Introduzione Senso e denotazione

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& (11+9)\times(2+4) \arrow[dl, "+L"'] \arrow[dr, "+R"] & \\
20\times(2+4) \arrow[dr, "+R"'] & & (11+9)\times 6 \arrow[dl, "+L"] \\
& 20\times 6 \arrow[d] & \\
& 120 &
\end{tikzcd}$$

i nodi denotano lo stesso "oggetto/valore"

le frecce indicano delle trasformazioni/riscritture

il "senso operazionale" cattura

significato operazionale

La denotazione è in qualche modo una invariante ma se è troppo "statica" allora rischia di far collassare gli oggetti come la semantica Frege / Tarsky

1848/1925 1902/1983

denotazione Frege-Tarsky

Semantica delle proposizioni

quando è vera/falsa?

quando è vera A

A	B	¬A	A∧B	A∨B
0	0	1	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

senso / risultati

Dimostrazioni

"come è stata fornita A"

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots \\ A\to B\end{matrix}}{B}\ \text{MP}$$

Heyting, Gentzen, Prawitz, Girard

Denotazione : Tarski - Frege

quando una prop logica è vera / falsa ?   es tavole di verità logica

$$\begin{array}{l} P_1 \\ \vdots \\ P_n \\ \vdots \end{array} \longrightarrow \{0, 1\}$$

$P_i = P_j$ se $T(P_i) = T(P_j)$

Senso : teoria della dimostrazione (Hilbert, Gentzen, Prawitz, Girard)

come posso stabilire che una prop è vera (dimostrazione) o falsa (refutazione

$$\text{MP} \ \frac{\begin{array}{cc} \vdots & \vdots \\ A & A \to B \end{array}}{B} \qquad \frac{\begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ \bot \end{array}}{\neg A} \text{RAA}$$

$$\begin{tikzcd} & \delta \arrow[dl, squiggly] \arrow[dr, squiggly] & \\ \delta' \arrow[dr, squiggly] & & \delta'' \arrow[dl, squiggly] \\ & \sigma \arrow[d] & \\ & {} & \end{tikzcd}$$

dove "⇝" può essere derivazioni o riduzione step.

ma cos'è l'invarianza in questo caso?

- nelle dim. preservo il vero
- nelle rid. preservo le cond. la stessa metrica/costitutiva
- c'è anche un'altra invarianza, geometrica / topologica

Normalizzazioni → cut-elimination
Normalizzazioni → focusing

in entrambi i processi la stessa invarianza topologica viene preservata

Cosa possiamo dire di una proposizione come questa.

$\underbrace{998+1}_{p} = 999$ $\qquad\qquad$ $\underbrace{27 \times 37}_{q} = 999$?

"=" come uguaglianza

"=" le due espressioni denotano la stessa cosa "lo stesso valore di verità":

è vero/falso ?

denotazione / semantica / verità

"=" come $\Rightarrow$ produzione

esiste una procedura ("×") che fa passare da sx a dx.

senso / sintassi / dimostrazioni
procedure.

La tradizione semantica "vero/falso" che inizia con Frege / Tarsky
1848-1925 $\qquad$ 1902-1983

Semantica delle proposizioni: quando è vera/falsa

Heyting 1898-1980

Semantica delle Dimostrazioni

- Gentzen 1909-1945
- Prawitz 1936 -
- Girard 1947 -

Studio delle Dimostrazioni

- quando posso dimostrare A ?
- cosa vuol dire dimostrare A ?

Noi ci occuperemo della Teoria della Dimostrazione

Cos'è una dimostrazione logica?

* Deduzione Naturale { Gentzen 1935, Prawitz 1965 } Teorema di normalizzazione

* Logica classica/intuizionista : Calcolo dei Sequenti (Gentzen 1930)

* **Teorema di Eliminazione dei Tagli** (cut-elimination)

Conseguenza * **Proprietà della sottoformula** (analiticità delle dimostrazioni logiche)

* **Logica Lineare** (Girard, 1987) → (controllo delle regole strutturali)

- Calcolo dei Sequenti LL (eliminazione dei tagli)
- Reti Dimostrative (Proof net)

$\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ senza tagli

- → cut-elim. alla base della Programmazione Funzionale
- → cut-free proof search alla base della Programmazione Logica.

Cut Elimination e Focalizzazione.

Natural Deduction   intuitionistic fragment $\Rightarrow, \wedge$

sulle denotazione

A	B	$A \wedge B$	vel $A \vee B$	aut $A \oplus B$	$A \Rightarrow B = \cancel{\neg A \vee B}$	$\neg A$
0	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0	
1	1	1	1	0	1	

$\neg A \vee B$

- Tarski – Frege approccio denotazionale

- senso. – come costruire una dimostrazione / refutazione di A
  - quando è vera A.

• denotazione : vero / falso A

• senso / meaning : dimostrazione A

cos'è una dimostrazione
quando può essere
"normale"
cut-free senza
circoli viziosi.

Natural Deduction → Calcolo dei Sequenti → Reti dimostrative logica lineare.
Logica intuizionista   logica classica

Deduzione Naturale: frammento minimale $\boxed{\wedge, \Rightarrow}$

Gentzen 1935 - Prawitz 1965 (Girard P&T)

• una deduzione è un albero

$$\Pi = \begin{array}{ccc} A_1 & \cdots & A_n \\ & \vdots & \\ & C & \end{array}$$

foglie: ipotesi/assunzioni

C: conclusione/radice dell'albero

le foglie/ipotesi { attive/vive, scaricate

A attiva $[A]$ scaricata/cancellata

Def. induttiva (albero deduttivo/deduzione)

• **base**: A • è un albero, una ded. di A da A.

• **passo induttivo**: $\begin{array}{c} \delta \; \vdots \\ A \end{array}$ è una ded. di A

introduzione	eliminazione

• regole delle $\wedge$ (intr)

$$\dfrac{\begin{array}{c}\delta \vdots \\ A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots \gamma \\ B\end{array}}{A \wedge B}\, I\wedge \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots \\ A \wedge B\end{array}}{A}\, E_1\wedge \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots \\ A \wedge B\end{array}}{B}\, E_2\wedge$$

premessa principale

• regole delle $\Rightarrow$

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A] \\ \vdots\, \delta \\ B\end{array}}{A \Rightarrow B}\, I\Rightarrow$$

$[A]$ ipotesi/scarico ipotesi

~~∅, oppure~~ $n \geq 0$ occorrenze di A non scaricate

$$\delta : \dfrac{\begin{array}{c}\sigma \\ \vdots \\ A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\gamma \\ \vdots \\ A \Rightarrow B\end{array}}{B}\, E\Rightarrow$$

premessa principale

modus ponens.

Normalizzazione "Detours" passo di normalizzazione.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\delta\\ \vdots\\ A\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots\,\sigma\\ B\end{array}}{A \Rightarrow B}\, I\Rightarrow}{B}\, E\Rightarrow \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c}\delta\\ \vdots\\ A\\ \vdots\\ B\end{array}$$

redex

redex A se è intr. da I e premessa principale della reg. di eliminazione.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\delta\\ \vdots\\ A\end{array} \quad \begin{array}{c}\delta'\\ \vdots\\ B\end{array}}{A \wedge B}\, \wedge I}{A}\, E_1\wedge \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c}\delta\\ \vdots\\ A\end{array}$$

redex

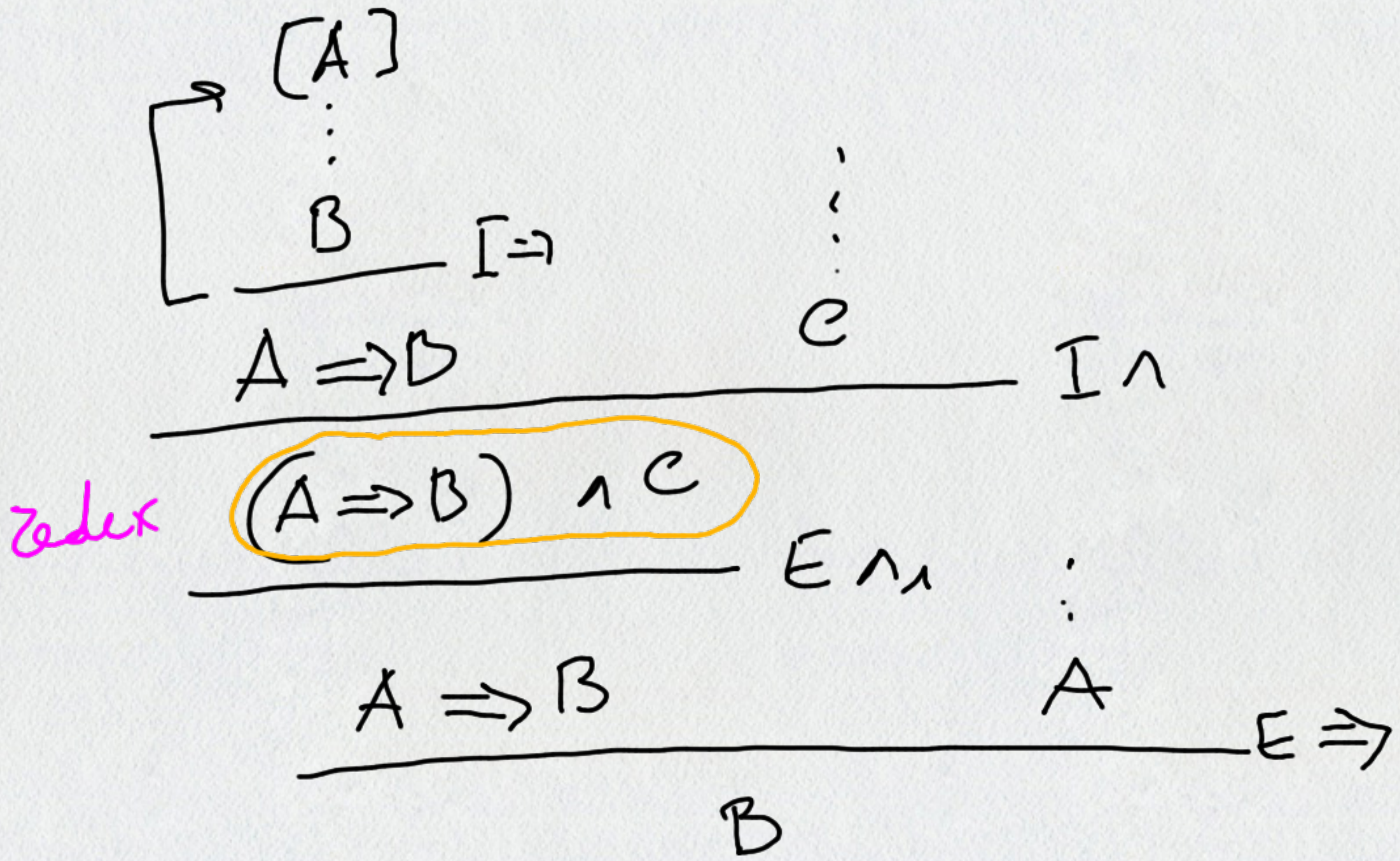
$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\delta\\ \vdots\\ A\end{array} \quad \begin{array}{c}\delta'\\ \vdots\\ B\end{array}}{A \wedge B}}{B}\, E_2\wedge \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c}\delta'\\ \vdots\\ B\end{array}$$

Teorema di Normalizzazione

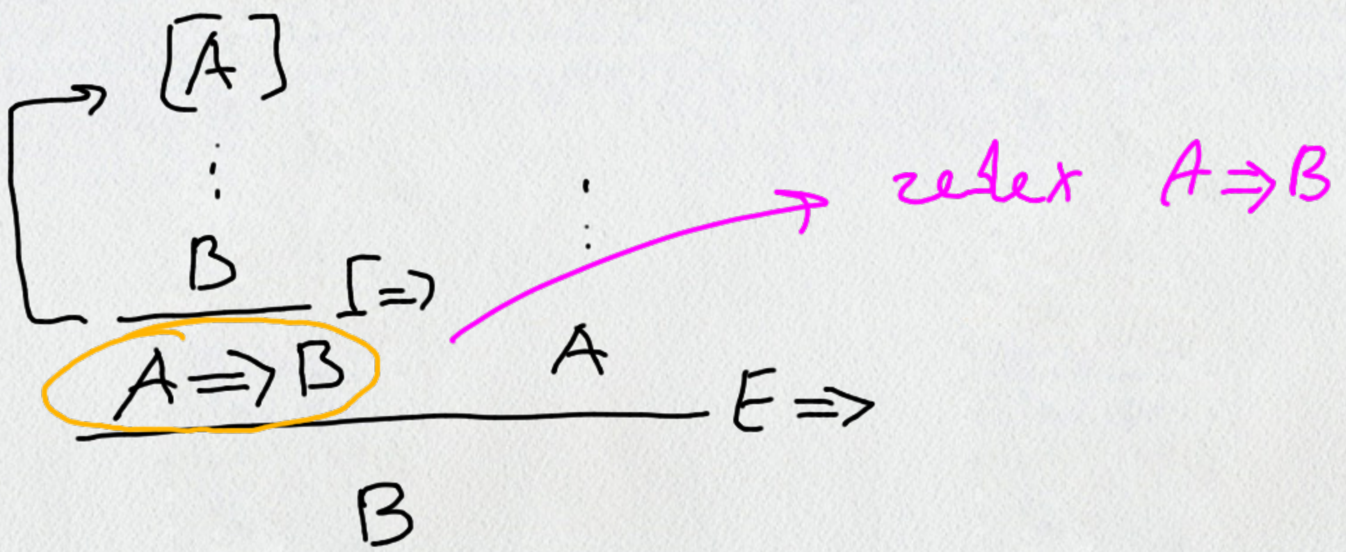
Data una deduzione δ di A da $\Gamma = A_1 \ldots A_n$ posso trasformarla in una δ' di A da Γ senza redex.

Idea della dimostrazione.

attenzione! la riduzione di un redex può introdurre nuovi redex.



redex $(A \Rightarrow B) \wedge C$



la complessità del nuovo redex diminuisce.

redex $(A \Rightarrow B)$ ma di "complessità logica minore"

Complessità logica di A:

$$
\begin{cases}
\text{se } A \text{ è un atomo} \Rightarrow \mathbb{C}(A) = 0 \\
\text{se } \neg A \Rightarrow \mathbb{C}(\neg A) = \mathbb{C}(A) + 1 \\
\text{se } A \bullet B \Rightarrow \mathbb{C}(A \bullet B) = \mathbb{C}(A) + \mathbb{C}(B) + 1
\end{cases}
$$

dove $\bullet \in \{\wedge, \Rightarrow\}$.

Def: altezza di una deduz. è l'altezza dell'albero della deduzione

- δ A singolo nodo $h_\delta = 0$

- $$\dfrac{\begin{matrix}\delta_1 & & \delta_2 \\ \vdots & & \vdots\end{matrix}}{A}\, z \quad \Rightarrow \quad \max\{h_{\delta_1}, h_{\delta_2}\} + 1.$$

Complessità del redex ; complessità logica del redex

$C(A) = 0$ se A atomica

$C(\neg A) = C(A) + 1$

$C(A \circ B) = C(A) + C(B) + 1$ se $\circ \in \{\wedge, \Rightarrow\}$

Complessità della deduzione δ,

$$C(\delta) = \sum_{i=1}^{n} C(A_i)$$ dove A_i è un redex di δ

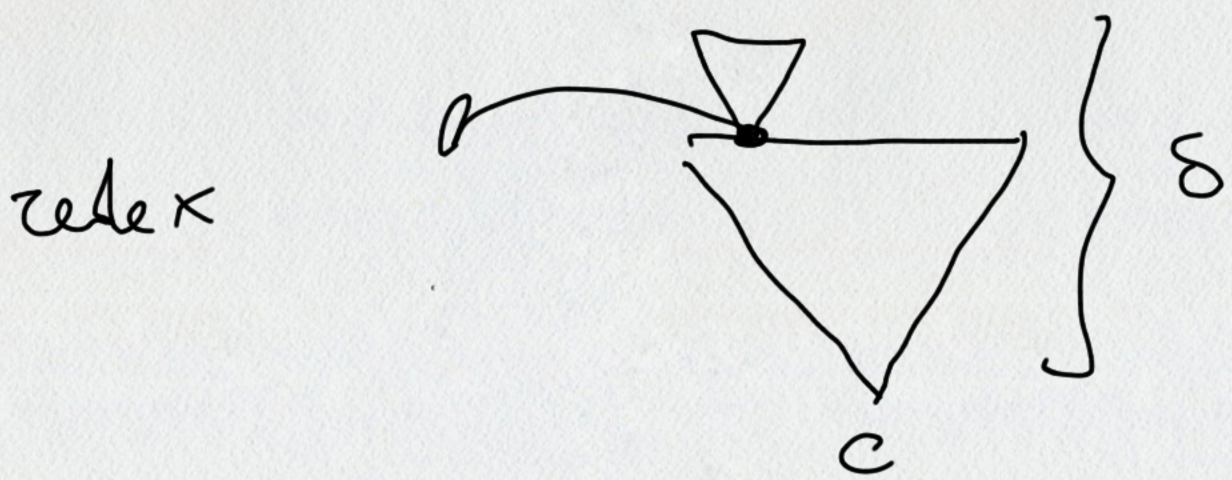
Proof of normalization by induction su $\mathfrak{C}(\delta) = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{C}(A_i)$

per A_i redex di δ

- **base** $\mathfrak{C}_\delta = 0$ allora δ è normale

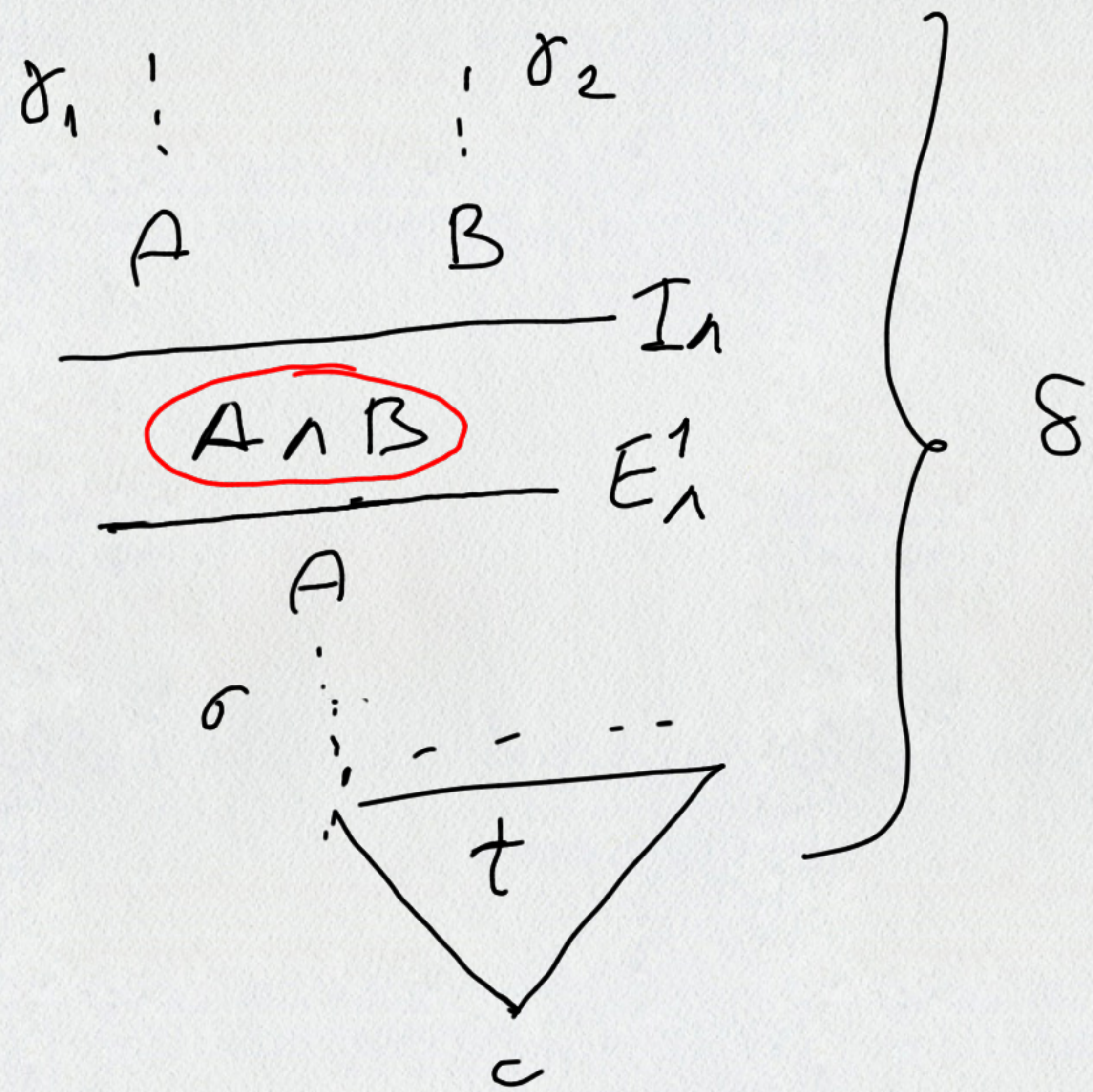
- **passo**: $\mathfrak{C}(\delta) > 0$

Consideriamo un qualsiasi redex di δ

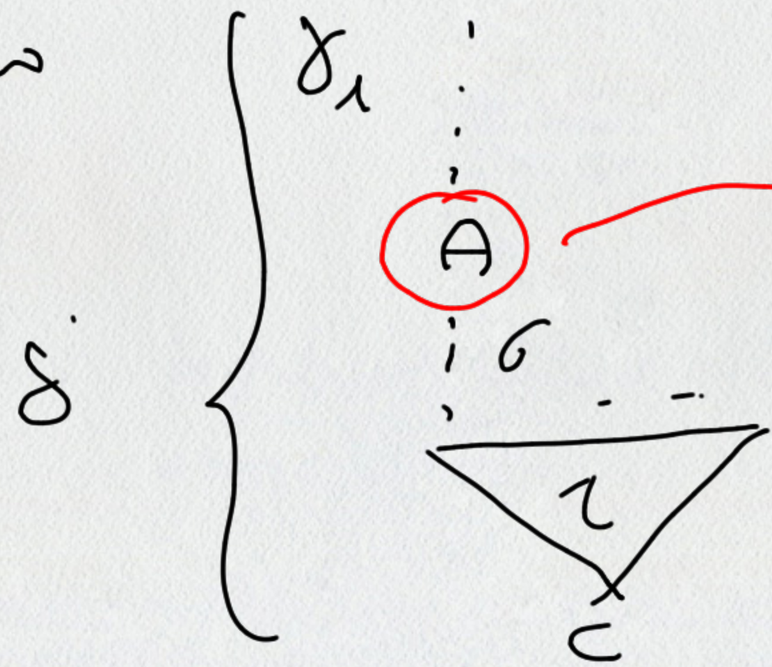


analizziamo i due possibili casi redex = $\begin{cases} A \wedge B & \text{1 caso} \\ A \Rightarrow B & \text{2 caso} \end{cases}$

1° caso: redex $A \wedge B$



allora otteniamo

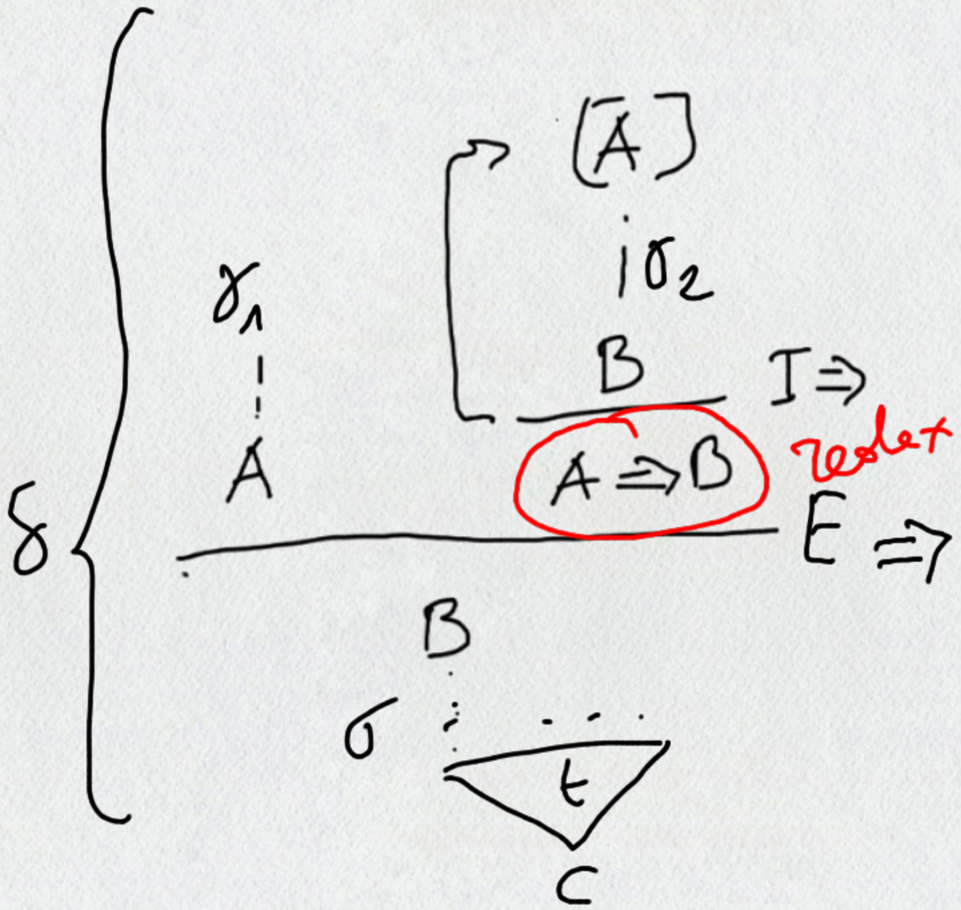


nuovo redex? in tal caso $I(\delta') < I(\delta)$

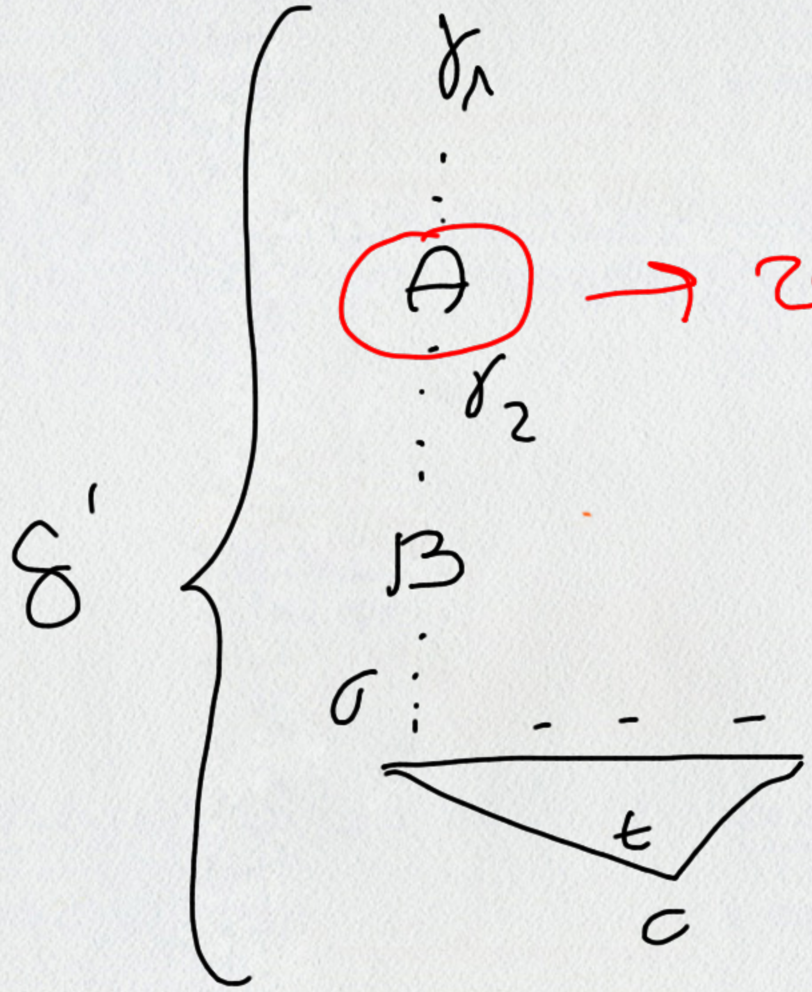
quindi possiamo applicare l'ip. ind

$\delta \rightsquigarrow \delta' \rightsquigarrow^{*} \delta^{\#}$ normale

2° caso: redex $A \Rightarrow B$



⇝ riduco



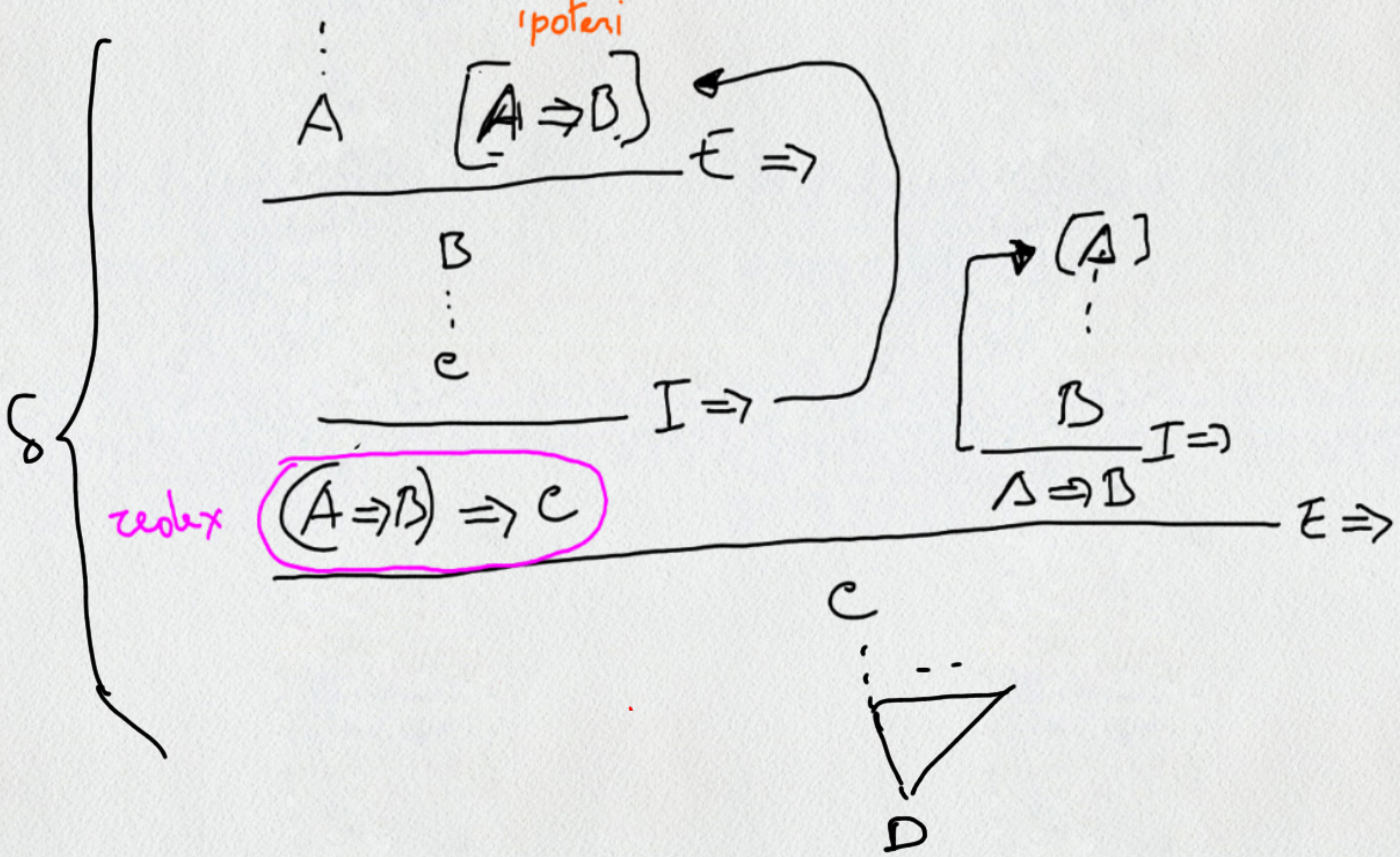
→ redex?

$\mathbb{C}(\delta') < \mathbb{C}(\delta)$

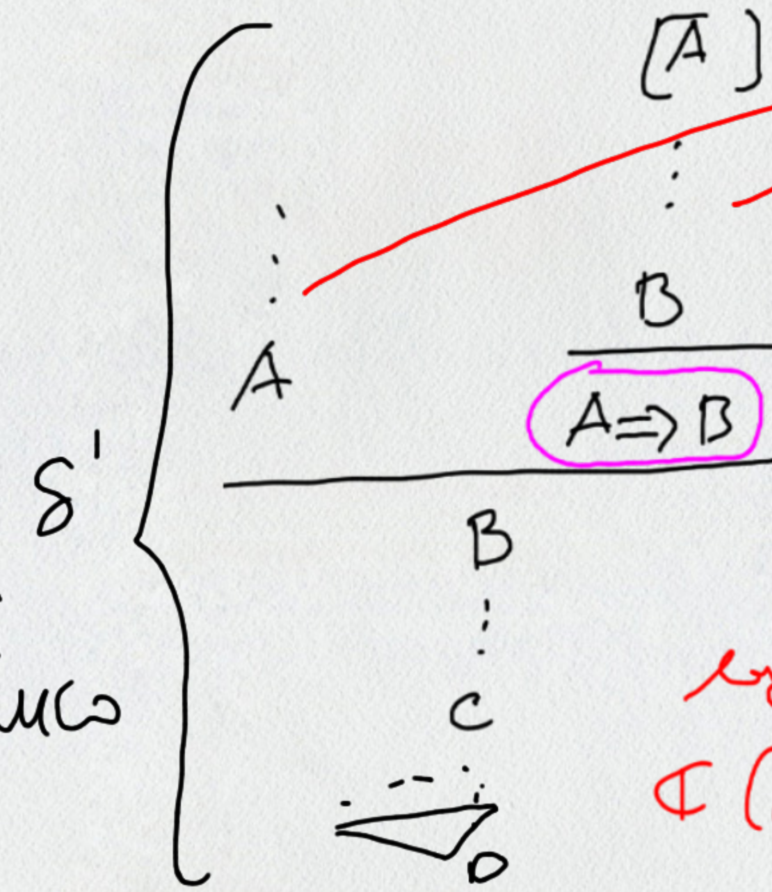
quindi ip. ind.

$\delta \rightsquigarrow \delta' \rightsquigarrow^* \delta^{\#}$ normale

Esempio



⇝ riduco



nota: per ipotesi non ci sono redex di complessità $\geq \mathbb{C}_\delta$

→ è un nuovo redex ma le sue complessità logica è $\mathbb{C}(A \Rightarrow B) < \mathbb{C}((A \Rightarrow B) \Rightarrow C)$

$\Rightarrow \delta''$ normale

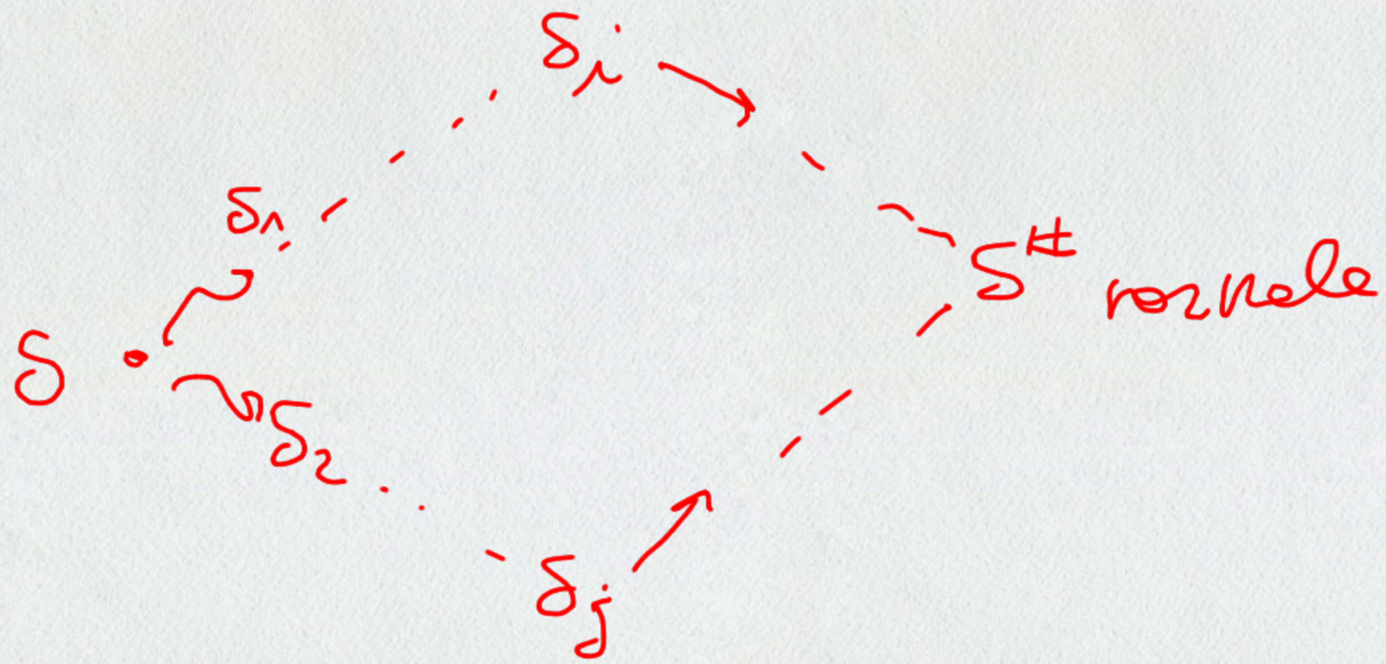
quindi ip. ind. è normalizzabile.

Osserva:

la deduzione naturale (minimale) è Strongly Normalizing

SN

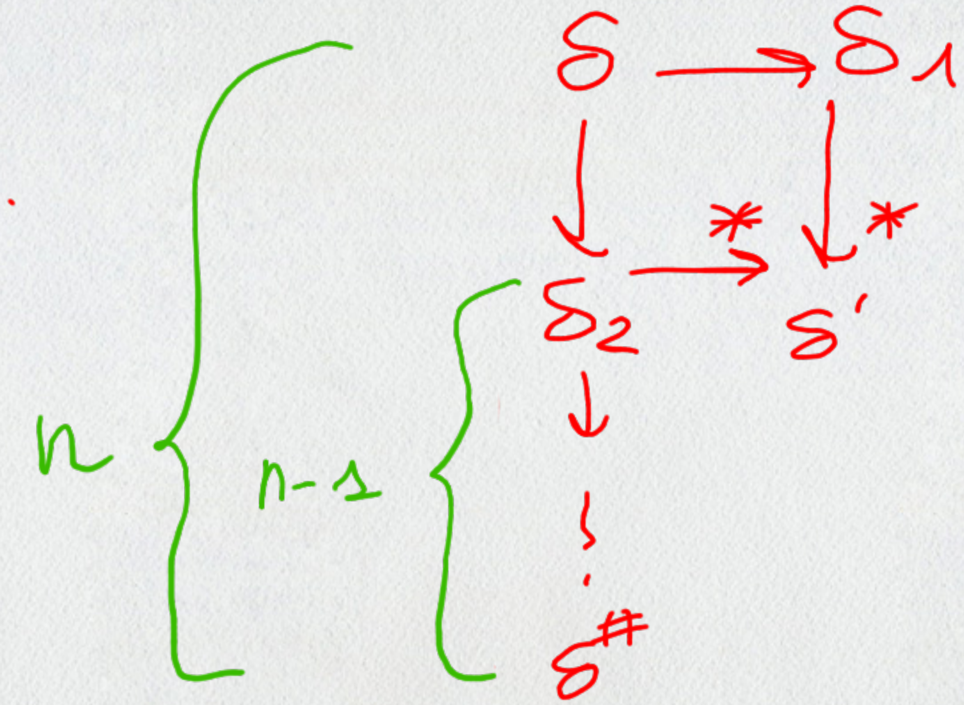
cioè ogni strategia di normalizzazione Termina con la forma normale



Weak normalization se esiste (almeno) una strategia -

WN

WN + Local Confluenza $\Longrightarrow$ SN.



Local confluence.

Conseguenze della normalizzazione: Proprietà delle sottoformule

Teorema: se δ è una deduzione normale di A da Γ allora:

(1) ogni formula che compare nella deduzione δ è sottoformula:
- della conclusione A,
- oppure di una delle ipotesi vive di Γ.

(2) Se δ termina con regole di eliminazione allora esiste un cammino principale

Lemma $A_0, A_1 \ldots A_n$ t.c.
- A_0 è una ipotesi viva $\quad A_0 \in \Gamma$
- A_n è la concl. di $\delta \quad A_n = A$
- A_n è sottoformula di A_0
- $\forall i = 0, \ldots, n-1$ A_i è la premessa principale e A_{i+1} la conclusione di una regola di eliminazione

$$\frac{A_i \qquad C}{A_{i+1}} E$$

A_i è premessa principale di una regola di eliminazione

esempio:

$$\delta : \frac{A_i = B \wedge C}{A_{i+1} = \quad B} E\wedge_1 \qquad \delta : \frac{A_i = B \Rightarrow C \qquad B}{A_{i+1} = C}$$

- Proof per ind. su h_δ (su l'altezza di δ_A)

- se δ termina con una regola di introduzione

$$\delta \quad \dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ B\end{array}}{A \Rightarrow B}\, I\Rightarrow \qquad \text{opp.} \qquad \delta \quad \dfrac{\begin{array}{cc}\vdots & \vdots \\ A & B\end{array}}{A \wedge B}$$

allora per ip. ind. vale la P.S.F. per $\begin{array}{cc}\vdots & \vdots \\ A & B\end{array}$ quindi vale per δ. $\boxed{\text{Non serve dire nulla su (2)}}$

- altrimenti se δ termina con una regola di eliminazione, come ad esempio:

cammino principale

$$\delta \text{ normale: } \dfrac{\begin{array}{cc}\delta' & \delta'' \\ \vdots & \vdots \\ A \Rightarrow B & A\end{array}}{B}\, E\Rightarrow$$

esisterà un cammino principale con concl. $A \Rightarrow B$

$\Rightarrow$ c: $A_0 \dots A \Rightarrow B$

$\Rightarrow$ c': $A_0 \dots A \Rightarrow B, B$ è un cammino principale in δ

la premessa principale $A \Rightarrow B$ non può essere la concl. di una regola di intr. perché la δ è per ip. t. normale (senza redex). quindi posso appl. l'ip. ind. a δ' (e δ'') quindi $A \Rightarrow B$ è concl. di una regola di eliminazione oppure è una ipotesi viva, allora $\exists$ in δ' un cammino principale per cui vale la pp. (2) e quindi per δ vale anche la (2) ■

Estendiamo il frammento minimale $\wedge, \Rightarrow$ al frammento intuizionista $\vee, \neg$

- la negazione $\neg A = A \Rightarrow \bot$ dove $\bot$ è il simbolo dell'assurdo

  $\bot$ non è derivabile (senza ipotesi)

$$\dfrac{A \qquad A \Rightarrow \bot}{\bot}\, E\Rightarrow$$

$\boxed{\begin{array}{l} NJ = \wedge, \vee, \Rightarrow, \neg \\ \text{Frammento intuizionista} \end{array}}$

$$\begin{array}{c}\vdots \\ \dfrac{\bot}{C}\, E\bot\end{array}$$ ex falso, quodlibet

Riduzione dei redex. $\dfrac{I \blacksquare}{E \blacksquare}$

- regole delle disgiunzioni.

  introduzione $\vee$

$$\dfrac{A}{A \vee B}\, I_1\vee \qquad \dfrac{B}{A \vee B}\, I_2\vee$$

  eliminazione $\vee$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots \\ A \vee B\end{array} \qquad \begin{array}{c}[A] \\ \vdots \\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}[B] \\ \vdots \\ C\end{array}}{C}\, E\vee$$

scarica ipotesi

. per $\bot$ non ci sono regole perché non $\exists$ le reg. di intr. del $\bot$

. per le $\vee$.

Riduzione

$$\delta\ \dfrac{\begin{array}{c}\varphi \vdots \\ \dfrac{A}{A \vee B}\, I\vee\end{array} \qquad \begin{array}{c}[A] \\ \vdots \gamma \\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}[B] \\ \vdots \sigma \\ C\end{array}}{C}\, E\vee \quad \longrightarrow \text{ riduce } \quad \delta' : \begin{array}{c}\varphi \vdots \\ A \\ \vdots \gamma \\ C\end{array}$$

Problemi:

* Problemi con le proprietà della sottoformula.

* non c'è relazione tra $A \vee B$ e C

Problemi con la Proprietà della sottoformula per il frammento completo intuizionista $\{\wedge, \Rightarrow, \vee, \neg\}$

è una deduzione normale?

$$\delta : \quad \dfrac{\dfrac{\vdots}{A \vee A} \qquad \dfrac{[A] \quad [A]}{A \wedge A}\, I\wedge \qquad \dfrac{[A] \quad [A]}{A \wedge A}\, I\wedge}{\dfrac{A \wedge A}{A}\, E\wedge}\, E\vee$$

scarica tutte le ipotesi A

NORMALE

Problema: ho una deduzione δ di A da $A \vee A$ normale ma ci sono delle occorrenze di formule $(A \wedge A)$ che non sono sottoformule né delle ipotesi né delle conclusioni A.

Ho

Soluzione: commutare le regole di $E\vee$ quanto più possibile verso il fondo/basso delle deduzioni

commuto $(E\vee / E\wedge)$ e poi riduco.

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{A \vee A} \qquad \dfrac{\dfrac{[A] \quad [A]}{A \wedge A}\, I\wedge}{A}\, E\wedge \qquad \dfrac{\dfrac{[A] \quad [A]}{A \wedge A}\, I\wedge}{A}\, E\wedge}{A}\, E\vee \quad \xrightarrow{\text{riduco}} \quad \dfrac{A \vee A \quad [A] \quad [A]}{A}\, E\vee$$

scarica

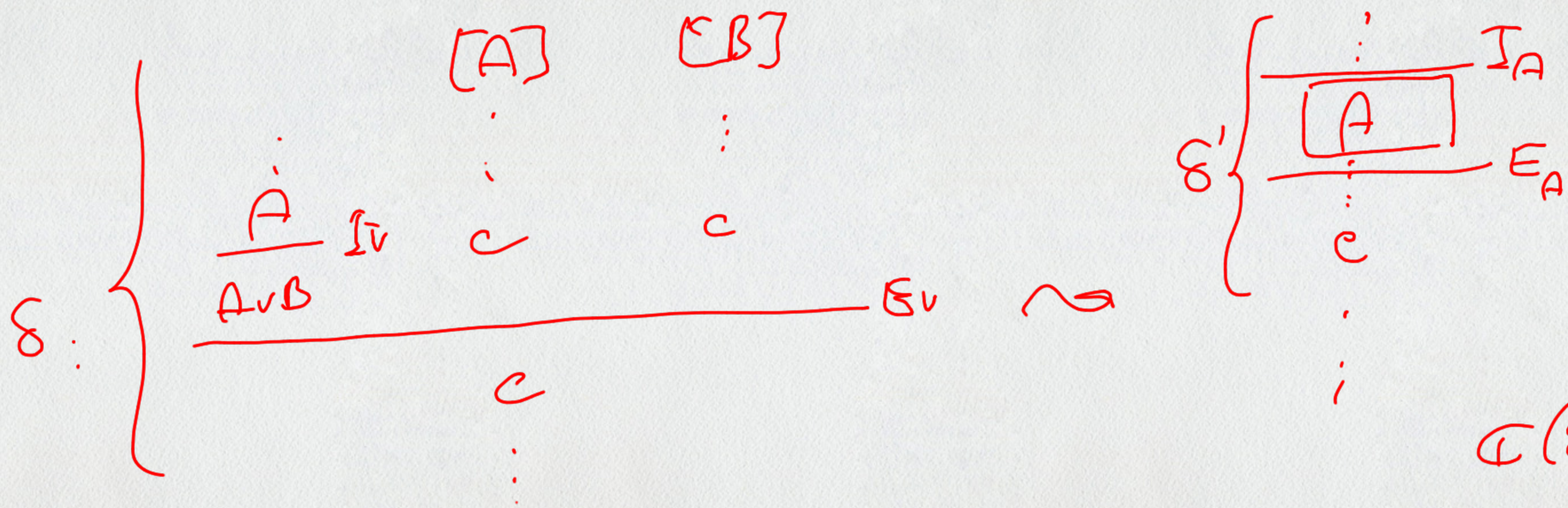
$$\delta' \; \dfrac{A \vee A}{A}$$

ho quindi una ded. δ' di A da $A \vee A$ che soddisfa la prop. della sottoformula

- Normalizzazione per NJ è sostanzialmente quella di ND normale.

quindi strongly normalizing

Proof by induction on $\mathbb{C}(\delta) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{C}(A_i)$ $\quad A_i$ redex di δ



ma le complessità di $\mathbb{C}(\delta')$ è tale che $\mathbb{C}(\delta') < \mathbb{C}(\delta)$ quindi ipt. ind.

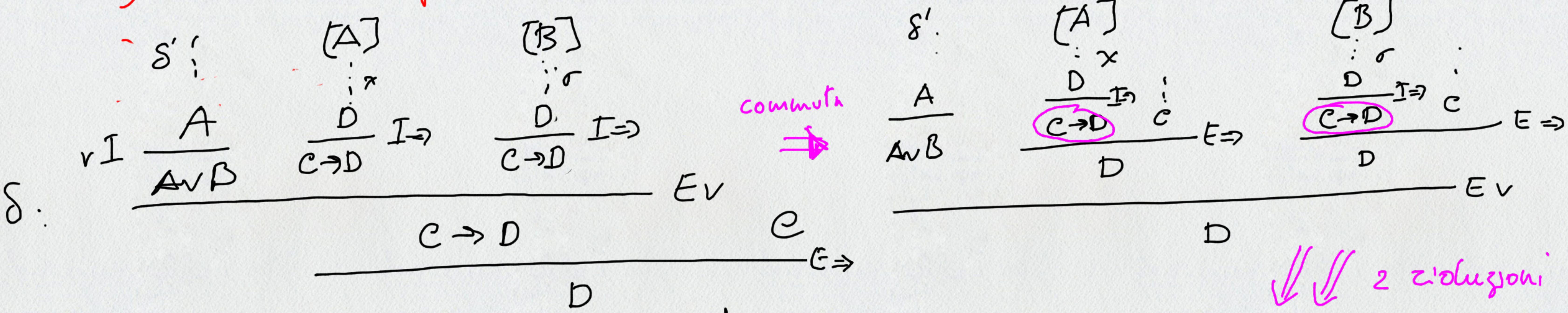
$\delta \rightsquigarrow \delta' \rightsquigarrow^{*} \delta^{\#}_{\text{normale}}$

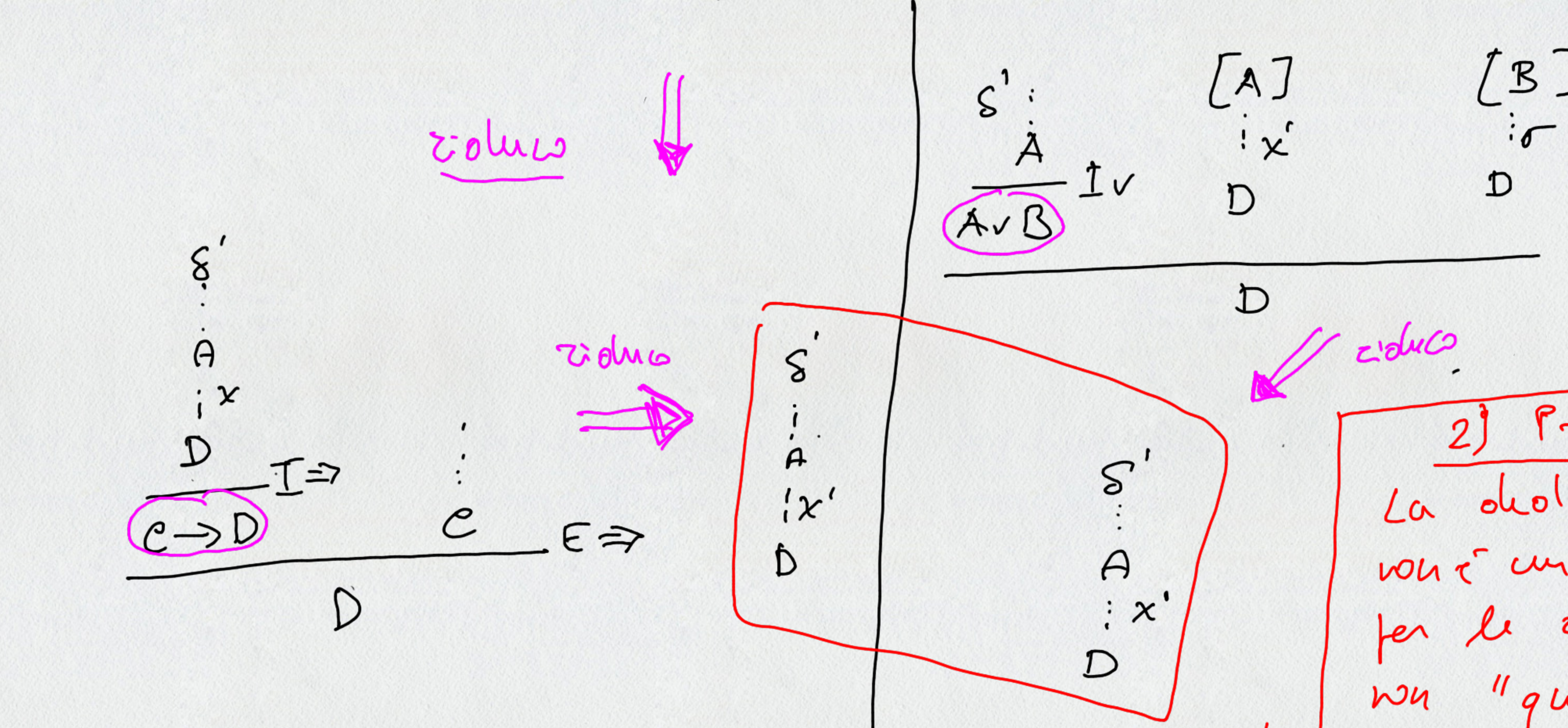
∎

Problemi però con le proprietà delle sottoformule.
(che fanno pensare a Gentzen ~~che...~~ il passaggio da LJ ad LK)

Commutare le ∨ pone due problemi:

1) occorre verificare che le commutazioni non "blocchi" le riduzioni





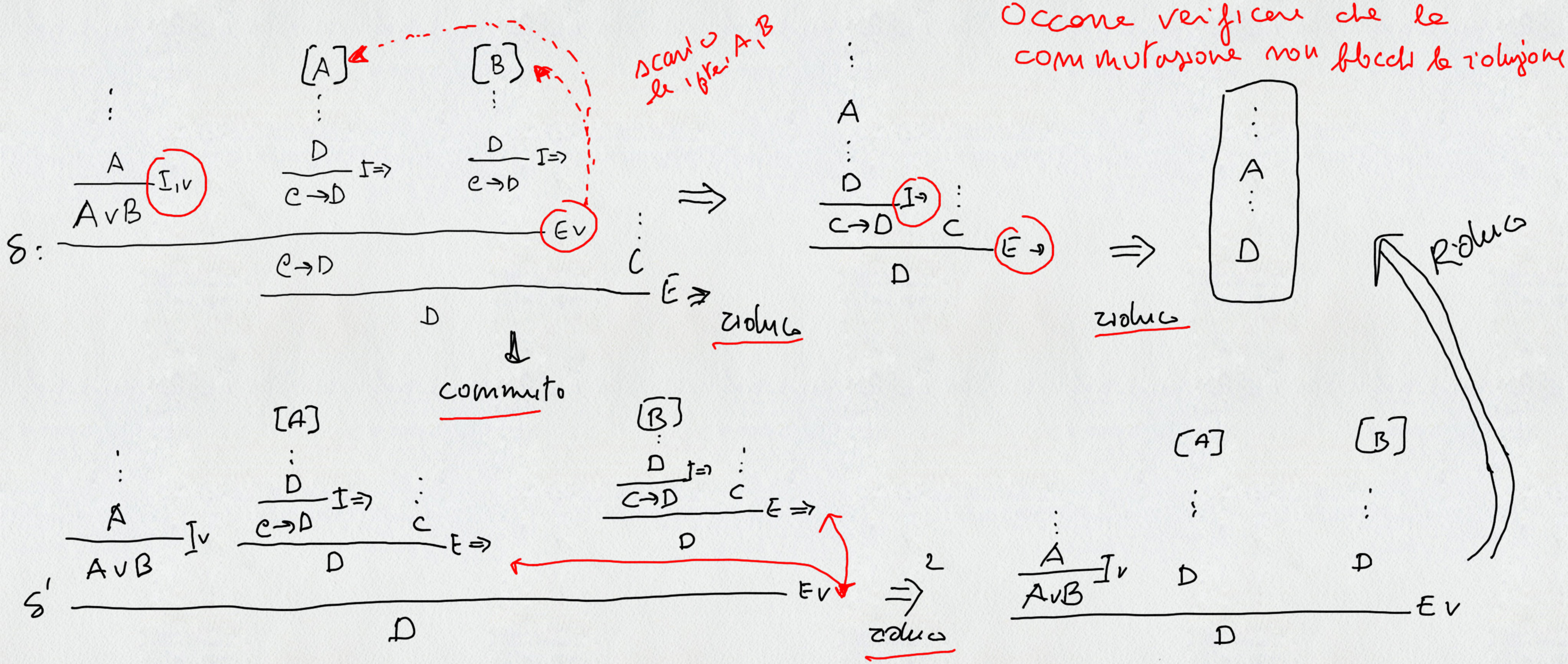
canonicità delle prove:

2) Problema

La riduzione naturale non è un oggetto "unitario" per le dimostrazioni perché non "quozienta" sufficientemente le vere dimostrazioni.

$\Sigma \equiv \Sigma'$ perché

qui c'è l'oggetto canonico ...



ma la commutazione dice che:

S e S' sono due dim. equivalenti

e quindi quale dei due è l'oggetto canonico della classe di equivalenza? l'oggetto canonico è la 'vera dimostrazione' → verso la logica lineare

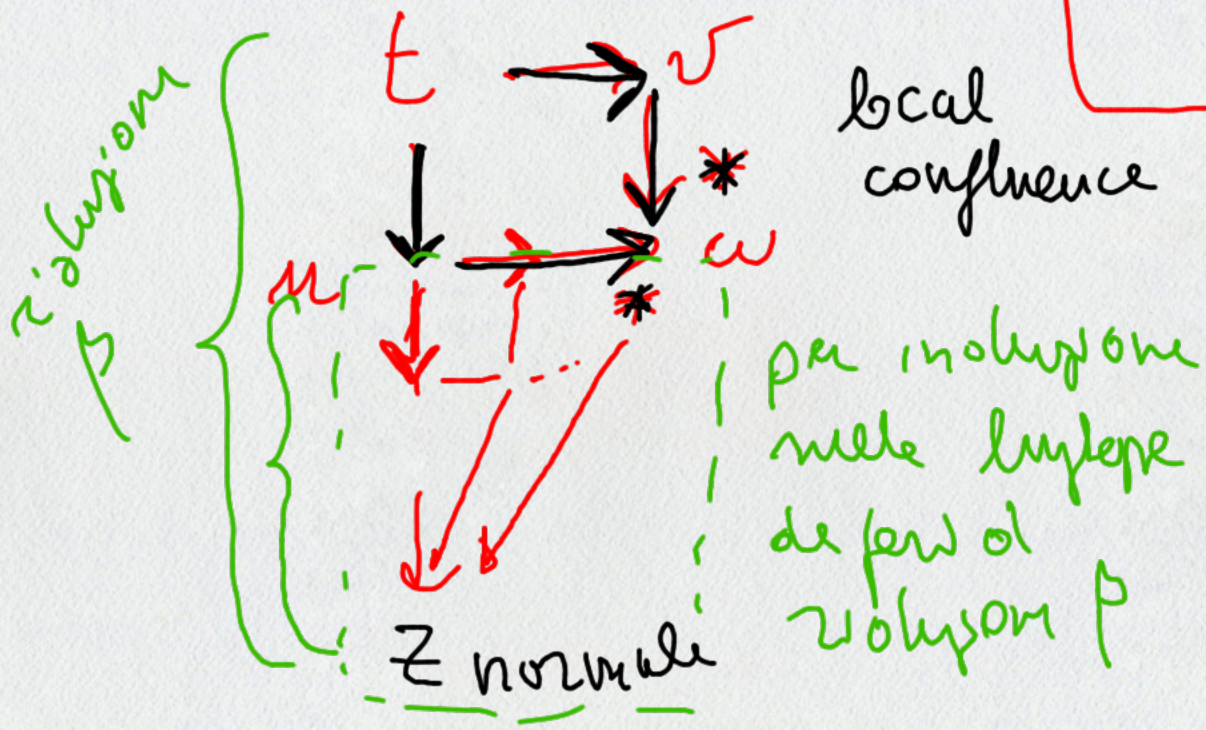
le due strategie convergono!

Teorema di Normalizzazione per NJ $(\to, \wedge, \vee)$

Ogni deduzione di A da Γ può essere trasformata in una ded. di A da Γ senza "detours" (I_c/E_c)

Confluenza (locale) delle riduzioni

Se $t \rightsquigarrow v$ e $t \rightsquigarrow u \Rightarrow \exists w$ t.c. $v \overset{*}{\rightsquigarrow} w$ e $u \overset{*}{\rightsquigarrow} w$.



Proof della SN

Strong Normalization (SN) di NJ

Normalizzazione + confluenza locale $\Rightarrow$ SN (tutte le strategie di normalizzazione terminano (con la med. forma normale).

La corrispondenza Curry-Howard: (tra ND $(\wedge, \to)$ SN e λ-calcolo tipato) SN

TIPI (specifica/proposizione logiche)

- La corrispondenza tra tipi (insiemi/classi/collezioni di oggetti) e proposizioni logiche (V/F) fu stabilita da Howard:

1 - tipi atomici, $T_1 \ldots T_n$ corrispondono a Prop atomiche $A, B, C, \ldots$

2 - se U e V sono tipi ~~atti~~ $U \times V$ ed $U \to V$ sono tipi corrisponde a $\left.\begin{array}{l} A \wedge B \\ A \to B \end{array}\right\}$ Prop

3 - nient'altro è un tipo

Frammento minimale $(\Rightarrow, \wedge)$

TERMINI (programmi/dimostrazioni)

1 - variabili $x_0^T, \ldots x_n^T \ldots$ sono termini (numerabili) di tipo T ad $x_0 : T$ (termini di tipo T)

2 - se $u : U$ ed $v : V$ allora $\langle u, v \rangle : U \times V$

3 - se $t : U \times V$ allora $\pi^1 t : U$ e $\pi^2 t : V$

4 - se $v : V$ ed x^U è una var. di tipo U allora $\lambda x^U . v : U \to V$ (λ-astrazione)

5 - se $t : U \to V$ ed $u : U$ allora $(t)u$ è un termine $tu : V$. (applicazione)

6 - nient'altro è un Termine..

Interpretazione denotazionale ("=" visto come uguaglianza)

- $x : T$ indica un termine generico di tipo T

- $\pi^1 \underset{U \times V}{\langle u, v \rangle} = \underset{U}{u}$ (prima proiezione della coppia)

- $\pi^2 \underset{U \times V}{\langle u, v \rangle} = \underset{V}{v}$

- $\underset{U \to V}{(\lambda x^U . v)} \, \underset{U}{u} = \underset{V}{v[u/x]}$ sostituzione

Interpretazione operazionale

Un termine è **normale** se non contiene sotto-termini di questa forma:

$$\pi^1 \langle u, v \rangle \qquad \pi^2 \langle u, v \rangle \qquad (\lambda x^U . v)\, u \qquad \textbf{Redex}$$

Un termine t si converte/riduce in t' quando uno dei seguenti casi si applica.

$t = \pi^1 \langle u, v \rangle$ $t = \pi^2 \langle u, v \rangle$ $t = (\lambda x^U . v)\, u$

$t' = u$ $t' = v$ $t' = v[u/x]$

scriviamo $\boxed{t \rightsquigarrow t'}$ si riduce in un passo

t: redex, t': reductum hanno lo stesso tipo

scriviamo $\boxed{t \overset{*}{\rightsquigarrow} t'}$ t si riduce in un certo numero di passi

$t \rightsquigarrow t_1 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow t_n = t \overset{*}{\rightsquigarrow} t_n$

$\overset{*}{\rightsquigarrow}$ è la chiusura riflessiva e transitiva di $\rightsquigarrow$

Diciamo che u è forma normale di t se $t \overset{*}{\rightsquigarrow} u$ ed u è normale

Isomorfismo proofs ⟷ terms

1. la dea A (pacchetto di ipotesi) $\longrightarrow$ x^A

2. $\dfrac{\begin{matrix}\vdots & & \vdots\\ A & & B\end{matrix}}{A\wedge B}\, I\wedge \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{matrix}\vdots\\ A\end{matrix} \to u : A \qquad \begin{matrix}\vdots\\ B\end{matrix} \to v : B\right) \Rightarrow \langle u, v\rangle : A \times B$

3. $\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A\wedge B\end{matrix}}{A}\, E_1\wedge \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{matrix}\vdots\\ A\wedge B\end{matrix} \Rightarrow t : A\times B\right) \Rightarrow \pi^1 t : A$ (simile l'altro caso $\dfrac{A\wedge B}{B}$)

4. $\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots\\ B\end{matrix}}{A\to B}\, I\to \quad \Rightarrow \quad \left(\text{se } x^A,\ v : B\right) \Rightarrow \lambda x^A . v : A\to B$

5. $\dfrac{\begin{matrix}\vdots & & \vdots\\ A & & A\to B\end{matrix}}{B}\, E\to \quad \Rightarrow \quad \overset{\text{se}}{(t : A\to B,\ u : A)} \Rightarrow (t)u : B$

Corrispondenza normalizzazione $\leftrightarrow$ conversione

ND $\qquad\qquad$ λ-calcolo tipato

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots & & \vdots\\ u:A & & v:B\end{matrix}}{\langle u,v\rangle : A\wedge B}\, I_\wedge}{\pi^1\langle u,v\rangle : A}\, E^1_\wedge \quad \rightsquigarrow \quad \begin{matrix}\vdots\\ u:A\end{matrix}$$

simile il caso $I_\wedge / E^2_\wedge$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}x:[A]\\ \vdots\\ t:B\end{matrix}}{\lambda x^A.\, t : A\to B}\, I_\to \qquad \begin{matrix}\vdots\\ u:A\end{matrix}}{(\lambda x^A.\, t)u : B}\, E_\to \quad \rightsquigarrow_\beta \quad \begin{matrix}\vdots\\ A\\ \vdots\\ t[x^A/u] : B\end{matrix}$$

λ-calcolo tipato e ND sono entrambi SN.

Considerazioni

- A Gentzen interessava mostrare la consistenza della Logica (classica)
- Per fare questo gli serve la prop della sottoformula (e quindi l'Elim del Taglio)

Ma la Prop della sottoformula è complicata (non uniforme) da mostrare nella Nat. Ded.

Quindi Gentzen propone il Calcolo dei sequenti per la Logica Intuizionista ($\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg$) fermamente senza quantificatori.

Attenzione Nella ND è possibile esprimere la negazione "$\neg A$" di "A"

$$\dfrac{\begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{A \Rightarrow \bot = \neg A}$$

se dall'ipotesi A deduco una contraddizione allora concludo "$\neg A$" scaricando l'ipotesi A