II Forma) Il *comportamento* è la forma trascendentale dell' *enunciato.*

La prima caratteristica dei comportamenti è quella di non "occorrere", nel senso che questi rompono con il concetto stesso di occorrenza (vd. §2.2.1). D'altra parte, le occorrenze degli enunciati cui i comportamenti corrispondono possono essere recuperate attraverso una adeguata morfologia generata dalle delocalizzazioni, rivelando così la normatività nascosta sotto l'apparentemente innocua nozione di "enunciato". Inoltre, i comportamenti non sono imparentati con alcun linguaggio: essi sono il risultato di forme di interazione convergente, sono cioè naturalmente associati con un senso in virtù del quale possono "intersecarsi" con (la soggettività di) un linguaggio, modulo il ricorso a opportune delocalizzazioni. In particolare, i comportamenti portano alla luce una complessità semiotica, oltre che morfologica, invisibile nel contesto della rigida separazione di linguaggio e semantica, di enunciati e valutazioni. In definitiva, dove c'è un comportamento, *è possibile* trovare un enunciato dotato di senso.

(III Forma) L'equazione 1.2.17 a pag. 64, nelle sue molte versioni, ad esempio

$$let(I - f(u+v)) = let(I - f_{11}u) + let(I - ([f]u)v) \tag{4.3.7}$$

è la forma trascendentale dell'*associatività*, ovvero della proprietà di Church-Rosser (vd. §2.1.2). Si tratta del principio alla base della socializzazione dei design. Nella forma più generale assunta nella *GdI* costituisce una importante astrazione rispetto alla validità della proprietà di Church-Rosser relativa a sintassi specifiche, come quella del λ-calcolo. Ancora nella ludica (vd. C), il teorema di associatività poggia su un'analisi composizionale delle azioni che possono occorrere in una cronaca. L'equazione 4.3.7 mostra d'altra parte la natura "oggettiva", nel senso del paragrafo §4.2, di questa fondamentale proprietà, che è alla base della dualità moltiplicativa (l'unica dualità rappresentabile nella *GdI* senza opportune ipotesi soggettive).

(IV Forma) La *nilpotenza* è la forma trascendentale della *normalizzazione forte.*

Del ruolo della nozione di nilpotenza nel costituire, in connessione con il teorema 3.3.7 di sequenzializzazione (pag. 197), il nesso cruciale tra sintassi e valutazione, si è detto e altro ancora sarà osservato nel prossimo paragrafo. Vale qui la pena di riconoscere come questa proprietà, geometrizzando la questione puramente sintattica della terminazione delle riscritture, dia accesso in maniera estremamente naturale al tema delle risorse della computazione (spazio e tempo): il calcolo esplicito del *coefficiente di nilpotenza* promette di offrire un contenuto matematico profondo a diverse classi di complessità, indipendente dal riferimento a modelli sintattici particolari, laddove quest'ultimo riduce le ricerche nel campo della complessità algoritmica, con le parole di Girard, a una mera "fenomenologia delle macchine di Turing" (Girard, [40]). Inoltre, se si pensa che la *GdI*, nella versione "hilbertiana" del paragrafo §4.1, nasce come rappresentazione geometrica del λ-calcolo, la sua vicinanza ai temi della *complessità implicita* (vd. §2.1.4), costituisce un notevole progresso rispetto all'opacità dell'algoritmo di riduzione dei λ-termini rispetto ad analisi in termini di risorse computazionali.

(V Forma) Il *quoziente normativo* e il *completamento normativo* possono essere considerate le forme trascendentali della semantica. Queste ultime due richiedono d'altra parte una discussione più approfondita, nel prossimo paragrafo.

4.7 Sintassi e semantica

Attraverso le nozioni di "quoziente normativo" e "completamento normativo", in questo paragrafo si cercherà di gettare luce, tirando un po' le somme dei risultati ottenuti in questo capitolo, sul modo in cui la *GdI* ci impone di ridiscutere il rapporto tra sintassi e semantica, sottolineando l'importanza del contesto. Particolare attenzione sarà rivolta alle nozioni di completezza e incompletezza, la quali, alla luce del teorema di sequenzializzazione, non possono più essere intese come facenti riferimento alla relazione tra due universi separati.

Incarnazione e quoziente normativo L'ultima forma trascendentale richiede una discussione a parte, in quanto la sua descrizione ricapitola un po' tutto il percorso portato avanti sin dal paragrafo §1.1.1, quando si è parlato dei "quozienti" semiotico e semantico, attribuiti a Frege ed alla sua teoria del senso linguistico dato da condizioni di verità.

L'idea che, a partire da Frege, è stata sviluppata in questa tesi, è quella secondo cui la dimensione semantica dovesse essere identificata, in ultima analisi, con quella delle valutazioni; per valutazioni abbiamo del resto via via inteso l'attribuzione di valori di verità, la soddisfacibilità in un modello detto "standard", la vittoria di una disputa, il rispetto delle regole di costruzione, delle norme di una categoria, arrivando a indentificare la questione stessa della valutazione con il confronto tra un oggetto e il suo "duale", nel senso che il risultato di un tale confronto dovesse dare ragione ad al più uno dei due contendenti (il caso con zero vincitori corrisponde infatti alla divergenza dell'interazione). Attraverso i dialoghi normativi (vd. §2.2.2) ci siamo così diretti verso le condizioni costitutive delle norme che istituiscono un tale confronto.

In particolare, nel contesto della ludica, siamo riusciti a produrre dei quozienti che riassumevano in maniera sintetica lo stretto rapporto che, attraverso l'analisi canonica in LK, e la semantica degli spazi coerenti per LL, abbiamo identificato tra dualità e valutazione: si tratta dei quozienti indotti dalla nozione di *incarnazione*, ovvero del tipo

$$\mathfrak{D} \simeq_{\mathbf{G}} \mathfrak{E} \Leftrightarrow |\mathfrak{D}|_{\mathbf{G}} = |\mathfrak{E}|_{\mathbf{G}} \tag{4.7.1}$$

i quali, in virtù della proposizione 2.2.6 (pag. 151), si riconducono alla seguente forma:

$$\mathfrak{D} \simeq_{\mathbf{G}} \mathfrak{E} \Leftrightarrow \forall \mathfrak{F} \in \mathbf{G}^{\overset{|}{\sim}} \; [\mathfrak{D} \rightleftharpoons \mathfrak{E}] = [\mathfrak{D}' \rightleftharpoons \mathfrak{E}] \tag{4.7.2}$$

la quale, possiamo già osservare, ricorda molto da vicino l'*oggettività della misura* introdotta in §4.5:

$$\langle \mathfrak{Oss} | \mathfrak{N}_n \rangle = \langle \mathfrak{Oss} | \theta(\mathfrak{N}_n) \rangle \tag{4.7.3}$$

Ora, la caratteristica più innovativa delle incarnazioni, conseguenza della cosiddetta "sintassi a posteriori" (vd. §2.2.1), è la loro *contestualità*: uno stesso design può ammettere incarnazioni diverse in comportamenti diversi (il caso tipico è quello di un & di design, ovvero dell'unione di più design nella stessa base con ramificazioni a due a due disgiunte). Se uno stesso design può appartenere a diversi comportamenti, allora può ammettere diversi insiemi di test; in particolare insiemi di test distinti identificheranno design di volta in volta diversi: il quoziente viene così a dipendere dagli specifici contesti di valutazione adottati. Inoltre, contesti di valutazione diversi indurranno *completamenti normativi* (vd. §2.2.2), ovvero biortogonali, diversi. In definitiva il senso attribuito al design, specificato dalle valutazioni, viene a dipendere dalle forme di interazione e di valutazione entro le quali questo può intercorrere ed uno stesso design si ritroverà ad assumere sensi diversi, e con essi forme diverse di identificazione con altri design.

Un ottimo esempio di questa contestualità del senso è dato dagli *interi* NL introdotti in §4.5: in effetti, dal punto di vista degli *interi essenzialisti*, ovvero delle osservazioni del tipo $\mathfrak{Ev}_{ab}$, la rappresentazione $\mathfrak{N}_5$ di 5 di algebra $\mathcal{H}_1$ sarà indistinguibile da una qualunque altra rappresentazione $\mathfrak{N}'_5$ di 5 di algebra $\mathcal{A} \leq \mathcal{H}$, e si avrà, in virtù del teorema 4.5.1 a pag. 280:

$$\forall \mathfrak{Ev}_{ab} \in \mathfrak{Ev} \; \langle \mathfrak{Ev}_{ab} | \mathfrak{N}_5 \rangle = \langle \mathfrak{Ev}_{ab} | \mathfrak{N}'_5 \rangle \tag{4.7.4}$$

che potremo scrivere

$$\mathfrak{N}_5 \simeq_{\mathbf{nat}} \mathfrak{N}'_5 \tag{4.7.5}$$

Tuttavia, la natura “non standard” degli interi NL emerge estendendo i contesti interattivi agli operatori NL, $\Phi \in \mathcal{M}_4(\mathcal{S}) \otimes \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$, rispetto ai quali l'identificazione delle due rappresentazioni sarà assolutamente proibita: $\mathfrak{N}'_5$ non sarà anzi affatto riconosciuto come un intero. Nell' “incarnazione” di $\mathfrak{N}_5$ rispetto a **nat** la specifica collocazione algebrica delle entrate dell'operatore N_5 è considerata irrilevante per l'“essenza”, ed è dunque eliminata, così come il tono che distingue il “brocco” dal “corsiero” (vd. §1.1.1). Nell' “incarnazione” NL, invece, questa collocazione morfologica è assolutamente determinante per il successo interattivo. Si noti che, se un segno è determinato dal quoziente che ne cancella gli aspetti irrilevanti, in accordo con il quoziente semiotico 1.1.8 di Frege (pag. 12), allora non dovremmo parlare di uno stesso segno che assume sensi diversi nei diversi contesti, bensì piuttosto di segni diversi: l'idea è quella di pensare a un segno, nel caso della logica, a una derivazione, come a una delle classi di equivalenza indotte da un'incarnazione, di cui un design incarnato può costituire un rappresentante:

Un segno corrisponde a una classe di equivalenza sui design $|\mathfrak{D}|_{\mathbf{G}}$ indotta da un comportamento (equivalentemente: da un insieme di test - vd. lemma etico, sotto)

(4.7.6)

così, ad esempio, il segno $|\mathfrak{N}_5|_{\mathbf{nat}}$ risulta privo del vincolo morfologico che lega invece saldamente $|\mathfrak{N}_5|_{\mathbf{nat}_{NL}}$ all'algebra $\mathcal{H}_1$.

In più luoghi (Girard, [43],[40]), Girard propone di modificare leggermente la struttura della GdI in modo da internalizzare la formazione dei quozienti normativi: la soluzione da lui trovata è quella di estendere la nozione di design attraverso i cosiddetti *design parziali*:

Definizione 4.7.1 (design parziali). *Siano $\mathfrak{a}_i = (\alpha_i, a_i, u_i), 0 < i \leq k$ design (secondo la definizione 4.3.5 a pag. 256) di idioma rispettivamente $\mathcal{A}_i$. Allora ogni loro combinazione lineare formale*

$$\sum_{0<i\leq k}^{k} \lambda_i \mathfrak{a}_i = (\sum_{0<i\leq k}^{k} \lambda_i \alpha_i, \bigoplus_{0<i\leq k}^{k} \lambda_i a_i, \bigoplus_{0<i\leq k}^{k} \lambda_i u_i) \qquad \lambda_i \in \mathbb{R} \tag{4.7.7}$$

è un design parziale *di idioma $\bigoplus_{0<i\leq k}^{k} \mathcal{A}_i$. Si noti che la forma $\bigoplus_{0<i\leq k}^{k} \lambda_i a_i$ non è necessariamente fedele e in particolare non è detto che soddisfi $\bigoplus_{0<i\leq k}^{k} \lambda_i a_i (I_{\bigoplus_{0<i\leq k}^{k} \mathcal{A}_i}) \neq 0$.*

La dualità tra design parziali generalizza la 4.3.6 a pag. 256:

$$\langle \sum_{0<i\leq k}^{k} \lambda_i \mathfrak{a}_i | \sum_{0<j\leq h}^{h} \mu_j \mathfrak{b}_j \rangle := \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j \langle \mathfrak{a}_i | \mathfrak{b}_j \rangle \tag{4.7.8}$$

L'oggettività della misura può a questo punto essere espressa, a partire da un elemento $\mathfrak{N}_0 \in \mathbf{nat}_{NL}$, come

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \theta_1 \in Aut(\mathcal{H}_1) \qquad \mathfrak{N}_0 + \lambda \mathfrak{N}_n - \lambda \theta(\mathfrak{N}_n) \in \mathbf{nat}_{NL} \tag{4.7.9}$$

da cui si ricava la richiesta $\mathbf{nat}_{NL}^{\overset{\downarrow}{\sim}} \subset \mathcal{M}_4(\mathcal{S}) \otimes \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$, che corrisponde agli operatori NL. Possiamo così definire formalmente il *quoziente normativo*:

Definizione 4.7.2 (quoziente normativo)**.** *Sia* $\mathbf{G}$ *un comportamento e sia* $\mathfrak{g} \in \mathbf{G}$*. Allora, per ogni coppia di design* $\mathfrak{d}, \mathfrak{e}$ *(non necessariamente in* $\mathbf{G}$*), si ha*

$$\mathfrak{d} \simeq_{\mathbf{G}} \mathfrak{e} \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \mathfrak{g} + \lambda \mathfrak{d} - \lambda \mathfrak{e} \in \mathbf{G} \tag{4.7.10}$$

Si noti come il quoziente normativo si applichi a ogni design in generale, non ai soli elementi di $\mathbf{G}$: dietro questo aspetto c'è infatti il seguente lemma:

Lemma 4.7.1 (lemma etico)**.** *Sia* $\mathbf{E}$ *un'etica e sia* $\mathbf{G} = \mathbf{E}^{\overset{\downarrow}{\sim}\overset{\downarrow}{\sim}}$*. Allora, per ogni* $\mathfrak{d} = (\alpha, a, u), \mathfrak{e} = (\beta, b, v)$*, di idioma rispettivamente* $\mathcal{A}, \mathcal{B}$*, se* $a(I_{\mathcal{A}}) = b(I_{\mathcal{B}})$*,* $\mathfrak{d} \simeq_{\mathbf{E}} \mathfrak{e}$ *se e solo se* $\mathfrak{d} \simeq_{\mathbf{G}} \mathfrak{e}$*.*

Dimostrazione. La richiesta $a(I_{\mathcal{A}}) = b(I_{\mathcal{B}})$ assicura che, dato $\mathfrak{a} \in \mathbf{E}^{\overset{\downarrow}{\sim}} = \mathbf{G}^{\overset{\downarrow}{\sim}}$, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathfrak{a} + \lambda \mathfrak{d} - \lambda \mathfrak{e}$ sia un design (non parziale). La tesi segue da $\mathbf{E}^{\overset{\downarrow}{\sim}} = \mathbf{G}^{\overset{\downarrow}{\sim}}$.

$\square$

In definitiva, ogni etica $\mathbf{E}$, che possiamo pensare come un insieme (generalmente numerabile) di test, induce un quoziente normativo sull'intero universo dei design, ritagliando in particolare il comportamento $\mathbf{E}^{\overset{\downarrow}{\sim}}$ dei design effettivamente polari ai suoi elementi. Nei termini del primo capitolo, potremmo dire che ogni insieme di modelli, o di test, induce un quoziente sulle (para-)derivazioni, il quale identifica i segni valutabili a partire da questo insieme.

Quale possa essere, concretamente, lo statuto logico di quelli che Girard chiama i "cani da guardia della normatività" (Girard, [43]), ovvero i design parziali, è ancora una questione del tutto aperta:

> The question is to determine whether or not they can be of some use, i.e. if the measurments $\langle \mathfrak{a} | \Phi \rangle$ are meaningful. The question extends, of course, to those $\mathfrak{a}$ in charge of other ≪laws ≫that Φ may or may not break. (Girard, [44])

In particolare, un comportamento $\mathbf{G}$ può contenere design parziali del tipo $\mathfrak{a} + \lambda \mathfrak{b} - \mu \mathfrak{c}$, dove $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ possono non essere elementi di $\mathbf{G}$, la cui presenza rileva tuttavia l'esistenza di "leggi" nascoste, ancora tutte da scoprire, che ne regolano l'interazione con gli $\mathfrak{f} \in \mathbf{G}^{\overset{\downarrow}{\sim}}$, sempre in linea con l'impostazione anti-essenzialista descritta nel paragrafo precedente. Ad esempio, osserva Girard in (Girard, [43]), persino un comportamento vuoto, come quello associato a un sottoinsieme $N \subset \mathbb{N}$ privo di elementi, può risultare pieno di design "invisibili" del tipo $\lambda \mathfrak{a} - \mu \mathfrak{b}$, ovvero parziali, i cui addendi nascondono leggi seguite dagli elementi del comportamento associato a $\complement N = \mathbb{N}$. Tutte queste questioni del resto, si ricordi, fanno parte di un cantiere appena aperto:

> Ce qui suit est un aperçu du chantier en cours: il s'agit de réflexions éparses, non systématisées. (Girard, [43])

Completezza e incompletezza D'altra parte, il correlato del quoziente normativo è il *completamento normativo* (vd. §2.2.3), vale a dire il passaggio al biortogonale. E' questa una delle più profonde novità che gli sviluppi della logica lineare hanno apportato alla questione dei fondamenti: ci ha permesso infatti di vedere come l'uso, seppur regolato, o indotto da regole, può trascendere queste stesse, senza per questo uscire dal contesto normativo che quelle regole inducevano. E' questo uno degli aspetti chiave che ci ha condotto alla refutazione del principio dell'inferenzialità delle norme (vd. §2.2.2,§3.4), in direzione di una prospettiva originale per affrontare il tema dell'incompletezza.

Possiamo infatti riformulare nella *GdI* la nozione di *completezza interna* (vd. §2.2.3) nei seguenti termini:

Definizione 4.7.3 (completezza interna)**.** *Sia* $\mathbf{E}$ *un'etica e* $\mathbf{G}$ *il suo biortogonale. Allora* $\mathbf{E}$ *è completa se e solo se, per ogni* $\mathfrak{g} \in \mathbf{G}$*, esiste un* $\mathfrak{e} \in \mathbf{E}$ *tale che* $\mathfrak{e} \simeq_{\mathbf{G}} \mathfrak{g}$*.*

Il caso che ci interessa è quello di un'etica consistente in un monoide epidittico $\mathcal{E}$. Si noti che quello che si richiede per la completezza interna non è che ogni elemento del biortogonale sia in $\mathcal{E}$, bensì solo che ogni segno del biortogonale, ovvero ogni design considerato modulo il quoziente normativo, abbia un rappresentante nel monoide, ovvero corrisponda a una dimostrazione (vd. §4.4). Da un punto di vista tecnico, qui ci addentriamo, per il momento, nel regno delle pure congetture:

> Ainsi, les propositions Π^1 [...] sont-elles plus *sûres* que les autres. Parmi ces propositions, celles qui sont *parfaites*, i.e. qui n'utilisent pas les *exponentielles* !,?, sont encore plus sûres. Dans ce dernier cas - moralement apodictique -, je conjecture que le monoïde épidictique ne sert à rien, i.e. la forme suivante de *complétude*: tout argument irréfragable est (équivalent à) une démostration. Si l'on sorte du cadre Π^1, il faut s'attendre à une forme nouvelle d'incomplétude: l'existence d'arguments irréfragables que l'on ne puisse pas exprimer comme éléments du monoïde épidictique donné à l'avance. (Girard, [43])

D'altra parte, in §3.4, abbiamo osservato come il teorema 3.3.7 di sequenzializzazione (pag. 197) getti un ponte tra le condizioni di valutazione degli artefatti logici e la possibilità di rappresentare questi per mezzo di una procedura generativa, secondo la formula

$$\pi \textit{ è sintatticamente corretta se e solo se } \pi \textit{ è logicamente legittima} \tag{3.4.24}$$

L'apporto di *GdI*, con la sua distinzione tra "soggettivo" (commutativo) e "oggettivo" (non commutativo), ci permette ora di riaffermare e allo stesso tempo raffinare la descrizione di questo stretto rapporto tra valutazione e sintatticità, o generatività, l'identificazione dei cui termini, una volta usciti dal dominio ristretto e sicuro di MLL, come osservato già in §1.1.3, porta a delle aporie logiche (l'incompletezza). In effetti, è soltanto con il riferimento a un'algebra commutativa di proiezioni (di loci) che la convergenza dell'interazione si trasforma in convergenza della computazione (nilpotenza):

possiamo vedere nella valutazione non più la diretta esibizione di una procedura generativa (come era nel caso ristretto di MLL e dei proof-net) quanto la sola *possibilità* di trovarne una, col ricorso a ipotesi di commutazione, vale a dire qualcosa come

$$\pi \text{ è logicamente legittima se e solo se è possibile trovare, in una qualche sintassi, una procedura generativa per } \pi \tag{3.4.24}$$

La dimensione trascendentale del teorema 3.3.7 di sequenzializzazione starebbe allora nel suo riferirsi esclusivamente alle condizioni di possibilità *che la normatività della valutazione delimita per l'esistenza di una sintassi, senza riferimento ad alcuna sintassi in particolare.* E' in questo senso che i risultati di incompletezza, una volta eliminato il riferimento a una sintassi in particolare, non compromettono l'indagine normativa ed anzi, attraverso la fondamentale connessione con la questione dello spazio e del tempo di esecuzione, aprono la strada a una indagine morfologica, attraverso le algebre di Von Neummann, dei requisiti sintattici propri di ogni classe di complessità. Se infatti il primo teorema di Gödel corrisponde alla refutazione della seguente tesi (con la lettera S si intende una sintassi, un sistema deduttivo):

$$\exists S \text{ t. c. } \pi \text{ è logicamente corretta se e solo se } S \text{ genera } \pi \tag{4.7.11}$$

Questo stesso teorema è invece compatibile con la tesi, corrispondente alla versione "narrow scope" della precedente:

$$\pi \text{ è logicamente corretta se e solo se } \exists S \text{ t. c. } S \text{ genera } \pi \tag{4.7.12}$$

la quale costituisce, più che una diretta conseguenza della sequenzializzazione "soggettiva" che ha luogo nella GdI, una prospettiva, una linea lungo la quale proseguire la ricerca sulla sintassi trascendentale.

Del resto, i risultati opposti, ovvero quelli di completezza (interna), (per la logica "perfetta", ovvero per $MALL$), alla luce del teorema 3.3.7 (pag. 197) e del riferimento al quoziente normativo, nel mostrare la piena validità dell'approccio generativo-composizionale, non sono per questo da considerare in chiave "riduzionista", vale a dire come se mostrassero semplicemente che ogni enunciato vero è derivabile in una certa sintassi scelta una volta per tutte: piuttosto essi individuano le condizioni di possibilità per una sintassi che sia completa nel senso ben più specifico enunciato dalla definizione 4.7.3. *La tesi è molto più forte: per ogni sintassi resa possibile dal teorema e per ogni design vincente $\mathfrak{a}$ nell'opportuno biortogonale, esisterà una dimostrazione in quella sintassi che sta nella stessa classe di equivalenza indotta dal quoziente normativo, di $\mathfrak{a}$.*, il che può essere sintetizzato con la formula

$$\forall S \text{ (adeguata), } \pi \text{ è logicamente corretta se e solo se } S \text{ genera } \pi \tag{4.7.13}$$

senza grossi problemi di "narrow scope" e "wide scope". La richiesta che S sia "adeguata" può essere sostituita con la richiesta generale che S permetta di rappresentare tutte le funzioni computabili (qualcosa di analogo alla Σ^0_1-completezza di PA - vd. §1.1.3). Ben più interessante, nella visione "orientata alla complessità" che stiamo seguendo, è modificare di volta in volta il senso dell'espressione "adeguata", sostituendovi forme limitate di completezza (come la P-completezza, o la NL-completezza), per indagare la relazione, emersa per la prima volta con le logiche leggere (vd. §2.1.4), tra correttezza logica e requisiti in termini di risorse spazio-temporali.

In definitiva, la completezza interna non giustifica un approccio composizionale in particolare, ma la possibilità in generale di un approccio composizionale. La refutazione della tesi dell'inferenzialità delle norme risulta così paradossalmente forse più incisiva per il frammento completo della logica che per quello incompleto.

In conclusione, l'avere un senso, vale a dire, sostanzialmente, condizioni di valutazione, è equivalente alla possibilità di trovare, in ogni contesto, un modo per esprimerlo, senza che debba esistere una "sintassi a priori", ovvero un modo, o anche un catalogo, stabilito una volta per tutte, che permetta di esprimere tale senso in ogni contesto. E' per questo motivo che capire quale siano le regole che stanno dietro a una dimostrazione può esserci utile in un caso, ma può anche deviarci profondamente in un altro (si pensi ai "connettivi generalizzati" della ludica - §2.2.1). Tornano in mente, quanto mai opportune, le perplessità di Wittgenstein:

> Come faremo allora a spiegare a qualcuno cos'è un gioco? Io credo che gli descriveremmo alcuni *giochi*, e poi potremmo aggiungere: ≪questa, e *simili cose*, si chiamano "giochi" ≫. E noi stessi, ne sappiamo di più? Forse soltanto all'altro non siamo in grado di dire esattamente che cos'è un gioco? - Ma questa non è ignoranza. Non conosciamo i confini perchè non sono tracciati. Come s'è detto, possiamo - per uno scopo particolare - tracciare un confine. Ma con ciò solo rendiamo il concetto utilizzabile? Niente affatto! Tranne che per questo scopo particolare. (Wittgenstein, [73])

> Come ho detto: non pensare, ma osserva. (Wittgenstein, [73])

Conclusioni?

Dal momento che l'obiettivo principale di questa tesi, piuttosto che stabilire risultati definitivi, è quello di proporre, suggerire, percorsi di indagine, di sostituire alcuni punti fermi sui fondamenti della logica con dei punti interrogativi, al posto di un elenco di conclusioni presenterò un elenco di domande, di questioni aperte o ancora da aprire, o anche di critiche nei confronti di alcune posizioni sostenute nella tesi, che richiedono un ulteriore approfondimento. Raggrupperò le questioni in tre sottogruppi: del primo sottogruppo faranno parte problemi, emersi nel corso dei capitoli, che riguardano la ricerca contemporanea sugli sviluppi della logica lineare, e che sono a tutt'oggi ancora in cerca di una soluzione definitiva. Del secondo sottogruppo faranno parte quei problemi, sempre di tipo essenzialmente tecnico, che invece mi sembra possano costituire linee di approfondimento alle questioni sollevate in questa tesi. Del terzo sottogruppo, infine, faranno parte quelle questioni, genuinamente filosofiche, di indirizzo tanto storiografico quanto di ricerca vera e propria, che sono state più o meno chiaramente individuate in queste pagine, ma che meritano un ben più accorto e particolareggiato approfondimento.

***Primo gruppo*: questioni tecniche rilevanti negli sviluppi della logica lineare**

(I.1) *Esponenziali in ludica?* Diverse soluzioni sono presentate in (Basaldella, Faggian [5]) e (Maurel, [53]), nessuna delle quali è attualmente considerata definitiva. In particolare, nessuno di questi approcci permette, al momento, di provare un teorema di "fedeltà", ovvero essenzialmente un teorema analogo al 2.2.7 che vale relativamente a $MALL$.

(I.2) *Proof-net per LL?* L'estensione dei proof-net al caso additivo costituisce un risultato piuttosto recente, che può essere trovato in (Girard, [36]), assieme al caso dei quantificatori. Per quanto riguarda la logica esponenziale, lo strumento che viene in genere, sotto varie forme, adoperato sono le cosiddette "scatole", la quali, tuttavia, come osserva lo stesso Girard, non sono altro che un espediente, un trucco, per introdurre i sequenti nelle reti, e non hanno quindi un grande valore esplicativo. Ancora più problematica è la questione delle costanti, che per la loro stessa natura sembrano radicalmente incompatibili con l'approccio dei grafi.

(I.3) *Quali classi di complessità sono caratterizzabili nella GdI?* In §4.4 si è fatto riferimento all'articolo (Pedicini, Piazza, [55]) nel quale si utilizza una particolare classe di gruppi discreti per rappresentare, nel fattore iperfinito di tipo $\mathbf{II}_1$ la classe delle funzioni in tempo elementare. I risultati di Girard, del resto, permettono al momento di caratterizzare nella *GdI* entrambe le logiche “leggere”, e con esse le classi di complessità P e $Elementary$, oltre alla classe NL discussa sopra. In (Girard, [43]) è inoltre discussa la possibilità di estendere la *GdI* eliminandone i vincoli che la legano ai formalismi logici, a partire dallo stesso riferimento alle matrici di permutazione, vale a dire, essenzialmente, ai proof-net (vd. §3.5). Fino a dove possano arrivare queste ricerche al momento è difficile prevederlo; del resto è lo stesso Girard a dimensionare le ambizioni di questa teoria algebrico-geometrica della complessità:

> [...] we are not supposed to explain ≪all ≫systems: it will be enough to explain a few *meaningful* ones. [...] In the same way, one should not seek a systematic account of complexity classes: some of them may be just ≪PhD classes ≫. (Girard, [44])

(I.4) *Come connettere l'impostazione “polarizzata” della ludica con la GdI?* Lo stesso Girard non sembra ancora convinto sul ruolo che la polarità possa assumere nella *GdI*: nella versione presentata in (Girard, [40]) è definita una forma di polarizzazione “oggettiva” dei comportamenti che conduce a risultati assai diversi da quelli della ludica. In (Girard, [43]), invece, la polarizzazione viene considerata una proprietà semplicemente “pragmatica” della logica.

D'altra parte, la lettura del teorema di sequenzializzazione data in §3.5 mostra una diretta connessione tra la polarità e, appunto, la sequenzializzazione dei grafi, il che mi sembra possa far pensare a un contenuto “soggettivo” del positivo e del negativo, collegato alla scomposizione di un grafo secondo l'alternanza, tipica delle dispute della ludica, di domanda e risposta. La questione è, ad oggi, del tutto aperta.

(I.5) *Come estendere concretamente i teoremi di completezza e incompletezza nella GdI?* In §4.7 è stata citato un passo da (Girard, [43]) in cui il logico francese congettura la possibilità di provare un teorema di completezza per il frammento Π^1 della logica della forma:

Ogni design vincente in **G** *è equivalente (modulo incarnazione in* **G***) a una dimostrazione (in un monoide epidittico dato)*

(4.7.14)

e di incompletezza per quello Σ^1 nella forma:

Per ogni monoide epidittico $\mathcal{E}$ *esiste un design vincente* $\mathfrak{d} \in \mathbf{G}$ *che non è equivalente (modulo incarnazione in* **G***) a nessuna dimostrazione in* $\mathcal{E}$

(4.7.15)

Per quanto riguarda la completezza interna, mentre il caso additivo corrisponde all'analogo del *mistero dell'incarnazione* (vd. §2.2.3) nella ludica, quello moltiplicativo non è stato, attualmente, ancora dimostrato.

***Secondo gruppo*: questioni tecniche rilevanti emerse in questa tesi**

(II.1) *L'identificazione tra gerarchia logica e gerarchia aritmetica può essere approfondita?* I risultati chiamati in §1.1.3 "teoremi di Dedekind", che compaiono in (Abrusci, [1]), sono la base di una rilettura in chiave puramente logica dei risultati più noti della logica del secolo scorso, vale a dire, essenzialmene, i teoremi di Π^1-completezza e Σ^1-incompletezza. Mi chiedo se sia possibile approfondire il ruolo giocato, nella dimostrazione di questi teoremi, dalle varie parti in gioco: i linguaggi, l'aritmetica, la logica. In particolare, è possibile dimostrare entrambi senza fare ricorso all'aritmetizzazione (e dunque al concetto di codifica), ma sfruttando soltanto gli strumenti della logica del secondo ordine?

(II.2) *I risultati sulle strutture di demoni possono essere perfezionati ed estesi all'intera teoria dei proof-net?* Nella descrizione delle strutture di demoni, per evitare di dover introdurre "scatole" o artifici più complessi, ho fatto la scelta (piuttosto drastica) di limitare tali strutture al caso in cui le conclusioni di un ✠-*link* sono etichettate da formule atomiche. E' possibile estendere questo approccio al caso più generale senza dover introdurre "scatole"? Mi chiedo inoltre se possa essere di un qualche interesse l'estensione delle strutture di demoni al caso additivo e più in generale ai casi più delicati discussi al punto (**I**.2).

(II.3) *Le due tesi espresse alla fine di §4.7 possono essere approfondite e trasformate in congetture esplicite?* Si tratta della tesi

$$\pi \textit{ è logicamente corretta se e solo se } \exists S \textit{ t. c. } S \textit{ genera } \pi \tag{4.7.16}$$

e della tesi

$$\forall S \textit{ (adeguata), } \pi \textit{ è logicamente corretta se e solo se } S \textit{ genera } \pi \tag{4.7.17}$$

L'idea è quella di servirsi dell'aspetto "trans-sintattico" della *GdI* per ottenere risultati generali sulle sintassi logiche. La prima tesi, in particolare, è connessa con la possibilità di coniugare il teorema di Σ^1-incompletezza (il primo teorema di Gödel, per capirci) con l'interpretazione data in §4.7 del ruolo giocato dal teorema di sequenzializzazione nella *GdI*. La seconda, invece, come osservato in §4.7, costituisce un ipotetico raffinamento del teorema di completezza (per il frammento Π^1 della logica), nel quale al posto della clausola "adeguata" possono essere poste richieste di completezza rispetto a classi di complessità computazionale, così da ottenere caratterizzazioni logiche, data una classe di complessità C e una famiglia $\mathcal{G}_C$ di comportamenti (dipendente da C), della classe C del tipo:

$$\forall S \textit{ se } S \textit{ è } C\textit{-completa, } \pi \in \mathbf{G} \in \mathcal{G}_C \textit{ è logicamente corretta se e solo se } S \textit{ genera } \pi \tag{4.7.18}$$

Il caso della completezza del frammento Π^1 dovrebbe allora corrispondere a richiedere come C l'insieme delle funzioni ricorsive parziali.

***Terzo gruppo*: questioni filosofiche da approfondire**

(III.1) *Quali sono le conseguenze semiotiche della "scommessa locativa" (§2.2.1) e più in generale dell'introduzione dei "loci"?* Girard introduce i "loci" attraverso una metafora informatica, quella dei file, cartelle, directory (vd. §2.2.1). In tal senso, mi sembra che si possa dire che i loci, piuttosto che costituire elementi virtuali di spazio, sono anzitutto dei segni che si riferiscono a elementi virtuali di spazio, e che anzi, in virtù della loro natura decomposizionale, conferiscono una struttura allo spazio cui danno accesso. D'altra parte, la non commutatività che viene loro attribuita nella *GdI* rappresenta la possibilità che queste strutturazioni dello spazio, che mi sembra si configurino già entro un orizzonte semiotico (contrariamente a quanto ho scritto con troppa facilità in alcuni passi della tesi), risultino reciprocamente incompatibili, in quanto la loro successiva applicazione può dare luogo a interferenze. In definitiva direi che lo statuto filosofico da attribuire all'impostazione locativa, emersa con la ludica e arricchitasi dall'incontro con la geometria non commutativa, costituiscano un terreno di ricerca semiotico originale e, per quel che ne so, ancora tutto da indagare.

(III.2) *L'analogia tra le conseguenze della "sintassi a posteriori" e le osservazioni di Wittgenstein sul "rule-following" può essere approfondita?* Mi chiedo in particolare se la relazione tra le dispute normative e i giochi linguistici abbozzata in §2.2.2 possa essere approfondita e se davvero si possa sostenere, come in molte parti del testo faccio, che l'impostazione della ludica sia compatibile con gli argomenti di Wittgenstein sul "seguire una regola", quanto meno con la lettura che, in §2.1.3, (con riferimento soprattutto alle interpretazioni di Crispin Wright) è stata data di questi. Mi chiedo inoltre se sia possibile rafforzare il parallelo, soltanto accennato tramite qualche citazione, tra le posizioni di Wittgenstein sulla natura "aperta" della necessità matematica e quanto emerge nella *GdI*, soprattutto in §4.5, sulla natura contestuale dei contenuti aritmetici (gli "interi NL" che in un contesto sono riconosciuti come numeri e in un altro come "n'importe quoi" (Girard, [43])).

(III.3) *E' possibile applicare sistematicamente la ludica come teoria del significato per le lingue naturali?* Esistono delle ricerche (vd. ad esempio (Fleury, Tronçon, [71])) che mirano ad applicare concretamente la ludica nel campo della pragmatica del linguaggio, per la rappresentazione dei dialoghi. Mi chiedo se sia più in generale possibile applicare la prospettiva della "sintassi a posteriori", nel senso di una prospettiva che non imponga regole, ma che descriva i processi entro cui si costituiscono forme di interazione che possiamo interpretare come disciplinati da regole, alle lingue naturali, tanto da un punto di vista sintattico quanto da quello semantico e pragmatico.

(III.4) *Come dovrebbe essere interpretata, da un punto di vista semiotico, la natura finita e iperfinita dell'algebra dei loci della GdI?* Quando impariamo a contare, impariamo in particolare che non esiste un numero oltre il quale non è più possibile contare. La natura finita e iperfinita dell'algebra dei loci, d'altra parte, sembra implicare che, per ogni specifico contesto, esiste un limite di spazio a ciò che può essere contato (senza produrre interferenza con ciò che si è contato fino a quel momento), così come esiste un limite di spazio ai numeri che possono essere scritti su una lavagna. Tuttavia, se n costituisce tale limite, allora, per contare fino a $n+1$ sarà necessario cancellare la lavagna e riscrivere tutti i numeri un po' più piccoli (esattamente quello che succede quando viene applicata una contrazione nella *GdI*). Scrive Girard:

> Me rappelant l'incrédulité éprouvée, enfant, à l'idée de ne pouvoir m'éloigner indéfiniment de la Terre, je conçois que l'hypothèse - qui est une intuition possible de l'hyperfinitude - d'un langage fini peut être choquante. Pourtant, elle n'est rien d'autre que l'équivalent, dans le monde de la pensée, de la finitude de l'espace. (Girard. [43])

La vivacità e l'originalità filosofica, connesse con la solida base algebrica, di queste questioni mi sembra richieda una indagine approfondita, che, come indirizzo, situerei al confine tra semiotica e filosofia della mente (possibile che quando una persona conta fra sè e sè esista un limite teorico, dipendente dal contesto, allo spazio - in un qualche senso di "spazio" - entro cui può contare senza dover "riscrivere" tutto da capo, come nel caso della lavagna?).

(III.5) *Quali sono le conseguenze da trarre, tanto per i fondamenti della logica quanto per la stessa filosofia del linguaggio, dalla assoluta preminenza dei contesti sulle essenze che emerge dalla lettura della GdI data nel quarto capitolo?* L'idea che emerge, mettendo insieme tutte le riflessioni svolte nel testo attorno alla nozione di "interferenza" è che, dato un qualunque artefatto sintattico, per esempio la descrizione di un algoritmo, anche qualora tale artefatto veicoli un contenuto chiaro (nel nostro caso, possiamo pensare a una funzione matematica), esiste un contesto in cui tale artefatto non può essere usato senza interferenza, e in cui dunque non può esprimere il suo contenuto. Viene dunque da chiedersi, a conclusione di questo lungo percorso, che senso può avere parlare di un tale contenuto "indipendente dal contesto", la funzione intesa come "essenza matematica", laddove ogni sua concreta manifestazione (sintattica) non può che tradire la sua stessa natura "essenziale"?

Appendice A

Linguaggi e sistemi deduttivi

A.1 I linguaggi

Introduciamo la nozione di "variabile speciale", attraverso la quale potremo pervenire a una definizione del tutto generale dei linguaggi in uso nella logica.

Definizione A.1.1 (variabili speciali)**.** *Sia V un insieme (finito o infinito) i cui elementi vengono detti* variabili*, tale che c'è in V una variabile X per insiemi e ogni altra variabile ha uno dei seguenti tipi:*

- *tipo X: in tal caso è detta* variabile speciale individuale di tipo X*;*
- *tipo $X^{(X^n)}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$: in tal caso è detta* variabile speciale per funzioni n-arie *su X;*
- *tipo $Bool(= \{0,1\})$: in tal caso è detta* variabile speciale proposizionale*;*
- *tipo $Bool^{(X^n)}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$: in tal caso è detta* variabile speciale per predicati n-ari su X *(e* variabile speciale per proprietà *per $n = 1$,* per relazioni *per $n > 1$).*

Un insieme di variabili siffatto è detto insieme di variabili speciali su X*, quando le variabili speciali proposizionali e per predicati soddisfano le seguenti condizioni:*

- *esiste una relazione binaria simmetrica $\overset{|}{\sim}$ sull'insieme delle variabili speciali proposizionali $\mathcal{P}$ tale che $\mathcal{P}$ è l'unione disgiunta di due insiemi $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ e per ogni variabile speciale proposizionale $P \in \mathcal{P}_1$, esiste un'unica variabile speciale proposizionale $Q \in \mathcal{P}_2$ tale che $(P,Q) \in \overset{|}{\sim}$. Scriveremo $Q = \neg P$ e $P = \neg Q$;*
- *per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, esiste una relazione binaria simmetrica $\overset{|}{\sim}$ sull'insieme delle variabili speciali per predicati n-ari $\mathcal{R}^n$ tale che $\mathcal{R}^n$ è l'unione disgiunta di due insiemi $\mathcal{R}^n_1, \mathcal{R}^n_2$ e per ogni variabile speciale per predicati n-ari $P \in \mathcal{R}^n_1$, esiste un'unica variabile speciale per predicati n-ari $Q \in \mathcal{R}^n_2$ tale che $(P,Q) \in \overset{|}{\sim}$. Scriveremo $Q = \neg P$ e $P = \neg Q$.*

Definizione A.1.2 (linguaggio del primo ordine)**.** *Un linguaggio $\mathcal{L}_V$ del primo ordine è dato da una tripla $(\mathcal{A}, \mathcal{T}, \frac{\mathcal{F}}{\rho})$ di insiemi detti rispettivamente, insieme* alfabeto*, insieme dei* termini*, insieme delle (classi di equivalenza di)* formule *tali che:*

- $\mathcal{A}$ *contiene l'insieme $V - \{X\}$, un insieme $\mathcal{V} = \{v_0, v_1, \dots\}$ numerabile i cui elementi sono detti* variabili vincolabili di tipo X*, un insieme di simboli per coppie di costanti logiche e di quantificatori dette* duali *e un insieme di simboli ausiliari (ad esempio le parentesi "(", ")");*
- $\mathcal{T}$ *è definito induttivamente come segue:*
  - *Ogni variabile speciale individuale di V e ogni variabile individuale vincolabile di V è un termine;*
  - *Se $n \in \mathbb{N}, n > 0$ e $f \in V$ è una variabile speciale per funzione n-aria e $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}$, allora la successione di simboli $f(t_1, \dots, t_n)$ è un termine;*
  - *se t e s sono termini e $x \in \mathcal{V}$, allora la successione di simboli $t[s/x]$ è un termine ottenuto rimpiazzando in t ogni occorrenza di x con il termine s;*
  - *niente altro è un termine.*
- $\mathcal{F}$ *è definito induttivamente come segue:*
  - *se $\mathbf{T}, \mathbf{U}$ sono costanti logiche 0-arie duali di $\mathcal{A}$, allora sono formule e si ha $\neg\mathbf{T} = \mathbf{U}$, e dunque $\neg\neg\mathbf{T} = \mathbf{T}$;*
  - *se P, Q sono variabili speciali proposizionali di V, con $(P, Q) \in \overset{\downarrow}{\sim}$, allora sono formule e si ha $\neg P = Q$ e dunque $\neg\neg P = P$;*
  - *$n \in \mathbb{N}, n > 0$, e P, Q variabili speciali per predicati n-ari di V, con $(P, Q) \in \overset{\downarrow}{\sim}$ $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}$, allora le successioni di simboli $P(t_1, \dots, t_n)$ e $Q(t_1, \dots, t_n)$ sono formule e inoltre $\neg P(t_1, \dots, t_n) = Q(t_1, \dots, t_n)$ e dunque $\neg\neg P(t_1, \dots, t_n) = P(t_1, \dots, t_n)$;*
  - *se $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$, con $n \in \mathbb{N}, n > 0$ (e $v_0, \dots, v_k \in V, k \in \mathbb{N}, k > 0$), e $\odot, \oslash$ sono due costanti logiche n-arie duali (oppure quantificatori duali che richiedono k variabili individuali vincolabili), allora le successione di simboli $A_1 \odot \cdots \odot A_n$ e $A_1 \oslash \cdots \oslash A_n$ sono formule (e $\odot v_0, \dots, v_k(A_1)$ e $\oslash v_0, \dots, v_k(A_1)$ sono formule) e si ha $\neg(A_1 \odot \cdots \odot A_n) = \neg A_1 \oslash \cdots \oslash \neg A_n$ e dunque $\neg\neg(A_1 \odot \cdots \odot A_n) = (A_1 \odot \cdots \odot A_n)$ (e $\neg(\odot v_0, \dots, v_k(A_1)) = \oslash v_0, \dots, v_k(\neg A_1)$ e dunque $\neg\neg(A_1 \odot \cdots \odot A_n) = A_1 \odot \cdots \odot A_n$);*
  - *niente altro è una formula*

Inoltre, un'occorrenza di una variabile individuale vincolabile y in una formula $A \in \mathcal{F}$ è detta libera *o* vincolata *secondo le seguenti condizioni:*

- *se A è una variabile speciale per predicati n-ari, y è libera in A;*
- *se $A = A_1 \odot \cdots \odot A_n$, allora y è libera (vincolata) in A se e solo se è libera (vincolata) in A_i, per ogni $i \in \mathbb{N}, 0 < i \leq n$;*

- *se* $A = \odot v_1, \dots, v_k(A')$, *allora* y *è libera in* A *se e solo se* $y \neq v_i$, *per ogni* $i \in \mathbb{N}, 0 < i \leq k$ *e* y *è libera in* A'*;* y *è vincolata in* A *se e solo se non è libera in* A*;*

Una formula è detta chiusa *se non ammette alcuna occorrenza libera di variabili individuali vincolabili,* aperta *se non è chiusa.*

Infine, la relazione di equivalenza ρ *su* $\mathcal{F}$ *è definita come segue:*

- *per ogni* $A \in \mathcal{F}$, $A\rho A$*;*
- *se* $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n \in \mathcal{F}$ *e* $A_1\rho B_1, \dots, A_n\rho B_n$, *allora* $A_1 \odot \dots \odot A_n \rho B_1 \odot \dots \odot B_n$*;*
- *se* $A(y_1, \dots, y_k, x_1, \dots, x_h)$ *e* $B(y_1, \dots, y_k, x_1, \dots, x_h)$, *con* $h, k \in \mathbb{N}, h, k > 0$ *sono formule con esattamente* $k + h$ *occorrenze di variabili libere, e* $v_1, \dots, v_h$ *sono variabili individuali vincolabili che non occorrono in nessuna delle due formule, allora, se* $A(y_1, \dots, y_k, x_1[v_1/x_1], \dots, x_h[v_h/x_h])\rho B(y_1, \dots, y_k, x_1[v_1/x_1], \dots, x_h[v_h/x_h])$, *si ha* $\odot x_1, \dots, x_h(A(y_1, \dots, y_k, x_1, \dots, x_h)\rho \odot x_1, \dots, x_h(B(y_1, \dots, y_k, x_1, \dots, x_h)$.

L'insieme $\frac{\mathcal{F}}{\rho}$ *è il quoziente di* $\mathcal{F}$ *indotto da* ρ *e si ha che la* sostituzione $[A(y_1, \dots, y_k, x)]_\rho[t/x]$, *con* t *termine, è data da* $[A'(y_1, \dots, y_k, x[t/x])]_\rho$, *con* $A'(y_1, \dots, y_k, x) \sim_\rho A'(y_1, \dots, y_k, x)$, *tale che nessuna variabile di* t *è vincolata in* $A'(y_1, \dots, y_k, x)$.

Definizione A.1.3 (linguaggio del secondo ordine)**.** *Un linguaggio* $\mathcal{L}_V$ *del secondo ordine è definito come un linguaggio del primo ordine, con in più le seguenti condizioni:*

- *L'insieme* $\mathcal{A}$, *oltre all'insieme* $V - \{X\}$, *l'insieme* $\mathcal{V} = \{v_0, v_1, \dots\}$ *delle variabili vincolabili di tipo* X *e l'insieme delle coppie duali di costanti logiche e quantificatori, contiene un insieme di coppie di quantificatori duali del secondo ordine e un insieme numerabile di coppie* $\mathcal{V}_0^2 = \{V_0, \neg V_0, V_1, \neg V_1, \dots\}$ *i cui elementi sono detti* variabili proposizionali vincolabili*, sul quale si estende la relazione* $\overset{\downarrow}{\sim}$ *nel seguente modo:* $\forall i \in \mathbb{N}, (V_i, \neg V_i) \in \overset{\downarrow}{\sim}$. $\mathcal{A}$ *contiene inoltre, per ogni* $n > 0$, *un insieme numerabile* $\mathcal{V}_n^2 = \{V_0^n, \neg V_0^n, \dots\}$ *i cui elementi sono detti* variabili vincolabili per predicati n-ari *e sono tali che, per ogni* $i \in \mathbb{N}$, $(V_i^n, \neg V_i^n) \in \overset{\downarrow}{\sim}$.
- *L'insieme* $\mathcal{F}$ *è esteso nel seguente modo:*
  - *ogni elemento di* $\mathcal{V}^2, k \in \mathbb{N}$ *è una formula e si ha,* $\forall i \in \mathbb{N}$ $\neg\neg V_i = V_i$.
  - $\forall n \in \mathbb{N}$, *se* $V_i^n, \neg V_i^n \in \mathcal{V}_n^2$ *e* $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}$, *allora* $V_i^n(t_1, \dots, t_n)$ *e* $\neg V_i^n(t_1, \dots, t_n)$ *sono formule e* $\neg\neg V_i^n(t_1, \dots, t_n) = V_i^n(t_1, \dots, t_n)$.
  - *se* A *è una formula e* $\odot, \oslash$ *sono quantificatori duali del secondo ordine che richiedono* k *variabili proposizionali vincolabili (o variabili vincolabili per predicati* n*-ari), allora* $\odot V_0, \dots, V_k(A)$ *e* $\oslash V_0, \dots, V_k(A)$ *(risp.* $\odot V_0^n, \dots, V_k^n(A)$ *e* $\oslash V_0^n, \dots, V_k^n(A)$*) sono formule e si ha* $\neg(\odot V_0, \dots, V_k(A)) = \oslash V_0, \dots, V_k(\neg A)$ *(risp.* $\neg(\odot V_0^n, \dots, V_k^n(A)) = \oslash V_0^n, \dots, V_k^n(\neg A)$*) e dunque* $\neg\neg(\odot V_0, \dots, V_k(A)) = \odot V_0, \dots, V_k(A)$ *(risp.* $\neg\neg \odot V_0^n, \dots, V_k^n(A) = \odot V_0^n, \dots, V_k^n(A)$*).*

- *se A, B sono formule e B ha esattamente k variabili individuali libere e h variabili individuali vincolate, allora, per ogni variabile vincolabile per predicati $k+h$-ari (e variabile vincolabile proposizionale nel caso $h = k = 0$) V_i^{k+h}, la successione di simboli $A[B/V_i^{k+h}]$ corrisponde alla formula ottenuta sostituendo ogni (eventuale occorrenza) di $V_i^{k+h}(t_1, \dots, t_{k+h})$ in A, per opportuni termini $t_1, \dots, t_{k+h}$, con un'occorrenza di $B(t_1, \dots, t_{k+h})$.*

- *una variabile proposizionale vincolabile V_i (risp. variabile vincolabile per predicati n-ari V_i^n) è detta* libera *in una formula A se*
  - *$A \in \mathcal{V}^2$ (risp. $A \in \mathcal{V}_n^2$);*
  - *$A = A_1 \odot \cdots \odot A_n$ e V_i (risp. V_i^n) è libera in $A_k, \forall k \in \mathbb{N}, 0 < k \leq n$;*
  - *$A = \odot V_{i_1}, \dots, V_{i_k}(A')$ e $V_i \neq V_{i_h}, 1 \leq h \leq k$ (risp. $A = \odot V_{i_1}^n, \dots, V_{i_k}^n(A')$ e $V_i^n \neq V_{i_h}^n, 1 \leq h \leq k$).*

Una formula è detta chiusa al secondo ordine *se non ammette alcuna occorrenza libera di variabili vincolabili proposizionali e di variabili vincolabili per predicati n-ari. La relazione di equivalenza ρ è estesa nel seguente modo:*

- *$\forall n, \forall i \in \mathbb{N}, \forall V_i \in V_0^2, V_i^n \in V_n^2$, si ha che $V_i \rho V_i$ e $V_i^n \rho V_i^n$;*
- *siano A, B formule e scriviamo $A(V_{i_1}, \dots, V_{i_k})$ per intendere che in A occorrono le variabili vincolabili proposizionali $V_{i_1}, \dots, V_{i_k}$. Allora, per ogni quantificatore del secondo ordine $\odot$ che richiede h variabili vincolabili proposizionali, se per ogni variabile vincolabile proposizionale $V_{j_1}, \dots, V_{j_h}$ che non occorre nelle formule A e B si ha*

$$A(V_{i_1}, \dots V_i, \dots V_{i_k}, V_{i_{k+1}}[V_{j_1}/V_{i_{k+1}}], \dots, V_{i_{k+h}}[V_{j_h}/V_{i_{k+h}}]) \\ \rho B(V_{i_1}, \dots V_i, \dots V_{i_k}, V_{i_{k+1}}[V_{j_1}/V_{i_{k+1}}], \dots, V_{i_{k+h}}[V_{j_h}/V_{i_{k+h}}]) \tag{A.1.1}$$

  allora

$$\odot V_{i_{k+1}} \dots V_{i_{k+h}}(A(V_{i_1}, \dots V_i, \dots V_{i_k}, V_{i_{k+1}}, \dots, V_{i_{k+h}})) \\ \rho \odot V_{i_{k+1}} \dots V_{i_{k+h}}(B(V_{i_1}, \dots V_i, \dots V_{i_k}, V_{i_{k+1}}, \dots, V_{i_{k+h}})) \tag{A.1.2}$$

- *siano A, B formule e scriviamo $A(V_{i_1}^n, \dots, V_{i_k}^n)$ per intendere che in A occorrono le variabili vincolabili per predicati n-ari $V_{i_1}^n, \dots, V_{i_k}^n$. Allora, per ogni quantificatore del secondo ordine $\odot$ che richiede h variabili vincolabili per predicati n-ari, se per ogni variabile vincolabile per predicati n-ari $V_{j_1}^n, \dots, V_{j_h}^n$ che non occorre nelle formule A e B si ha*

$$A(V_{i_1}^n, \dots V_i^n, \dots V_{i_k}^n, V_{i_{k+1}}^n[V_{j_1}^n/V_{i_{k+1}}^n], \dots, V_{i_{k+h}}^n[V_{j_h}^n/V_{i_{k+h}}^n]) \\ \rho B(V_{i_1}^n, \dots V_i^n, \dots V_{i_k}^n, V_{i_{k+1}}^n[V_{j_1}^n/V_{i_{k+1}}^n], \dots, V_{i_{k+h}}^n[V_{j_h}^n/V_{i_{k+h}}^n]) \tag{A.1.3}$$

allora

$$\odot V^n_{i_{k+1}} \dots V^n_{i_{k+h}} (A(V^n_{i_1}, \dots V^n_i, \dots V^n_{i_k}, V^n_{i_{k+1}}, \dots, V^n_{i_{k+h}}))$$
$$\rho \odot V^n_{i_{k+1}} \dots V^n_{i_{k+h}} (B(V^n_{i_1}, \dots V^n_i, \dots V^n_{i_k}, V^n_{i_{k+1}}, \dots, V^n_{i_{k+h}})) \tag{A.1.4}$$

L'insieme $\frac{\mathcal{F}}{\rho}$ è il quoziente di $\mathcal{F}$ indotto da ρ e si ha che la sostituzione del secondo ordine $[A(V_1, \dots, V_k, V_{k+1})]_\rho[B/V_{k+1}]$*, con B formula senza viariabili individuali nè libere nè vincolate, è data da $[A'(V_1, \dots, V_k, V_{k+1}[B/V_{k+1}])]_\rho$, con*
$A'(V_1, \dots, V_k, V_{k+1}) \sim_\rho A(V_1, \dots, V_k, V_{k+1})$*, tale che nessuna variabile vincolabile proposizionale di B è vincolata in $A'(V_1, \dots, V_k, V_{k+1})$ (similmente per il caso delle variabili vincolabili per predicati n-ari).*

Con abuso di notazione, scriveremo, dato un linguaggio $\mathcal{L}$, $A \in \mathcal{L}$ per intendere che A è una formula di $\mathcal{L}$.

Possiamo a questo punto descrivere i linguaggi adoperati nella presente tesi: si noti che, in virtù delle definizioni date, per caratterizzare un linguaggio sarà sufficiente descriverne l'alfabeto e stabilire se si tratta di un linguaggio del primo o del secondo ordine.

($\mathcal{L}_{LK}$) è detto *linguaggio di LK* ogni linguaggio del primo ordine il cui alfabeto contiene $V, \mathcal{V}$, per un certo insieme di variabili speciali V, la coppia di costanti logiche 0-arie $(\mathbf{T}, \mathbf{F})$, la coppia di costanti logiche binarie $(\wedge, \vee)$ e la coppia di quantificatori che richiedono una variabile vincolabile individuale $(\forall, \exists)$ (la costante logica binaria $\rightarrow$ è definita da $A \rightarrow B := \neg A \vee B$).

($\mathcal{L}_{LJ}$) Si tratta del linguaggio $\mathcal{L}_{LK}$.

($\mathcal{L}_{LK^2}$) è detto *linguaggio di LK^2* ogni linguaggio del secondo ordine ottenuto a partire dall'alfabeto di $\mathcal{L}_{LK}$ cui viene aggiunto l'insieme $\mathcal{V}^2$ e la coppia di quantificatori del secondo ordine che richiedono una variabile vincolabile proposizionale o per predicati n-ari $(\forall^2, \exists^2)$ (l'apice "^{2}" sarà in genere omesso).

($\mathcal{L}_{LL}$) è detto *linguaggio di LL* ogni linguaggio del primo ordine il cui alfabeto contiene $V, \mathcal{V}$, per un certo insieme di variabili speciali V, le coppie di costanti logiche 0-arie $(\mathbf{1}, \bot), (\mathbf{0}, \top)$, la coppia di costanti logiche 1-arie $(!, ?)$ e le coppie di costanti logiche binarie $(\otimes, \invamp), (\oplus, \&)$. Per distinguere la negazione classica da quella lineare, al simbolo $\neg$ sarà sostituito il simbolo $\cdot^\bot$.

($\mathcal{L}_{PA}$) E' il linguaggio di LK ottenuto a partire dal seguente insieme di variabili speciali V_{PA}:

- l'unica variabile di tipo $X := \underline{\mathbb{N}}$ è $\underline{0}$.
- l'unica variabile di tipo X^{X^1} è $\underline{s}$.
- l'unica variabile di tipo $Bool^{X^2}$ è $\simeq$.

($\mathcal{L}_{PA^2}$) E' il linguaggio di LK^2 ottenuto a partire da V_{PA}.

A.2 Il calcolo dei sequenti

Nella presente tesi, con le espressioni "sistema deduttivo", "sistema formale" o "sintassi formale" si fa riferimento a ciò di cui il calcolo dei sequenti costituisce un tipico esempio. Questa sezione dell'appendice sarà limitata alla presentazione del formalismo del calcolo dei sequenti, mentre per altri sistemi deduttivi, come la deduzione naturale, adoperati nel testo si rimanda a (Schwichtenderg, Troelstra, [68]) e (Prawitz, [56]).

Definizione A.2.1 (sequente, presentazione di sequente)**.** *Un* sequente S *su un linguaggio* $\mathcal{L}$ *è un insieme finito di occorrenze di formule di* $\mathcal{L}$*. Se* S *è un sequente e* Γ *una sequenza finita di tutti gli elementi di* S*, allora* $\vdash \Gamma$ *è detto* presentazione del sequente S.

Definizione A.2.2 (sistema deduttivo nel calcolo dei sequenti)**.** *Un* sistema deduttivo $\mathbf{S}$*, di linguaggio* $\mathcal{L}$*, nel calcolo dei sequenti è una successione* $(\mathcal{R}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *di insiemi, in cui* $\mathcal{R}_n$ *è detto* insieme delle regole n-arie di $\mathbf{S}$ *ed i suoi elementi sono del tipo:*

$$\frac{\vdash \Gamma_1 \quad \dots \quad \vdash \Gamma_n}{\vdash \Gamma} \ (R_n) \tag{A.2.1}$$

in cui le presentazioni di sequenti su $\mathcal{L} \vdash \Gamma_i, 1 \leq i \leq n$ *sono detti* premesse *di* R_n *e la presentazione di sequente su* $\mathcal{L} \vdash \Gamma$ *è detta conclusione di* R_n*.*

Dato un sistema deduttivo $\mathbf{S}$ *su un linguaggio* $\mathcal{L}$*, ed un insieme* M *di formule di* $\mathcal{L}$*, la classe dei sequenti* derivabili in $\mathbf{S}$ a partire da M *è definita come segue:*

(i) *se* $A \in M$*, allora* $\vdash A$ *è derivabile in* $\mathbf{S}$ *da* M*;*

(ii) *se* $\vdash \Gamma$*, presentazione di un sequente* S*, è conclusione di una regola* 0*-aria di* $\mathbf{S}$*, allora* S *è derivabile in* $\mathbf{S}$ *da* M*;*

(iii) *se* $\vdash \Gamma_1, \dots, \vdash \Gamma_n$ *sono presentazioni di sequenti* $S_1, \dots, S_n$ *derivabili in* $\mathbf{S}$ *da* M*, e premesse di una regola* n*-aria di* $\mathbf{S}$*, la cui conclusione* $\vdash \Gamma$ *è presentazione di un sequente* S*, allora* S *è derivabile in* $\mathbf{S}$ *da* M*.*

(iv) *nient'altro è derivabile in* $\mathbf{S}$ *da* M*.*

Nel caso in cui S *è derivabile in* $\mathbf{S}$ *da* $M = \emptyset$*, diremo semplicemente che* S *è derivabile in* $\mathbf{S}$*.*

I sistemi deduttivi considerati nella presente tesi sono i seguenti:

Definizione A.2.3 (LK)**.** **(**$\mathcal{R}_0$**)**

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\dfrac{}{\vdash A, \neg A} \ (Ax)} \\ \dfrac{}{\vdash \Gamma, \mathbf{V}} \ (\mathbf{V}_\top) & \dfrac{}{\vdash \mathbf{V}} \ (\mathbf{V_1}) \end{array} \tag{A.2.2}$$

($\mathcal{R}_1$)

$$
\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \sigma(\Gamma)}\ (Ex) \qquad \sigma \in S_{\sharp\Gamma}
$$
$$
\frac{\vdash \Gamma, A, A}{\vdash \Gamma, A}\ (C) \qquad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, A}\ (W)
$$
$$
\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, \mathbf{F}}\ (\mathbf{F}_\bot) \tag{A.2.3}
$$
$$
\frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \vee B}\ (\vee_{⅋}) \qquad \frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, A \vee B}\ (\vee^1_\oplus) \qquad \frac{\vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \vee B}\ (\vee^2_\oplus)
$$
$$
\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, \forall x A}\ (\forall) \qquad x \notin FV(\Gamma) \qquad \frac{\vdash \Gamma, A[t/x]}{\vdash \Gamma, \exists x A}\ (\exists)
$$

dove $FV(\Gamma) = \bigcup_{A \in S} \{$*variabili individuali vincolabili libere in* $A\}$*, con* Γ *presentazione di* S*.*

($\mathcal{R}_2$)

$$
\frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Gamma, \neg A}{\vdash \Gamma, \Delta}\ (cut)
$$
$$
\frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Delta, B}{\vdash \Gamma, \Delta A \wedge B}\ (\wedge_\otimes) \qquad \frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \wedge B}\ (\wedge_\&) \tag{A.2.4}
$$

Definizione A.2.4 (*LJ*)**.** *Ogni presentazione di sequente di LJ è del tipo* $\Gamma \vdash \Delta$*, con* $\sharp\Delta \leq 1$*.*

($\mathcal{R}_0$)

$$
\frac{}{\vdash A \vdash A}\ (Ax)
$$
$$
\frac{}{\Gamma \vdash \mathbf{V}}\ (\mathbf{V}_\top) \qquad \frac{}{\vdash \mathbf{V}}\ (\mathbf{V_1}) \tag{A.2.5}
$$

($\mathcal{R}_1$)

$$
\begin{array}{cccc}
 & \dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\sigma(\Gamma) \vdash \Delta}\ (Ex) & \sigma \in S_{\sharp\Gamma} & \\
\dfrac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (C) & \dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (W_l) & \dfrac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash A}\ (W_r) & \\
 & \dfrac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \mathbf{F}}\ (\mathbf{F}_\perp) & & \\
\dfrac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma A \wedge B \vdash \Delta}\ (\wedge_l) & \dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee_r^1) & \dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee_r^2) & \\
 & \dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}\ (\rightarrow_r) & & \\
\dfrac{\Gamma, A[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x A \vdash \Delta}\ (\forall_l) & \dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x A}\ (\forall_r) & x \notin FV(\Gamma) & \\
\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x A \vdash \Delta}\ (\exists_l) \quad x \notin FV(\Gamma) & \dfrac{\vdash \Gamma, A[t/x]}{\vdash \Gamma, \exists x A}\ (\exists_r) & &
\end{array}
\tag{A.2.6}
$$

dove $FV(\Gamma) = \bigcup_{A \in S} \{$*variabili individuali vincolabili libere in* $A\}$*, con* Γ *presentazione di* S*.*

($\mathcal{R}_2$)

$$
\begin{array}{ccc}
 & \dfrac{\Gamma, A \vdash \Phi \quad \Delta \vdash A}{\Gamma, \Delta \vdash \Phi}\ (cut) & \\
\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma A \vee B \vdash \Delta}\ (\vee_l) & & \dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\vdash \Gamma, \Delta \vdash A \wedge B}\ (\wedge_r) \\
 & \dfrac{\Gamma, B \vdash \Phi \quad \Delta \vdash A}{\Gamma, \Delta, A \rightarrow B \vdash \Phi}\ (\rightarrow_l) &
\end{array}
\tag{A.2.7}
$$

Definizione A.2.5 (LL)**.** *vd. definizioni 1.2.14,1.2.15.*

Definizione A.2.6 (LK^2)**.** *E' il sistema deduttivo di linguaggio $\mathcal{L}_{LK^2}$ ottenuto a partire da LK aggiungendo le seguenti regole unarie:*

$$
\begin{array}{cccc}
\dfrac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, \forall X A}\ (\forall_0^2) & X \notin FV_0^2(\Gamma) & \dfrac{\vdash \Gamma, A[B/X]}{\vdash \Gamma, \exists X(A)}\ (\exists_0^2) & X \in \mathcal{V}_0^2, B \in Bool \\
 & \vdots & & \\
\dfrac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, \forall X^n A}\ (\forall_n^2) & X^n \notin FV_n^2(\Gamma) & \dfrac{\vdash \Gamma, A[B/X^n]}{\vdash \Gamma, \exists X^n(A)}\ (\exists_n^2) & X^n \in \mathcal{V}_n^2, B \in Bool^{X^n} \\
 & \vdots & &
\end{array}
\tag{A.2.8}
$$

dove $FV_0^2(\Gamma) = \bigcup_{A\in S}\{$*variabili proposizionali vincolabili libere in* $A\}$ *e, per* $n > 0$, $FV_n^2(\Gamma) = \bigcup_{A\in S}\{$*variabili vincolabili per predicati* n*-ari libere in* $A\}$, *con* Γ *presentazione di* S.

Definizione A.2.7 (LJ^2)**.** *E' il sistema deduttivo di linguaggio* $\mathcal{L}_{LJ^2}$ *ottenuto a partire da* LJ *aggiungendo le seguenti regole unarie:*

$$
\begin{array}{llll}
\dfrac{\Gamma, A[B/X] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall X(A) \vdash \Delta}\,(\forall^2_{0,l}) & X \in \mathcal{V}^2_0, B \in Bool & \dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall X A}\,(\forall^2_{0,r}) & X \notin FV^2_0(\Gamma) \\
\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \exists X A \vdash \Delta}\,(\exists^2_{0,l}) & X \notin FV^2_0(\Gamma) & \dfrac{\Gamma \vdash A[B/X]}{\Gamma \vdash \exists X(A)}\,(\exists^2_{0,r}) & X \in \mathcal{V}^2_0, B \in Bool \\
 & \vdots & & \\
\dfrac{\Gamma, A[B/X^n] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall X^n(A) \vdash \Delta}\,(\forall^2_{n,l}) & X \in \mathcal{V}^2_n, B \in Bool^{X^n} & \dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall X^n A}\,(\forall^2_{n,r}) & X^n \notin FV^2_n(\Gamma) \\
\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \exists X^n A \vdash \Delta}\,(\exists^2_{n,l}) & X^n \notin FV^2_n(\Gamma) & \dfrac{\Gamma \vdash A[B/X^n]}{\Gamma \vdash \exists X^n(A)}\,(\exists^2_{n,r}) & X \in \mathcal{V}^2_n, B \in Bool^{X^n} \\
 & \vdots & &
\end{array}
\tag{A.2.9}
$$

dove $FV_0^2(\Gamma) = \bigcup_{A\in S}\{$*variabili proposizionali vincolabili libere in* $A\}$ *e, per* $n > 0$, $FV_n^2(\Gamma) = \bigcup_{A\in S}\{$*variabili vincolabili per predicati* n*-ari libere in* $A\}$, *con* Γ *presentazione di* S.

Concludiamo definendo le teorie "linguistiche" considerate nel primo capitolo:

Definizione A.2.8 (PA)**.** *E' la teoria d.c. (vd. §1.1.2) di linguaggio* $\mathcal{L}_{PA}$ *generata dai seguenti assiomi dell'identità:*

($ID1$) $\forall v_0(v_0 \simeq v_0)$

($ID2$) $\forall v_0\forall v_1(v_0 \simeq v_1 \rightarrow v_1 \simeq v_0)$

($ID3$) $\forall v_0\forall v_1\forall v_2(v_0 \simeq v_1 \wedge v_1 \simeq v_2 \rightarrow v_0 \simeq v_2)$

dallo schema di assioma dell'identità, per ogni formula $F(v_0)$ *con esattamente una variabile libera:*

(SId) $\forall v_0\forall v_1(F(v_0) \wedge v_0 \simeq v_1 \rightarrow F(v_1))$.

dagli assiomi propri:

($PA1$) $\forall v_0 \neg \underline{S} v_0 \simeq \underline{0}$

($PA2$) $\forall v_0\exists v_1(\neg(v_0 \simeq \underline{0}) \rightarrow \underline{S} v_1 \simeq v_0)$

($PA3$) $\forall v_0\forall v_1(\underline{S} v_0 \simeq \underline{S} v_1 \rightarrow v_0 \simeq v_1)$

$(PA4)$ $\forall v_0(v_0\underline{+}\underline{0} \simeq v_0)$

$(PA5)$ $\forall v_0\forall v_1(v_0\underline{+}\underline{S}v_1 \simeq \underline{S}(v_0\underline{+}v_1))$

$(PA6)$ $\forall v_0(v_0\underline{\times}\underline{0} \simeq \underline{0})$

$(PA7)$ $\forall v_0\forall v_1(v_0\underline{\times}\underline{S}v_1 \simeq (v_0\underline{\times}v_1)\underline{+}v_0)$

e dallo schema di assioma, per ogni formula $F(v_0, v_1, \ldots, v_n) \in \mathcal{L}_{PA}$ *con esattamente* $n+1$ *variabili (vincolabili individuali) libere:*

(SI) $\forall v_1 \ldots \forall v_n((F(\underline{0}, v_1, \ldots, v_n) \wedge \forall v_0(F(v_0, v_1, \ldots, v_n) \to F(\underline{S}v_0, v_1, \ldots, v_n))) \to \forall v_0 F(v_0, v_1, \ldots, v_n))$

Definizione A.2.9 (PA^2)**.** *E' la teoria d.c. di linguaggio* $\mathcal{L}_{PA^2}$ *generata dagli assiomi* $ID1-3$*,* $PA1-7$ *e dai seguenti due assiomi, con* $X \in \mathcal{V}_1^2$*:*

(Id) $\forall X\forall v_0\forall v_1(X(v_0) \wedge v_0 \simeq v_1 \to X(v_1))$

(IA) $\forall X((X(\underline{0}) \wedge \forall v_0(X(v_0) \to X(\underline{S}v_0))) \to \forall v_0 X(v_0))$

Appendice B

Completezza forte e analisi canonica con tagli

E' possibile estendere l'apparato dell'analisi canonica al caso delle teorie e dimostrare anche per esse, in modo analogo a quanto fatto in §1.2.2, un teorema di completezza (forte): in effetti, essendo le teorie per l'aritmetica teorie infinite, il teorema di completezza già dimostrato non è sufficiente per estendere ad esse i risultati ottenuti in §1.2.2.

Per far questo, oltre alla consueta enumerazione $\{t_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ dei termini di $\mathcal{L}$, faremo riferimento anche a una enumerazione $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ delle formule presenti in una delle partizioni dell'insieme delle formule indotte della negazione per come è definita in §A.

Definizione B.0.10. *(n-esima approssimazione dell'analisi canonica con tagli) La definizione ricalca fedelmente la definizione 1.2.2 a pag. 47 dell'analisi canonica, con, per ogni sequente ipotesi, in aggiunta alla paraprova π_{S_i}, un insieme di formule Λ_{S_i} ed in più un ulteriore caso nella definizione di π_{S_i}. Associamo al sequente di partenza $\vdash A$ l'insieme $\Lambda_{\vdash A} = \emptyset$. In tutti i casi della definizione 1.2.2 il Λ_{S_i} che viene fornito tramite ipotesi induttiva è lasciato inalterato.*

Il caso nuovo è il seguente:

6. *se B è atomica, S_i è la presentazione di sequente $\vdash \Gamma, B, \Delta$ e Λ_{S_i} è l'insieme di formule associato, definiamo π_{S_i} come la paraprova*

$$\frac{\vdash \Gamma, A_j, B, \Delta \quad \vdash \Gamma, \neg A_j, B, \Delta}{\vdash \Gamma, B, \Delta}$$

in cui A_j è la prima formula nell'enumerazione $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ che non appartiene a Λ_{S_i}. La formula prescelta dei sequenti ipotesi è la prima che segue B nell'ordine ciclico indotto dalle presentazioni dei sequenti. L'insieme $\Lambda_{S_{k_1}} = \Lambda_{S_{k_2}}$ associato ai due sequenti ipotesi è $\Lambda_{S_i} \cup \{A_j\}$.

Si noti che le due osservazioni fatte in §1.2.2 al riguardo dell'analisi canonica valgono anche per l'analisi canonica con tagli: se una formula $\vdash A$ è derivabile, allora ogni sequente della sua analisi canonica è derivabile e inoltre la distanza da una qualsiasi formula non prescelta in una presentazione di sequente decresce strettamente. Definiamo l'analisi canonica con tagli senza sorprese:

Definizione B.0.11 (Analisi canonica con tagli)**.** *L'analisi canonica con tagli di una formula A è la paraprova $\pi = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \pi_n$.*

Lemma B.0.1. *Sia φ un ramo infinito (caso 3.) dell'analisi canonica π di una formula A; se C è un'occorrenza di formula nella presentazione di un sequente S di φ, allora esiste una presentazione di sequente S' di φ che segue S e in cui C è prescelta.*

Dimostrazione. Immediata. □

Lemma B.0.2. *Sia φ un ramo infinito dell'analisi canonica π di una formula A, ovvero φ è infinito oppure il suo ultimo nodo è un'ipotesi definitiva. Allora*

(i) *se $B \vee C$ occorre in un sequente di φ, allora B e D occorrono in un sequente di φ;*

(ii) *se $B \wedge C$ occorre in un sequente di φ, allora B oppure D occorre in un sequente di φ;*

(iii) *se $\forall x B$ occorre in un sequente di φ, allora esiste una variabile di $\mathcal{L}$ che non appare libera in $\forall x B$ tale che $B[y/x]$ occorre in un sequente di φ;*

(iv) *se $P(x_1, \ldots, x_n)$ è una formula atomica di $\mathcal{L}$,* esattamente *una tra $P(x_1, \ldots, x_n)$ e $\neg P(x_1, \ldots, x_n)$ occorre in un sequente di φ;*

(v) *se φ è infinito (caso 3.),* e *$\exists x B$ occorre in un sequente di φ, allora per termine t di $\mathcal{L}$, $B[t/x]$ occorre in un sequente di φ.*

(vi) *Se $B(x_1, \ldots, x_n)$ è una qualunque formula di $\mathcal{L}$, almeno una tra $B(x_1, \ldots, x_n)$ e $\neg B(x_1, \ldots, x_n)$ occorre in un sequente di φ.*

Dimostrazione. Gli unici casi da dimostrare sono (iv) e (vi):

(vi) Possiamo verificare che non esiste in φ un sequente S tale che, per ogni S' che segue S si ha che $\Lambda_{S'} = \Lambda_S$: infatti, dato S e la sua formula prescelta C, esiste in φ un sequente S' in cui è prescelta una sottoformula atomica di C, e in tal caso avremo che $\Lambda_{S'} \supset \Lambda_S$. D'altra parte, nell'enumerazione $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ occorrerà esattamente una tra $B(x_1, \ldots, x_n)$ e $\neg B(x_1, \ldots, x_n)$; sia essa A_k; esisterà allora S sequente di φ la cui formula prescelta sia atomica e tale che Λ_S contenga tutte le formule A_j per $j < k$. A questo punto, per costruzione dell'analisi canonica con tagli, esattamente una tra A_k e $\neg A_k$ occorrerà nel sequente che segue S in φ.

(iv) se occorressero entrambe $P(x_1, \ldots, x_n)$ e $\neg P(x_1, \ldots, x_n)$ in un sequente di φ allora esisterebbe un sequente S' in cui occorrerebbero entrambe ma in tal caso φ sarebbe finito.

□

Sia T una teoria nel linguaggio $\mathcal{L}$ e sia π l'analisi canonica con tagli di una formula A. Se in ogni ramo di π c'è un sequente dimostrabile a partire da T possiamo sostituire tale sequente con una derivazione di esso a partire da T, ottenendo un nuovo albero π' per il quale, in analogia con il caso dell'analisi canonica senza tagli, possiamo mostrare che si tratta di una derivazione di A da T in LK: infatti la radice è il sequente $\vdash A$, le foglie di π' sono regole 0-arie di LK oppure regole 0-arie di conclusione $\vdash C$, per una qualche formula $C \in T$ e le diramazioni sono sempre finite. Per il *lemma di König*, π' è un albero finito, e dunque una derivazione di A da T. Siamo ora in grado di dimostrare il seguente:

Teorema B.0.3 (teorema di completezza forte)**.** *Sia T una teoria e A una formula nel linguaggio $\mathcal{L}$. Se ogni modello di T è modello di A, allora A è derivabile da T in LK.*

Dimostrazione. Mostreremo che, se A non è derivabile da T, allora esiste un modello di T che non è modello di A; fissiamo un ramo scorretto φ dell'analisi canonica con tagli di A, ossia un ramo nessun sequente del quale sia derivabile da T: φ non può che essere infinito. Sia AT l'insieme delle formule atomiche che occorrono in sequenti di φ; per il lemma B.0.2 non ci sono in AT entrambe le formule $P(x_1, \ldots, x_n)$ e $\neg P(x_1, \ldots, x_n)$. Estendiamo $\mathcal{L}$ con un insieme numerabile $\mathcal{C}$ di nuove costanti e sia $AT_{\mathcal{C}}$ l'insieme delle formule di $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$ ottenuto a partire dalle formule di AT sostituendo ogni variabile x_i con la costante c_i; per il lemma 1.2.4 a pag. 52 esiste un modello $\mathcal{M}$ il cui supporto consiste di termini di $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$ che soddisfa $\neg AT_{\mathcal{C}}$. In analogia con il teorema di completezza adoperiamo il lemma B.0.2 per dimostrare induttivamente che per ogni formula $B(x_1, \ldots, x_n)$ che occorre in un sequente di φ, vale $\mathcal{M} \not\models B(c_1, \ldots, c_n)$. Inoltre, se $C \in T$, possiamo verificare $\mathcal{M} \models C$: infatti sicuramente C non appare in nessun sequente di φ, altrimenti il sequente sarebbe derivabile da T e quindi, sempre per il lemma B.0.2, la formula $\neg C$ appare in un sequente di φ, da cui $\mathcal{M} \models C$. La restrizione $\mathcal{M} \restriction \mathcal{L}$ è quindi un modello che soddisfa T e non soddisfa A.

□

Possiamo servirci del teorema di completezza forte per dare una semplice dimostrazione del teorema 1.1.16 a pag. 37 di compattezza in questa versione:

Teorema B.0.4 (teorema di compattezza)**.** *Se una teoria T in un linguaggio $\mathcal{L}$ numerabile non è soddisfacibile, allora non è finitamente soddisfacibile.*

Dimostrazione. Se T non è soddisfacibile allora $T \models \mathbf{F}$; ma allora, per completezza forte, $T \vdash \mathbf{F}$, ossia esiste una derivazione di $\mathbf{F}$ a partire da T; una tale derivazione, essendo finita, può fare uso al più di un numero finito di sequenti $\vdash C$ con $C \in T$; ma allora esiste $T_f \subseteq T$ finito tale che $T_f \vdash \mathbf{F}$; per correttezza si ha che $T_f \models \mathbf{F}$, ossia che T non è finitamente soddisfacibile.

□

Appendice C

I teoremi analitici della ludica

Proviamo in questa sezione i cosiddetti *teoremi analitici* della ludica, accennati in §2.2.2.

Teorema C.0.5 (separazione)**.** *La topologia degli* $(\mathfrak{E}_\sigma)^{\overset{\downarrow}{\sim}}$ *è* $\mathcal{T}_0$*, ovvero design* $\mathfrak{D}$ *distinti hanno chiusure* $\mathfrak{D}^{\overset{\downarrow}{\sim}\overset{\downarrow}{\sim}}$ *distinte.*

Dimostrazione. Mostreremo che la relazione $\mathfrak{D} \preceq \mathfrak{D}'$ corrisponde al fatto che $\mathfrak{D}$ è "uguale o più definito" di $\mathfrak{D}'$. Infatti la relazione "essere uguale o più di definito di" è chiaramente riflessiva, transitiva e antisimmetrica, ovvero costituisce un ordine parziale. Questa richiesta è del resto equivalente alla tesi del teorema: se infatti la topologia degli $(\mathfrak{E}_\sigma)^{\overset{\downarrow}{\sim}}$ è $\mathcal{T}_0$, allora, sia $\mathfrak{D} \preceq \mathfrak{D}'$ e $\mathfrak{D}' \preceq \mathfrak{D}$ e sia $\mathfrak{C} \preceq \mathfrak{D}$. Allora $\mathfrak{C} \preceq \mathfrak{D}'$ per transitività (che sicuramente vale) e, allo stesso modo si prova $\mathfrak{C} \preceq \mathfrak{D}' \Rightarrow \mathfrak{C} \preceq \mathfrak{D}$, da cui segue $\mathfrak{D}^{\overset{\downarrow}{\sim}\overset{\downarrow}{\sim}} = \mathfrak{D}'^{\overset{\downarrow}{\sim}\overset{\downarrow}{\sim}}$, e dunque $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}'$, vale a dire l'antisimmetria (la riflessività è anch'essa immediata). Viceversa, se $\preceq$ induce un ordine parziale, sia $\mathfrak{D}^{\overset{\downarrow}{\sim}\overset{\downarrow}{\sim}} = \mathfrak{D}'^{\overset{\downarrow}{\sim}\overset{\downarrow}{\sim}}$; allora $\mathfrak{D} \preceq \mathfrak{D}'$ e $\mathfrak{D}' \preceq \mathfrak{D}$ e, per antisimmetria, $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}'$, e dunque, per la contronominale, design distinti hanno chiusure distinte.

Assumiamo per semplicità che la base sia atomica. Sia $\mathfrak{D} \preceq \mathfrak{D}'$ e sia $\mathfrak{c} \in \mathfrak{D}$. Consideriamo i seguenti due casi, esemplificativi delle possibilità in gioco:

1. $\mathfrak{c} = \langle(\xi, \{1,3\}), (\xi * 3, \{7\}), (\xi * 3 * 7, \emptyset), (\xi * 4, \{5\})\rangle$;
2. $\mathfrak{c} = \langle(\xi, \{1,3\}), (\xi * 3, \{7\}), (\xi * 3 * 7, \emptyset), (\xi * 4, \{5\}), \maltese\rangle$.

Costruiamo una opportuna porzione $\mathfrak{Opp}_\mathfrak{c}$, costituita dalle versioni di polarità opposta delle azioni in $\mathfrak{c}$:

1. $\mathfrak{Opp}_\mathfrak{c} := \langle(\xi, \{1,3\}), (\xi * 3, \{7\}), (\xi * 3 * 7, \emptyset)\rangle, \langle(\xi, \{1,3\}), \maltese\rangle$;
2. $\mathfrak{Opp}_\mathfrak{c} := \langle(\xi, \{1,3\}), (\xi * 3, \{7\}), (\xi * 3 * 7, \emptyset)\rangle, \langle(\xi, \{1,3\}), (\xi * 4, \{5\})\rangle$.

$\mathfrak{Opp}_\mathfrak{c}$ è tale che $\mathfrak{D} \overset{\downarrow}{\sim} \mathfrak{Opp}_\mathfrak{c}$ e dunque si ha anche $\mathfrak{D}' \overset{\downarrow}{\sim} \mathfrak{Opp}_\mathfrak{c}$, il che è possibile solo se $\mathfrak{c} \in \mathfrak{D}'$ oppure se in $\mathfrak{D}'$ è presente una restrizione stretta di $\mathfrak{c}$ cui è stato aggiunto un demone, vale a dire $\langle(\xi, \{1,3\}), \maltese\rangle$ oppure $\langle(\xi, \{1,3\}), (\xi * 3, \{7\}), (\xi * 3 * 7, \emptyset), \maltese\rangle$.

D'altra parte, se l'ordine $\preceq$ corrisponde alla relazione "essere uguale o più definito di", allora se $[\mathfrak{D} \rightleftharpoons \mathfrak{E}] = \langle \kappa_0, \ldots, \kappa_{n-1}, \maltese \rangle$ e $\mathfrak{D} \preceq \mathfrak{D}'$, allora $[\mathfrak{D}' \rightleftharpoons \mathfrak{E}] = \langle \kappa_0, \ldots, \kappa_{n'-1}, \maltese \rangle$, per un certo $n' \leq n$, e dunque $\mathfrak{D}' \in \mathfrak{D}^{\overset{\perp}{\sim}\overset{\perp}{\sim}}$.

□

Questo teorema, che è l'analogo in ludica del *teorema di Bohm* nel λ-calcolo (vd. Krivine, [49]), indica che ogni differenza di costruzione dei design è rilevata a livello interattivo: se $\mathfrak{D} \neq \mathfrak{D}'$, allora esisterà un $(\mathfrak{E}_\sigma)$ tale che $\ll \mathfrak{D}|(\mathfrak{E}_\sigma) \gg = \mathfrak{Dai}$ e $\ll \mathfrak{D}|(\mathfrak{E}_\sigma) \gg = \mathfrak{Fid}$.

Teorema C.0.6 (stabilità)**.** *Se K è un insieme non vuoto, $\mathfrak{R}$ è una rete di design e, per $k \in K$, $\mathfrak{R}_k \subset \mathfrak{R}$, allora*

$$[\![\bigcap_{k \in K} \mathfrak{R}_k]\!] = \bigcap_{k \in K} [\![\mathfrak{R}_k]\!] \tag{C.0.1}$$

Dimostrazione. Il lato da dimostrare è l'inclusione $\bigcap_{k \in K} [\![\mathfrak{R}_k]\!] \subseteq [\![\bigcap_{k \in K} \mathfrak{R}_k]\!]$. Sia $\mathfrak{c} \in \bigcap_{k \in K} [\![\mathfrak{R}_k]\!]$, allora $\mathfrak{c}$ proviene da una unica disputa $\mathfrak{r}_k \subset \mathfrak{R}_k$, la sua protoporzione. D'altra parte, da $\mathfrak{r}_k \subset \mathfrak{R}$ e dal fatto che la disputa $\mathfrak{r}$ di $\mathfrak{R}$ da cui $\mathfrak{c}$ proviene è unica, si ha $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_k = \mathfrak{r}_{k'}$, per ogni $k, k' \in K$, e dunque $\mathfrak{r} \subset \bigcap_k \mathfrak{R}_k$ e $\mathfrak{c} \in [\![\bigcap_{k \in K} \mathfrak{R}_k]\!]$.

□

Teorema C.0.7 (associatività)**.** *La normalizzazione è associativa (o Church-Rosser): se $\mathfrak{R} = \{\mathfrak{R}_0, \ldots, \mathfrak{R}_n\}$ è una rete di design, allora*

$$[\![\mathfrak{R}]\!] = [\![[\![\mathfrak{R}_0]\!], \ldots, [\![\mathfrak{R}_n]\!]]\!] \tag{C.0.2}$$

Dimostrazione. $[\![\mathfrak{R}]\!] = [\![\mathfrak{R}_0 \cup \cdots \cup \mathfrak{R}_n]\!]$ e dunque il risultato segue immediatamente dall'algoritmo di normalizzazione dei design-*desseins*. □

Un risultato molto utile è il seguente, in quanto permette di ricondurre ogni caso generale a un caso in base vuota.

Proposizione C.0.8 (principio di chiusura)**.** *Sia $\mathfrak{R}$ una rete in base $\Xi \vdash \Lambda$. Allora $[\![\mathfrak{R}]\!]$ è l'unico design $\mathfrak{D}$ tale che, per ogni famiglia di contro-design $(\mathfrak{E}_\sigma)$, $\mathfrak{D} \overset{\perp}{\sim} (\mathfrak{E}_\sigma)$ se e solo se $[\![\mathfrak{R} \cup \cdots \cup \mathfrak{E}_\sigma \cup \ldots]\!] = \mathfrak{Dai}$.*

Dimostrazione. $[\![\mathfrak{R} \cup \cdots \cup \mathfrak{E}_\sigma \cup \ldots]\!] = \mathfrak{Dai}$ segue dal teorema di associatività. L'unicità di $\mathfrak{D}$ segue dal teorema di separazione.

□

Una applicazione del principio di chiusura è il seguente (e ultimo) teorema analitico:

Teorema C.0.9 (monotonia)**.** *Se $\mathfrak{D}_0 \preceq \mathfrak{E}_0, \ldots, \mathfrak{D}_n \preceq \mathfrak{E}_n$, allora $[\![\mathfrak{D}_0, \ldots, \mathfrak{D}_n]\!] \preceq [\![\mathfrak{E}_0, \ldots, \mathfrak{E}_n]\!]$.*

Dimostrazione. Siano $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{D}$, rispettivamente, in base $\vdash \Upsilon, \xi$ e $\xi \vdash \Sigma$ e sia $\mathfrak{D} \preceq \mathfrak{D}'$. Allora, per ogni $\{\mathfrak{E}_\sigma : \sigma \in \Sigma, \xi\}$, si ha $[\![\mathfrak{D}, (\mathfrak{E}_\sigma)]\!] \preceq [\![\mathfrak{D}', (\mathfrak{E}_\sigma)]\!]$. Tagliamo allora $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}'$ con $\mathfrak{F}$ e consideriamo i contro-design $\{\mathfrak{C}_\tau : \tau \in \Upsilon \cup \Sigma\}$ di $[\![\mathfrak{F}, \mathfrak{D}]\!]$. Sia $\mathfrak{E}_\sigma = \mathfrak{C}_\sigma$, per $\sigma \in \Sigma$ e $\mathfrak{E}_\sigma := [\![\mathfrak{F}, (\mathfrak{C}_\tau)]\!]$ per $\sigma = \xi$; allora si ottiene $[\![\mathfrak{D}, (\mathfrak{E}_\sigma)]\!] \preceq [\![\mathfrak{D}', (\mathfrak{E}_\sigma)]\!]$ e, per associatività, $[\![[\![\mathfrak{F}, \mathfrak{D}]\!], (\mathfrak{C}_\tau)]\!] \preceq [\![[\![\mathfrak{F}, \mathfrak{D}']\!], (\mathfrak{C}_\tau)]\!]$, da cui concludiamo $[\![\mathfrak{F}, \mathfrak{D}]\!] \preceq [\![\mathfrak{F}, \mathfrak{D}']\!]$.

$\square$

Appendice D

Spazi di Hilbert e algebre di operatori

In questa appendice saranno illustrati brevemente alcuni risultati di analisi funzionale che costituiscono il bagaglio tecnico indispensabile per affrontare la Geometria dell'Interazione.

D.1 Spazi di Hilbert

Definizione D.1.1 (spazio pre-hilbertiano)**.** *Uno spazio* pre-hilbertiano *(complesso)* $\mathbb{H}$ *è uno spazio vettoriale complesso dotato di un* prodotto scalare $\langle\cdot|\cdot\rangle$*, vale a dire di una forma sesquilineare (o, equivalentemente, hermitiana definita positiva), ovvero che soddisfa, per ogni* $u, v, w \in \mathbb{H}, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$

simmetria coniugata

$$\langle u|v\rangle = \overline{\langle v|u\rangle} \tag{D.1.1}$$

linearità nel primo argomento

$$\langle \lambda u + \mu v|w\rangle = \lambda\langle u|w\rangle + \mu\langle v|w\rangle \tag{D.1.2}$$

positività

$$\langle u|u\rangle \geq 0 \tag{D.1.3}$$

Definizione D.1.2 (spazio normato)**.** *Uno spazio* normato *(complesso)* $\mathcal{B}$ *è uno spazio vettoriale complesso dotato di una* norma $\|\cdot\|$*, ovvero di una funzione* $\|\cdot\| : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ *che soddisfa, per ogni* $u, v \in \mathcal{B}, \lambda \in \mathbb{C}$ *le seguenti proprietà:*

positività

$$u \neq 0 \Rightarrow \|u\| > 0 \tag{D.1.4}$$

moltiplicazione scalare

$$\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\| \tag{D.1.5}$$

disuguaglianza triangolare

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\| \tag{D.1.6}$$

Proposizione D.1.1. *Ogni spazio pre-hilbertiano è uno spazio normato.*

Dimostrazione. E' sufficiente verificare che la funzione $\|u\| := \langle u|u\rangle$ definisce una norma. □

Proposizione D.1.2. *Sia $\mathcal{B}$ uno spazio normato. Allora la norma induce una topologia che rende $\mathcal{B}$ di Hausdorff (punti distinti hanno intorni disgiunti) e rispetto alla quale le operazioni algebriche sono continue.*

Dimostrazione. Siano $u, v \in \mathcal{B}$ distinti. Allora $\|u-v\|$ definisce una distanza su $\mathcal{B}$, ovvero soddisfa $\|u-v\| \geq 0$, $\|u-v\| = \|v-u\|$, $\|u-v\| = 0 \Rightarrow u = v$ e $\forall w \in \mathcal{B}$ $\|u-v\| \leq \|u-w\| + \|w-v\|$. Ogni distanza induce una topologia di Hausdorff: infatti, $u \neq v$ implica $\|u-v\| > 0$, il che permette di costruire le due palle aperte $B_{u,\|u-v\|} = \{w \in \mathcal{B} | \|u-w\| < \|u-v\|\}$ e $B_{v,\|u-v\|} = \{w \in \mathcal{B} | \|v-w\| < \|u-v\|\}$, chiaramente disgiunte. La continuità delle operazioni algebriche è una semplice verifica. □

Definizione D.1.3 (spazi di Hilbert, spazi di Banach)**.** *Uno spazio normato completo, rispetto alla topologia indotta dalla norma, è detto* spazio di Banach*. Uno spazio pre-hilbertiano completo, rispetto alla topologia indotta dalla norma $\langle u|u\rangle$ è detto* spazio di Hilbert.

Dalla proposizione D.1.1 segue che ogni spazio di Hilbert è di Banach. Il viceversa non è invece sempre vero. Ad esempio, consideriamo la seguente classe di spazi di Banach:

$$\ell^p(X) := \{u : X \to \mathbb{C} | \|u\|_p := (\sum_{x \in X} u(x)^p)^{1/p} < \infty\} \qquad p \in \mathbb{N} \tag{D.1.7}$$

Nel caso in cui X è infinito, ad esempio $X = \mathbb{N}$, $\ell^p(X)$ è di Hilbert se e solo se $p = 2$. Lo spazio $\ell^2(X)$ ammette infatti il prodotto scalare definito come

$$\langle u|v\rangle := \sum_{x \in X} u(x)\overline{v(x)} \tag{D.1.8}$$

ed è da considerarsi, come vedremo tra poco, uno spazio canonico.

Proposizione D.1.3. *Sia $\mathbb{H}$ uno spazio di Hilbert e $X \subset \mathbb{H}$ chiuso e convesso. Allora, per ogni $u \in \mathbb{H}$ esiste un unico $\underline{u} \in X$ tale che*

$$\|u - \underline{u}\| = \inf_{v \in X} \|u - v\| \tag{D.1.9}$$

Dimostrazione. (Omessa) □

Il punto $\underline{u}$ può essere scritto come $P_X(u)$, dove la funzione P_X, che soddisfa, $P_X \circ P_X = P_X$ è detta *proiezione* di u su X. Considerando l'insieme $X^\perp := \{u \in \mathbb{H} | \forall v \in X \ \langle u|v\rangle = 0\}$, arriviamo al seguente risultato:

Proposizione D.1.4. *Sia $\mathbb{H}$ uno spazio di Hilbert, sia $u \in \mathbb{H}$ e $X \subset \mathbb{H}$ chiuso e convesso. Allora u si scrive in modo unico come $x + x^\perp$, con $x \in X$ e $x^\perp \in X^\perp$.*

Dimostrazione. (cenni) Si dimostra anzitutto che $u - P_X(u) \in X^\perp$ e successivamente si definisce $x := P_X(u)$ e $x^\perp := u - P_X(u)$. L'unicità viene dal fatto che, se esistessero $y, y^\perp \neq x, x^\perp$ tali che $u = y + y^\perp = x + x^\perp$, con $x, y \in X, x^\perp, y^\perp \in X^\perp$, si avrebbe $x - y = y^\perp - x^\perp \in X \cap X^\perp$, il che è assurdo in quanto si verifica facilmente che $X \cap X^\perp = \emptyset$.

Si noti che si ha anche $X^{\perp\perp} = X$: infatti, se $u \in X^{\perp\perp}$, allora si scrive come $x + x^\perp$, e dunque $x^\perp \in X^\perp \cap X^{\perp\perp} = \emptyset$, il che è assurdo, e dunque $u \in X$.

□

Definizione D.1.4 (base ortonormale)**.** *Sia $\mathbb{H}$ uno spazio di Hilbert. Una* base ortonormale $(e_i)_{i\in I}$ *è un insieme di elementi $e_i \in \mathbb{H}$ tale che $\sum_{i\in I} \mathbb{C}e_i$ è denso in $\mathbb{H}$ e, per ogni $i, j \in I$, $\langle e_i | e_j \rangle = 0$.*

E' possibile mostrare che ogni base ortonormale è massimale.

Proposizione D.1.5. *Sia $\mathbb{H}$ uno spazio di Hilbert e $(e_i)_{i\in I}$ una sua base ortonormale. Allora, per ogni $u \in \mathbb{H}$, si ha*

$$u = \sum_{i\in I} \langle u | e_i \rangle e_i \tag{D.1.10}$$

Dimostrazione. Sia $v \in \mathbb{H}$. Allora, per ogni $k \in I$, si ha $\langle \sum_{i\in I} \langle u|e_i\rangle e_i | e_k \rangle = \langle u | e_k \rangle$. Di conseguenza, per ogni $k \in I$, $\langle u - \sum_{i\in I} \langle u|e_i\rangle e_i | e_k \rangle = \langle u|e_k\rangle - \langle u|e_k\rangle = 0$. Se si avesse $y := u - \sum_{i\in I} \langle u|e_i\rangle e_i \neq 0$, avremmo che $y/\|y\|$ sarebbe un nuovo punto ortonormale, contro la massimalità degli e_i.

□

Teorema D.1.6. *Ogni spazio di Hilbert ammette una base ortonormale.*

Dimostrazione. Omessa. Richiede il Lemma di Zorn. □

La proposizione seguente permette di dare senso alla canonicità degli spazi $\ell^2(X)$ cui si faceva riferimento sopra:

Teorema D.1.7. *Sia $\mathbb{H}$ uno spazio di Hilbert e sia $(e_i)_{i\in I}$ una sua base ortonormale. Allora esiste un isomorfismo isometrico $\varphi : \mathbb{H} \to \ell^2(I)$. In particolare, per ogni cardinalità κ, esiste un unico spazio di Hilbert, a meno di isomorfismo, di cardinalità κ (ovvero che ammette una base ortonormale di cardinalità κ).*

Dimostrazione. L'isomorfismo è dato, per ogni $j \in I$, da $(\varphi(\sum_{i\in I} \langle u|e_i\rangle e_i))(j) = \langle u|e_j\rangle := u_j$. E' subito verificato che, per ogni $u, v \in \mathbb{H}$, si ha $\langle u|v\rangle = \langle \sum_{i\in I} \langle u|e_i\rangle e_i | \sum_{i\in I} \langle v|e_i\rangle e_i \rangle = \sum_{i\in I} u_i \overline{v_i} e_i = \langle \varphi(u)|\varphi(v)\rangle$. Inoltre $\varphi(u+v)(j) = \varphi(\sum_{i\in I}(\langle u|e_i\rangle + \langle v|e_i\rangle)e_i)(j) = \langle u|e_j\rangle + \langle v|e_j\rangle = \varphi(u)(j) + \varphi(v)(j)$ e, per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$, $\varphi(\lambda u)(j) = \lambda\langle u|e_j\rangle = \lambda\varphi(u)(j)$

□

Uno spazio di Hilbert è detto *separabile* se ammette un sottospazio denso e numerabile. Un utile risultato, che fa uso del precedente teorema è il seguente:

Proposizione D.1.8. *Sia* $\mathbb{H}$ *uno spazio di Hilbert. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(i) $\mathbb{H}$ *è separabile;*

(ii) $\mathbb{H}$ *ha dimensione numerabile;*

(iii) $\mathbb{H}$ *è isometricamente isomorfo a* $\ell^2(\mathbb{N})$.

Dimostrazione. L'unica parte che richiede una dimostrazione è la $(i) \to (ii)$: sia $X \subset \mathbb{H}$ un sottospazio denso e numerabile e sia $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sua base ortonormale (che esiste per il teorema D.1.6). Costruiamo una base ortonormale per $\mathbb{H}$ per induzione come segue: $e_0 := x_0$; sia poi definita e_n e sia X_n il sottospazio generato da $\{e_0, \ldots, e_n\}$. Scomponiamo x_{n+1} come $P_{X_n}(x_{n+1}) + (I - P_{X_n}(x_{n+1}))$ e sia $y_{n+1} := I - P_{x_n}(x_{n+1}) \in X_n^{\perp}$. Definiamo infine $e_{n+1} := y_{n+1}/\|y_{n+1}\|$. □

D.2 Algebre di Banach

La prima forma di algebra di operatori che discuteremo è rappresentata dalle algebre di Banach:

Definizione D.2.1. *Siano* $\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2$ *spazi di Hilbert. Allora il seguente spazio vettoriale:*

$$\mathcal{B}(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2) := \{f : \mathbb{H}_1 \to \mathbb{H}_2 | f \ lineare \ e \ \exists L \in \mathbb{R} t.c. \forall u \in \mathbb{H}_1, \|f(u)\|_{\mathbb{H}_2} \leq L\|u\|_{\mathbb{H}_1}\} \tag{D.2.1}$$

che, nel caso $\mathbb{H}_1 = \mathbb{H}_2$ *scriveremo semplicemente* $\mathcal{B}(\mathbb{H})$*, dotato della norma*

$$\|f\| := inf\{L \in \mathbb{R} | \forall u \in \mathbb{H}_1 \ \|f(u)\|_{\mathbb{H}_2} \leq L\|u\|_{\mathbb{H}_1}\} \tag{D.2.2}$$

è uno spazio di Banach, detto algebra di Banach *di* $\mathbb{H}_1$ *in* $\mathbb{H}_2$.

Proposizione D.2.1. *Sia* $\mathcal{B}(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)$ *un'algebra di Banach e sia* $f \in \mathcal{B}(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)$. *Allora* f *è continuo.*

Dimostrazione. Siano $u, v \in \mathbb{H}_1$, con $v \neq 0$; allora esiste $L \in \mathbb{R}$ tale che $\|f(u+v) - f(u)\| = \|f(u) + f(v) - f(u)\| \leq L\|u\|_{\mathbb{H}_1}$. Per $\|u\|$ che tende a 0 questo implica la continuità di f in u. □

Definizione D.2.2 (spazio duale)**.** *Sia* $\mathcal{B}$ *uno spazio di Banach. Allora lo spazio* $\mathcal{B}^* := Hom(\mathcal{B}, \mathbb{C})$ *dei funzionali lineari continui su* $\mathcal{B}$*, con la norma data da*

$$\|f\| := sup\{L \in \mathbb{R} | \forall g \in \mathcal{B} \ |f(g)| \leq L\|g\|_{\mathcal{B}}\} \tag{D.2.3}$$

è uno spazio di Banach, detto spazio duale.

Ogni algebra di Banach $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ si immerge canonicamente nel suo biduale attraverso il seguente omomorfismo:

$$F(u)(f) := f(u) \qquad F \in \mathcal{B}^{**}, f \in \mathcal{B}(\mathbb{H}), u \in \mathbb{H} \tag{D.2.4}$$

D'altra parte, non ogni biduale di un'algebra di Banach si immerge nell'algebra di Banach da cui proviene. Un caso di spazi di Banach uguali al proprio biduale è rappresentato proprio dagli spazi di Hilbert, come conseguenza del seguente teorema:

Teorema D.2.2 (Riesz)**.** *Sia $\mathbb{H}$ uno spazio di Hilbert e sia $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ un funzionale lineare limitato. Allora esiste un unico $u_f \in \mathbb{H}$ tale che, per ogni $u \in \mathbb{H}$, si ha $f(u) = \langle u_f | u \rangle$.*

Dimostrazione. Il nucleo di f $N_f := \{u \in \mathbb{H} | f(u) = 0\}$ è un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{H}$. Supponiamo, senza perdita di generalità, $N_f \neq \mathbb{H}$, e dunque $N_f^\perp \neq \emptyset$. Sia $u_0 \in N_f^\perp$ e $f(u_0) = 1$ (sempre senza perdita di generalità). Se $g(u) := \langle u_0 | u \rangle$, si ha $N_f \subset N_g$. Ora, $u = u - f(u)u_0 + f(u)u_0$, ma $f(u - f(u)u_0) = f(u) - f(u)f(u_0) = 0$, e dunque $u - f(u)u_0 \in N_f \subset N_g$, e dunque $g(u) = f(u)g(u_0)$. Del resto, $g(u) = \langle u_0 | u \rangle = \langle u_0 | u_0 \rangle f(u)$, e dunque $f(u) = \langle \frac{u_0}{\langle u_0 | u_0 \rangle} | u \rangle$.

□

Un risultato importante, che riguarda gli spazi di Banach, è il seguente:

Teorema D.2.3 (Hahn-Banach)**.** *Sia $\mathcal{B}$ uno spazio di Banach e siano $f, g \in \mathcal{B}$ distinti. Allora esiste $h \in \mathcal{B}^*$ tale che $h(f) \neq h(g)$.*

Dimostrazione. Omessa. Richiede una forma dell'assioma di scelta numerabile, che va sotto il nome di "teorema della categoria di Baire". □

D.3 Teoria spettrale

Mostreremo alcuni risultati fondamentali della teoria spettrale degli operatori di un'algebra di Banach, dando sostanza all'idea secondo cui un operatore non è altro che una "versione non commutativa" del suo spettro.

Definizione D.3.1 (spettro)**.** *Sia $u \in \mathcal{B}$ un operatore in uno spazio di Banach. Lo spettro di u, $\sigma(u)$ è definito come segue:*

$$\sigma(u) := \{z \in \mathbb{C} | u - zI \text{ non è invertibile}\} \tag{D.3.1}$$

Gli elementi dello spettro di u sono detti autovalori *di u.*

La rilevanza dell'esistenza di elementi non invertibili in un'algebra di operatori è spiegata dal seguente teorema:

Teorema D.3.1 (teorema di Mazur)**.** *Ogni algebra di Banach $\mathcal{B}(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)$ con unità in cui ogni elemento $\neq 0$ è invertibile è isomorfa a $\mathbb{C}$.*

Dimostrazione. Sia u un elemento dell'algebra. Per il teorema D.3.2 esiste almeno un $\lambda \in \sigma(u)$, e dunque $u - \lambda I$ non è invertibile. Ma questo vuol dire che $u - \lambda I = 0$ e dunque, se $u \neq 0$, si ha $u = \lambda I$. □

Un primo importante risultato sullo spettro di un operatore in uno spazio di Banach è il seguente:

Teorema D.3.2. *Lo spettro di un operatore in uno spazio di Banach è non vuoto e compatto.*

Dimostrazione. Dalla proposizione 3.5.3 (pag. 216) segue che, $|z| > \|u\|$ se e solo se $u - zI$ è invertibile: infatti $(u - zI)^{-1} = (-z(I - u/z))^{-1} = -1/z \sum_{n>0}^{\infty} \frac{u^n}{z^n}$, da cui $\sigma(u) = \{z \in \mathbb{C} | |z| \leq \|u\|\}$ è chiuso e limitato, e dunque compatto. Che $\sigma(u) \neq \emptyset$ segue invece da un noto teorema di analisi complessa, il teorema di Liouville, che afferma che ogni funzione di variabile complessa intera (olomorfa su tutto il piano complesso) e limitata è costante. Se infatti $\sigma(u) = \emptyset$, allora la funzione $z \mapsto (u - zI)^{-1}$ è sicuramente analitica, e dunque olomorfa, nonchè definita su tutto il piano complesso. Essa è anche limitata dal momento che, per $|z|$ che tende a ∞, $(u - zI)^{-1}$ tende a zero, e dunque è una funzione costantemente uguale a 0, il che è assurdo.

□

A partire dal precedente teorema possiamo definire il *raggio spettrale* $\varrho(u) := sup\{|z| | z \in \sigma(u)\}$ e verificare che vale la seguente:

$$\varrho(u) \leq \|u\| \tag{D.3.2}$$

Definizione D.3.2 (aggiunzione)**.** *Sia $u \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$. Un operatore $u^* \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ è detto* aggiunto *di u se, per ogni $x, y \in \mathbb{H}$, soddisfa*

$$\langle u(x)|y\rangle = \langle x|u^*(y)\rangle \tag{D.3.3}$$

Una conseguenza del teorema D.2.2 di Riesz è che ogni operatore su uno spazio di Hilbert $\mathbb{H}$ ammette un aggiunto. D'altra parte, non è detto che un'arbitraria algebra di Banach su $\mathbb{H}$ contenga gli aggiunti di tutti i suoi operatori.

Proposizione D.3.3 (proprietà degli aggiunti)**.** *Siano $u, v \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$.*

(i) $u^{**} = u$

(ii) $(uv)^* = v^*u^*$

(iii) $(u + v)^* = u^* + v^*$

(iv) $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$

(v) $(\lambda u)^* = \overline{\lambda} u^*, \lambda \in \mathbb{C}$

Dimostrazione. (i) Si ha $\langle u^{**}(x)|y\rangle = \langle u(x)|y\rangle$; se esistessero, d'altra parte, u, v, con $u \neq v$ tali che, $\forall x, y \in \mathbb{H}$, $\langle u(x)|y\rangle = \langle v(x)|y\rangle$, allora sia $x_0 \in \mathbb{H}$ tale che $u(x_0) \neq v(x_0)$; ne segue $\langle u(x_0) - v(x_0)|u(x_0) - v(x_0)\rangle = \langle (u(x_0)|u(x_0) - v(x_0)\rangle - \langle v(x_0)|u(x_0) - v(x_0)\rangle = 0$, ma del resto $\langle u(x_0) - v(x_0)|u(x_0) - v(x_0)\rangle = \|u(x_0) - v(x_0)\| = 0$, e dunque $u(x_0) = v(x_0)$, il che è assurdo.

(ii) $\langle (uv)^*(x)|y\rangle = \langle x|(uv)(y)\rangle = \langle u^*(x)|v(y)\rangle = \langle (v^*u^*)(x)|y\rangle$.

(iii) $\langle (u+v)^*x|y\rangle = \langle x|(u+v)(y)\rangle = \langle x|u(y)+v(y)\rangle = \overline{\langle u(y)|x\rangle} + \overline{\langle v(y)|x\rangle} = \overline{\langle y|u^*(x)\rangle} + \overline{\langle y|v^*(x)\rangle} = \langle u^*(x) + v^*(x)|y\rangle = \langle (u^* + v^*)(x)|y\rangle$.

(iv) $\langle (u^{-1})^*u^*(x)|y\rangle = \langle x|uu^{-1}(y)\rangle = \langle x|y\rangle$.

(v) $\langle (\lambda u^*)(x)|y\rangle = \langle x|\lambda u(y)\rangle = \overline{\lambda}\langle u^*(x)|y\rangle$.

□

Definizione D.3.3 (operatore hermitiano)**.** *Un operatore $u \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ è detto* hermitiano *o* autoaggiunto *se $u = u^*$.*

Ricordiamo che un operatore u è detto *compatto* se la chiusura dell'immagine, tramite u, di ogni insieme limitato è compatta. Gli operatori compatti costituiscono un sottospazio dell'algebra di Banach, precisamente la chiusura dell'insieme degli operatori di rango finito, e rappresentano dunque la migliore generalizzazione di ciò che nel caso finito-dimensionale sono le matrici. Per gli operatori compatti hermitiani è possibile dimostrare quello che può essere considerato il risultato fondante della teoria spettrale:

Teorema D.3.4. *Sia $u \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ un operatore compatto hermitiano. Allora esiste una base ortonormale di $\mathbb{H}$ che consiste di autovalori di u.*

Dimostrazione. Omessa. Richiede il Lemma di Zorn. □

Equivalentemente, se u è compatto ed hermitiano, se κ è la cardinalità di $\mathbb{H}$, esiste un operatore unitario (vd. sotto) $t : \mathbb{H} \to \ell^2(\kappa)$ tale che t^*ut agisce per moltiplicazione su $\ell^2(\kappa)$. In questa versione, è chiaro come il teorema spettrale sia una generalizzazione del teorema di diagonalizzazione delle matrici hermitiane, nel caso finito-dimensionale. Un corollario del teorema D.3.4 è il seguente:

Proposizione D.3.5 (decomposizione spettrale)**.** *Sia $u \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ un operatore compatto hermitiano. Allora esiste una base ortonormale $(e_i)_{i\in I}$ (i cui elementi sono detti* autovettori di *u) di $\mathbb{H}$ tale che i valori $\langle u|e_i\rangle$ in*

$$u = \sum_{i\in I} \langle u|e_i\rangle e_i \tag{D.3.4}$$

corrispondono esattamente agli autovalori di u. I sottospazi generati dagli elementi della base ortonormale cui sono associati in D.3.4 gli stessi autovalori sono detti autospazi *di u.*

Un risultato "soggettivo", che conclude questa brevissima trattazione della teoria spettrale è infine il seguente:

Proposizione D.3.6. *Siano $u, v \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ operatori compatti hermitiani. Allora, se u e v commutano, esiste una base ortonormale di $\mathbb{H}$ che consiste di autovettori sia per u che per v.*

Nel caso finito, questo significa che matrici commutanti possono essere espresse diagonalmente rispetto a una stessa base.

D.4 C^*-algebre e calcolo funzionale

Introduciamo la seconda forma di algebra di operatori:

Definizione D.4.1 (C^*-algebra)**.** *Una C^*-algebra $\mathcal{A}$ è un'algebra di Banach chiusa per aggiunzione e la cui norma soddisfi, per ogni $u \in \mathcal{A}$ la* C^*-identità*:*

$$\|uu^*\| = \|u\|^2 \tag{D.4.1}$$

La C^*-identità ha delle conseguenze molto importanti: essa implica anzitutto la seguente identità:

$$\|u\| = \|u^*\| \tag{D.4.2}$$

infatti si ha $\|u\| \cdot \|u\| = \|uu^*\| \leq \|u\| \cdot \|u^*\|$ e $\|u^*\| \cdot \|u^*\| = \|u^*u\| \leq \|u^*\| \cdot \|u\|$. Se si avesse $\|u\| > \|u^*\|$, allora $\|u\|^2 > \|u\|\|u^*\|$, il che è assurdo, e analogamente nel caso $\|u^*\| > \|u\|$. Questa identità implica a sua volta la seguente

$$\|u\| \cdot \|u^*\| = \|uu^*\| \tag{D.4.3}$$

A partire da queste equazioni, e da un noto risultato che va sotto il nome di *formula del raggio spettrale*:

$$\varrho(u) = \lim_n \|u^n\|^{1/n} \tag{D.4.4}$$

si può far vedere che in una C^*-algebra esiste una unica norma stellare, ossia soddisfacente la C^*-identità, ovvero per cui vale

$$\|uu^*\| = \varrho(uu^*) \tag{D.4.5}$$

Dalla C^*-identità segue subito allora che

$$\|u\|^2 = \varrho(uu^*) \tag{D.4.6}$$

Una importante conseguenza di questi fatti è la seguente:

Proposizione D.4.1. *Sia $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ uno *-morfismo di C^*-algebre (ovvero un morfismo algebrico tale che $\varphi(u^*) = \varphi(u)^*$) iniettivo. Allora φ è isometrico.*

Dimostrazione. (cenni) Il punto delicato della dimostrazione, qui omesso, è che per ogni $u \in \mathcal{A}$ hermitiano, si ha $\sigma(u) = \sigma(\varphi(u))$, da cui $\varrho(\varphi(u)) = \varrho(u)$, e dunque $\|\varphi(u)\| = u$. Dal momento che, per ogni operatore u, $(uu^*)^* = uu^*$, vale a dire uu^* è hermitiano, si ha $\|\varphi(u)\|^2 = \|\varphi(u)\varphi(u)^*\| = \|\varphi(uu^*)\| = \|uu^*\| = \|u\|^2$, da cui la tesi.

□

Lo strumento più elegante per studiare le proprietà degli operatori di una C^*-algebra $\mathcal{A}$ è costituito dal cosiddetto *calcolo funzionale*, ovvero dalla possibilità di costruire un'algebra a valori in $\mathcal{A}$. Il risultato alla base di questa costruzione è il seguente:

Teorema D.4.2. *Sia $\mathcal{A}$ una C^*-algebra e sia $u \in \mathcal{A}$. Allora, per ogni polinomio $Q(x) \in \mathbb{C}[x]$, vale la seguente identità:*

$$Q(\sigma(u)) = \sigma(Q(u)) \tag{D.4.7}$$

Dimostrazione. Nel caso in cui $Q(x) = k$ è una costante sappiamo che, se $z \in \ k\sigma(u) = \{k\lambda : \lambda \in \sigma(u)\}$, allora $|z|/|k| \leq \|u\|$, da cui $|z| \leq |k|\|u\| = \|ku\|$, e dunque $z \in \sigma(ku)$. Viceversa, se $z \in \sigma(ku)$, allora $|z| \leq \|ku\| = |k|\|u\|$, e dunque $z \in k\sigma(u)$.

Sia ora $Q(x)$ un arbitrario polinomio e sia $z \in \sigma(Q(u))$. Allora $Q(u) - zI$ non è invertibile. Per il teorema fondamentale dell'algebra, $Q(u) - zI$ si fattorizza nel prodotto di monomi $Q(u) - zI = \prod_{0<i\leq k}^{k} (u - \lambda_i I)$. Ora, tale prodotto non è invertibile se e solo se per almeno un $i \leq k$ si ha che $u - \lambda_i I$ non è invertibile, ovvero se e solo se per almeno un $i \leq k$, $\lambda_i \in \sigma(u)$. A questo punto, da $Q(\lambda_i I) - zI = 0$ segue $Q(\lambda_i) = z$, e dunque $z \in Q(\sigma(u))$. Dai "se e solo se" usati segue allora anche $Q(\sigma(u)) \subset \sigma(Q(u))$.

□

Una conseguenza del teorema D.4.2 è il seguente:

Teorema D.4.3. *Sia $\mathcal{A}$ una C^*-algebra e sia $u \in \mathcal{A}$. Sia $\mathcal{A}(u)$ la sotto-C^*-algebra di $\mathcal{A}$ generata da u. Allora esiste un isomorfismo isometrico $\varphi : C(\sigma(u)) \to \mathcal{A}(u)$ dall'algebra $C(\sigma(u))$ delle funzioni continue su $\sigma(u)$ e $\mathcal{A}(u)$.*

Dimostrazione. Applicando al teorema D.4.2 il teorema di Stone-Weierstrass, secondo cui l'algebra dei polinomi a coefficienti in un campo K è densa nell'algebra delle funzioni continue su K, otteniamo, per ogni $f \in C(\sigma(u))$, $f(\sigma(u)) = \sigma(f(u))$. L'isomorfismo φ è definito come $\varphi(f) := f(u)$. Ora, per un generale operatore u, per ogni $f \in C(\sigma(u))$, si ha che $\|f\|_{C(\sigma(u))} = sup\{|f(z)| \ |z \in \sigma(u)\}$, mentre $\|f(u)\|_{\mathcal{A}(u)} = \varrho(uu^*)^{1/2} = (sup\{|f(z)|\cdot|\overline{f(z)}| \ |z \in \sigma(u)\})^{1/2} = (sup\{|f(z)|^2|z \in \sigma(u)\})^{1/2} = \|f\|_{C(\sigma(u))}$, il che prova l'isometricità.

□

In particolare, l'algebra $\mathcal{A}(u)$ è commutativa, "insiemistica" (vd. §4.2), cosa che non può in alcun modo essere detta dell'algebra $\mathcal{A}(u, v)$ generata da due operatori. Servendoci del calcolo funzionale, possiamo mostrare con facilità le proprietà delle principali tipologie di operatori che si possono trovare in una C^*-algebra:

(unitari) sono gli operatori u che soddisfano $u^{-1} = u^*$, ovvero $uu^* = u^*u = I$. Il calcolo funzionale ci dice allora $\overline{\sigma(u)} = \sigma(u)^{-1}$ e, del resto, $1 = \|uu^*\| = \|u\|^2$, da cui segue che $\|u\| = 1$: si tratta cioè di isometrie, ovvero di operatori che preservano la norma e, quindi il prodotto scalare:

$$\langle u(x)|u(y)\rangle = \langle x|(u^*u)(y)\rangle = \langle x|y\rangle \tag{D.4.8}$$

da cui segue che lo spettro è contenuto nel cerchio unitario del piano complesso: $\sigma(u) \subset \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}||z| = 1\}$. Infine, gli unitari sono chiusi per prodotto: infatti, se u, v sono unitari, si ha $(uv)^* = v^*u^* = v^{-1}u^{-1} = (uv)^{-1}$.

(hermitiani) sono gli operatori, come visto sopra, che soddisfano $u = u^*$, ovvero sono autoaggiunti. Questi operatori soddisfano $\|u\| = \varrho(u)$, il che segue da $\|uu^*\| = \|u^2\| = \|u\|^2$ e dalla formula D.4.4. Dal calcolo funzionale segue $\sigma(u) = \overline{\sigma(u)}$, e dunque $\sigma(u) \subset \mathbb{R}$, lo spettro è reale. Si tratta cioè dei "reali non commutativi". Si noti che, per ogni operatore u, si ha che $u + u^*$ e uu^* sono hermitiani. Infine, gli hermitiani sono chiusi per somma: $(u + v)^* = u^* + v^* = u + v$.

(simmetrie) corrispondono agli unitari hermitiani: da $u = u^* = u^{-1}$, segue $u^2 = I$, che è la proprietà che caratterizza le simmetrie. Dal calcolo funzionale segue che $\sigma(u)^2 = \{1\}$, e dunque $\sigma(u) \subset \{-1, +1\}$.

(proiezioni) corrispondono agli hermitiani idempotenti: $u^2 = u^* = u$. Dal calcolo funzionale si ottiene $\sigma(u)^2 = \sigma(u) = \overline{\sigma(u)}$, da cui $\sigma(u) \subset \{0, 1\}$. Nel caso in cui $\mathcal{A}$ agisca su uno spazio di Hilbert $\mathbb{H}$, allora le proiezioni corrispondono alle proiezioni ortogonali P_X sui sottospazi X di $\mathbb{H}$: infatti, per ogni $x, y \in \mathbb{H}$, $\langle x, P_X(y)\rangle = \langle x_X + x_X^\perp|P_X(y)\rangle = \langle x_X|y_Y\rangle = \langle P_X(x)|P_X(y)\rangle = \langle x|P_X^*P_X(y)\rangle$ (in cui $x_X, x_X^\perp$ corrispondono a $P_X(x)$ e $I - P_X(x)$ - vd. sopra), da cui segue che P_X è una proiezione. Dal fatto che, per ogni operatore lineare idempotente u su $\mathbb{H}$, e per ogni $x \in \mathbb{H}$, x si decompone in modo unico come $x = x_M + x_M^\perp$, con $M = Im(u)$, segue che u è hermitiano se e solo se è una proiezione, e dunque ogni proiezione corrisponde a una proiezione ortogonale su un sottospazio di $\mathbb{H}$.

Dal momento che i sottospazi di uno spazio di Hilbert formano un reticolo, ovvero per ogni coppia X, Y di sottospazi, è definito il sottospazio $X \wedge Y := X \cap Y$ e il sottospazio $X \vee Y := \bigcap_{Z \leq \mathbb{H}, X \vee Y \subset Z} Z$, si verifica facilmente che, date due proiezioni u, v, cui sono associati rispettivamente i sottospazi X e Y, si ha $uv = vu$ se e solo se uv è la proiezione associata al sottospazio $X \wedge Y$, e $u + v$ è una proiezione se e solo se $X + Y = X \vee Y$.

(isometrie parziali) corrispondono agli hermitiani u tali che uu^* è una proiezione. Dal calcolo funzionale segue $\sigma(uu^*) \subset \{0, 1\}$; dal momento che $\sigma(uv) = \sigma(vu)$, in quanto $uv - zI$ è invertibile se e solo se $I - uv/z$ è invertibile se e solo se $I - vu/z$ è invertibile, avendosi $(I - vu/z)^{-1} = 1 + v(I - uv/z)^{-1}u/z$, otteniamo che $\sigma(u^*u) \subset \{0, 1\}$ e dunque, per il teorema D.4.3, da $\sigma(u^*u)^2 = \sigma(u^*u) = \overline{\sigma(u^*u)}$, otteniamo che anche u^*u è una proiezione (e dunque anche u^* è un'isometria parziale). In definitiva, una isometria parziale può essere vista come una isometria dal sottospazio associato alla proiezione u^*u (detto *dominio di* u) a quello associato alla proiezione uu^* (detto *immagine di* u). In particolare, se v è un isometria, allora vu e uv sono ancora isometrie parziali. D'altra parte, il prodotto di due isometrie parziali u, v è ancora una isometria parziale se e solo se u^*u e vv^* commutano (proposizione 4.4.2 a pag. 262), mentre la somma di due isometrie parziali è ancora una isometria parziale se e solo se $u^*v = vu^* = 0$: infatti solo in questo caso si ottiene $((u+v)(u+v)^*)^2 = (uu^* + vv^* + u^*v + vu^*)^2 = (uu^* + vv^*)^2 = uu^* + vv^*$.

Bibliografia

[1] Abrusci, Vito Michele: *Hilbert's Axiomatics of Logic.* esposto alla conferenza *"Hilbert's Axiomatics: Geometry, Physics, Logic"*, 2011.

[2] Abrusci, Vito Michele e Lorenzo Tortora de Falco: *Appunti del corso di Logica (a.a. 2008/2009)*, 2009.

[3] Andreoli, Jean Marc: *Logic programming with focusing proofs in linear logic.* Journal of Logic and Computation, 1992.

[4] Apostol, Costantin, Ciprias Foias e Carl Pearcy: *That quasinilpotent operators are norm-limits of nilpotent operators revisited.* Nel *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1979.

[5] Basaldella, Michele e Claudia Faggian: *Ludics with repetitions (exponentials, interactive types and completeness).* Logical Methods in Computer Science, 7, 2011.

[6] Capozzi, Mirella: *Kant e la logica, vol.1.* Bibliopolis, 2006.

[7] Caressa, Paolo: *Metodi matematici della Meccanica Quantistica.* Note del corso di Meccanica Quantistica del Prof. Sergio Doplicher all'Università La Sapienza di Roma nell'A.A. 93/94, 2005.

[8] Cellucci, Carlo: *La filosofia della matematica del Novecento.* Editori Laterza, 2007.

[9] Chomsky, Noam: *Aspects of the theory of syntax.* The M.I.T. Press, 1965.

[10] Chomsky, Noam: *Linguaggio e problemi della conoscenza.* Il Mulino, 1998.

[11] Chomsky, Noam: *Nuovi orizzonti nello studio del linguaggio e della mente.* Il Saggiatore, 2005.

[12] Connes, Alain: *Noncommutative geometry.* Academic Press, 1994.

[13] Dedekind, Richard: *Essenza e significato dei numeri (titolo originale: Was Sind und was Sollen die Zahlen?) (1893).* Alberto Stock, 1927.

[14] Dummett, Michael: *The philosophical significance of Gödel's theorem.* Nel *Truth and other enigmas.* Harvard University Press, 1978.

[15] Dummett, Michael: *Truth.* Nel *Truth and other enigmas.* Harvard University Press, 1978.

[16] Dummett, Michael: *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics (1959).* Nel *Truth and other enigmas.* Harvard University Press, 1978.

[17] Dummett, Michael: *The logical basis of metaphysics.* Columbia University Press, 1991.

[18] Dummett, Michael: *What is mathematics about?* Nel George, Alexander (curatore): *Mathematics and mind.* Oxford University Press, 1994.

[19] Fodor, Jerry e Jerrold J. Katz: *The structure of a semantic theory.* Language, 39(2), 1963.

[20] Fodor, Jerry e Ernest Lepore: *The compositionality papers.* Clarendon Press, 2002.

[21] Frege, Gottlob: *The foundations of arithmetic.* Basil Blackwell, 1950.

[22] Frege, Gottlob: *Conceptual notation (1879).* Nel Bynum, Terrell Ward (curatore): *Conceptual notation and related articles.* Oxford University Press, 1972.

[23] Frege, Gottlob: *Il pensiero, una ricerca logica (1918).* Nel Di Francesco, Michele (curatore): *F.L. Gottlob Frege, Ricerche logiche.* Guerini e associati, 1988.

[24] Frege, Gottlob: *Senso e significato (1892).* Nel Penco, Carlo e Eva Picardi (curatori): *Frege, senso, funzione e concetto.* Editori Laterza, 2001.

[25] George S. Boolos, John P. Burgess, Richard C. Jeffrey: *Computability and logic.* Cambridge University Press, 1974.

[26] Ghirardi, Gian Carlo: *Un'occhiata alle carte di Dio, gli interrogativi che la scienza moderna pone all'uomo.* Il Saggiatore, 2003.

[27] Girard, Jean Yves: *Linear Logic.* Theoretical Computer Science, 1987.

[28] Girard, Jean Yves: *Multiplicatives.* Logic and Computer Science: new trends and applications, 1988.

[29] Girard, Jean Yves: *Geometry of interaction I: interpretation of system F.* Nel Ferro, Bonotto, Valentini e Zanardo (curatori): *Logic colloquium*, 1989.

[30] Girard, Jean Yves: *Proof theory and logical complexity.* Elsevier Science Pub Co, 1990.

[31] Girard, Jean Yves: *Light Linear Logic.* Information and Computation, 143, 1998.

[32] Girard, Jean Yves: *On the meaning of logical rules I: syntax vs. semantics.* Nel Berger, U. e H. Schwichtenberg (curatori): *Computational logic*, NATO series F 165. Springer-Verlag, 1999.

[33] Girard, Jean Yves: *Locus solum: From the Rules of Logic to the Logic of Rules.* Mathematical Structures in Computer Science, 11, 2001.

[34] Girard, Jean Yves: *From foundations to ludics.* Bulletin of Symbolic Logic, 9(2), 2003.

[35] Girard, Jean Yves: *Between logic and quantic: a tract.* Nel Ehrhard, Girard, Ruet e Scott (curatori): *Linear logic in computer science.* Cambridge University Press, 2004.

[36] Girard, Jean Yves: *Le point aveugle Tome 1, Cours de logique, Vers la perfection.* Vision des sciences. Hermann, 2006.

[37] Girard, Jean Yves: *Le point aveugle Tome 2, Cours de logique, Vers l'imperfection.* Vision des sciences. Hermann, 2007.

[38] Girard, Jean Yves: *The phantom of transparency.* 2008.

[39] Girard, Jean Yves: *Identité, égalitè, isomorphie; ou ego, individu, espéce.* 2009.

[40] Girard, Jean Yves: *Geometry of Interaction V: logic in the hyperfinite factor.* Theoretical Computer Science, 2010.

[41] Girard, Jean Yves: *La logique comme géométrie du cognitif.* Nel Joinet, Jean Baptiste e Samuel Tronçon (curatori): *Ouvrir la logique au mond: Philosophie et Mathématique de l'interaction.* Hermann, 2010.

[42] Girard, Jean Yves: *Le fantôme de la transparence.* 2010.

[43] Girard, Jean Yves: *La syntaxe transcendantale, manifeste.* 2011.

[44] Girard, Jean Yves: *Normativity in logic.* Epistemology vs. Ontology, 2011.

[45] Girard, Jean Yves, Yves Lafont e Paul Taylor: *Proofs and types.* Cambridge University Press, 1989.

[46] Kant, Immanuel: *Critica della ragion pura.* Gli Adelphi, 2004.

[47] Kripke, Saul A.: *Wittgenstein on Rules and Private Language.* Harvard University Press, 1982.

[48] Kripke, Saul A.: *Nome e necessità (1980).* Bollati Boringhieri, 2003.

[49] Krivine, Jean Louis: *Lambda calculus, types and models.* Ellis Horwood, 1993.

[50] Lewis, David K.: *General semantics.* Synthese, 1970.

[51] Martin-Löf, Per: *Hauptsatz for the intuitionistic theory of iterated inductive definitions.* Nel Fenstad, J.E. (curatore): *Proceedings of the 2nd Scandinavian Logic Symposium (Oslo)*, 1970.

[52] Martin-Löf, Per: *Intuitionistic type theory.* Bibliopolis, 1984.

[53] Maurel, François: *Un cadre quantitatif pour la Ludique.* tesi di dottorato, Université Paris VII, 2004.

[54] McDowell, John: *Wittgenstein on following a rule.* Synthese, 58, 1984.

[55] Pedicini, Marco e Mario Piazza: *Elementary complexity into the hyperfinite* $\mathbf{II}_1$ *factor.* Nel *CiE2007*, 2007.

[56] Prawitz, Dag: *Natural deduction, a proof-theoretical study.* Almqvist & Wiskell, 1965.

[57] Prawitz, Dag: *Towards a foundation of a general proof theory.* Logic, Methodology and Philosophy of Science, VI, 1971.

[58] Prawitz, Dag: *Sull'idea di una teoria generale della dimostrazione.* Bollettino UMI 4/9, 1974.

[59] Prawitz, Dag: *Truth and objectivity from a verificationist point of view.* Nel Dales, H.G. e G. Olivieri (curatori): *Truth in mathematics.* Clarendon Press, 1998.

[60] Putnam, Hilary: *Models and reality.* Nel Benacerraf, Paul e Hilary Putnam (curatori): *Philosophy of Matemathics: selected readings.* Cambridge University Press, 1984.

[61] Putnam, Hilary: *The meaning of "meaning (1975).* Nel *Philosophical papers vol.2: Mind, Language and reality.* Cambridge University Press, 1985.

[62] Quine, Willard Van Orman: *Word and Object.* MIT Press, 1964.

[63] Retoré, Christian: *A semantic characterisation of the correctness of a proof net.* Mathematical Structures in Computer Science, 7(5), 1997.

[64] Seiller, Thomas: *From proof-nets to the hyperfinite factor.* tesi di laurea, Universitè Paris 7 - Denis Diderot, 2008.

[65] Skolem, Thoralf: *Axiomatized set theory (1922).* Nel Van Heijenoort, Jean (curatore): *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic, 1879-1931.* Harvard University Press, 1967.

[66] Tarski, Alfred: *La concezione semantica della verità e i fondamenti della semantica (1944).* Nel Linsky, L. (curatore): *Semantica e filosofia del linguaggio.* Il Saggiatore, 1969.

[67] Thomason., Richmond H. (curatore): *Formal philosophy : selected papers of Richard Montague.* Yale University Press, 1974.

[68] Troelstra, Anne Sjerp e Helmut Schwichtenberg: *Basic proof theory.* Cambridge University Press, 1996.

[69] Tronçon, Samuel: *Le tournant géométrique*. Presses de la Sorbonne, 2009.

[70] Tronçon, Samuel: *Interaction et signification*. Nel Joinet, Jean Baptiste e Samuel Tronçon (curatori): *Ouvrir la logique au mond: Philosophie et Mathématique de l'interaction*. Publications de la Sorbonne, 2010.

[71] Tronçon, Samuel e Marie Renée Fleury: *Speech acts in ludics*. Nel *Games, dialogues and interactions*. Springer, 2010.

[72] Wittgenstein, Ludwig: *Remarks on the Foundations of Mathematics (1956)*. Blackwell, 1978.

[73] Wittgenstein, Ludwig: *Ricerche filosofiche (1953)*. Biblioteca Einaudi, 1999.

[74] Wittgenstein, Ludwig: *Lezioni sui fondamenti della matematica (1976)*. Universale Bollati Boringhieri, 2002.

[75] Wright, Crispin: *Wittgenstein on the Foundations of Mathematics*. Duckworth, 1980.

[76] Wright, Crispin: *Rails to Infinity, essays on themes from Wittgenstein's Philosophical Investigations*. Harvard University Press, 2001.