Eliminazione dei tagli (LK$_1$)

per LK sequent-calculus

nella formulazione ad una sola parte (destra)

+ conseguenze

- Proprietà della sottoformula
- consistenza di LK

Def. Formule Proposizionali (proposizioni)

Formule: def. induttiva su h_F:

base: · le costanti logiche V, F sono formule

Formule atomiche } · le costanti proposizionali P, Q, R sono formule

p. induzione: se A e B sono formule allora $A \vee B$ e $A \wedge B$ sono formule } formule non atomiche

· **clausola finale**: nient'altro è una formula. □

Def. grado di una formula A { negazione $\forall A$ è dove essere $\neg A$

$dg(A) = dg(\neg A)$ ~~se A~~

- **base**: $dg(A) = 0$ se A è una formula atomica
  $dg(A) = 1$ se A è V o F (costante logica).

- per induzione: $dg(A \bullet B) = dg(A) + dg(B) + 1$
  $\bullet \in \{\wedge, \vee\}$

Nota $dg(A) = dg(\neg A)$, $\forall A$

---

il grado logico di una formula conta il # di costanti logiche (tranne la neg "$\neg$" che non è un connettivo)

$A \Rightarrow \neg A$ atom

De Morgan $\neg(A \wedge B) \rightarrow \neg A \vee \neg B$

One-side sequent calculus for LK

Regole strutturali:

$$\frac{\vdash \Gamma, A, B, \Delta}{\vdash \Gamma, B, A, \Delta}(S) \qquad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, A}(W) \qquad \frac{\vdash \Gamma, A, A}{\vdash \Gamma, A}(C)$$

Identity group

$$\frac{}{\vdash A, \neg A}(Id/ax) \qquad \frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Delta, \neg A}{\vdash \Gamma, \Delta}(cut)$$

Costanti logiche (unità)

V = vero $\qquad F$ = falso

$$\frac{}{\vdash \cancel{1}\, V}(1) \qquad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, \cancel{\bot}\, F}(\bot) \qquad \frac{}{\vdash \Gamma, \cancel{\top}\, V}(T_a)$$

$1 = V_m$ $\qquad \bot = F_m$ $\qquad$ vero additivo

vero moltiplicativo $\qquad$ falso moltiplicativo

(sono elementi neutri di op di ves la ~~tra~~ pcs)
Reg logiche

Regole logiche

Moltiplicative:

$$\frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \vee B} \vee_m = \wp \qquad \frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Delta, B}{\vdash \Gamma, A \wedge B, \Delta} \wedge_m = \otimes$$

Additive: [condizione sui contesti Γ, Δ]

$$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, A \vee B} \vee_a^1 = \oplus_1 \qquad \frac{\vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \vee B} \vee_a^2 = \oplus_2$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \wedge B} \wedge_a$$

Definizione

Dimostrazioni (Π) sono alberi le cui foglie sono axiomi o regole 0-arie per costanti logiche

ed ogni altro nodo è la

concl. di una regola 1-aria o binaria

La radice è etichettata dalla conclusione S di Π. "$S = \vdash \Gamma$"

---

base se S è la concl. di una reg. 0-aria (ax o $\vee_m, \vee_a$)

allora S è dimostrabile

passo se S è concl. di una regola unaria (risp. binaria) allora è dimostrabile se la sua premessa (premesse) è (sono) dimostrabile.

nient'altro è dimostrabile D

LK 2 sides $\equiv$ LK 1 side
(le due formulazioni sono equivalenti modulo De Morgan)

$$\underbrace{\Gamma}_{A_1 \dots A_n} \vdash_{LK_2} \underbrace{\Delta}_{B_1 \dots B_m} = A_1 \wedge \dots \wedge A_n \vdash B_1 \vee \dots \vee B_m$$

$$\Gamma \vdash_{LK_2} \Delta \quad \underset{\Longrightarrow}{\overset{\Longleftarrow}{\text{sse}}} \quad \vdash_{LK_1} \neg(\Gamma), \Delta$$

$$A_1 \wedge \dots \wedge A_n \vdash B_1 \vee \dots \vee B_m \quad \text{sse} \quad \vdash \neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_n \vee B_1 \vee \dots \vee B_m$$
$$\vdash \neg A_1, \dots, \neg A_n, B_1, \dots, B_m$$

- $LK_1 \subsetneq LK_2$ quindi $\Longleftarrow$ part è OK
- mostriamo la parte $\Longrightarrow$. Per induzione su $h(\Pi)$ in LK_2

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\wedge_L^m \longrightarrow \frac{\vdash \neg(\Gamma), \neg A, \neg B, \Delta}{\vdash \neg(\Gamma), \neg A \vee \neg B, \Delta}$$

ip. ind
corr

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, A \vee B, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\vee_L^m \longrightarrow \frac{\vdash \neg(\Gamma), \neg A, \Delta \qquad \vdash \neg(\Gamma'), \neg B, \Delta'}{\vdash \neg(\Gamma), \neg(\Gamma'), \neg A \wedge \neg B, \Delta, \Delta'}\wedge_m$$

Es: $\vee_m \equiv \vee_a^i$ $\qquad \wedge_m \equiv \wedge_a$ $\qquad$ Esercizio

Esercizio: $\wedge_a \equiv \wedge_m$ in 1-side LK_1

$$\frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \wedge B}\ \wedge_a \qquad\qquad \frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Delta, B}{\vdash \Gamma, A \wedge B, \Delta}\ \wedge_m$$

mostriamo $(\wedge_a) \Rightarrow (\wedge_m)$ e $(\wedge_m) \Rightarrow (\wedge_a)$

$$\frac{\dfrac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, \Delta, A}\ w \qquad \dfrac{\vdash \Delta, B}{\vdash \Gamma, \Delta, B}\ w}{\vdash \Gamma, \Delta, A \wedge B}\ \wedge_a$$

$$\frac{\dfrac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, \Gamma, A \wedge B}\ \wedge_m}{\vdash \Gamma, A \wedge B}\ c$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, A \vee B}\ \vee_a^1 \qquad \frac{\vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \vee B}\ \vee_a^2 \qquad \frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \vee B}\ \vee_m$$

mostriamo che $(\vee_a^i) \Rightarrow (\vee_m)$ e che $(\vee_m) \Rightarrow (\vee_a^i)$

$$\frac{\dfrac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \vee B, A \vee B}\ \vee_a^{1,2}}{\vdash \Gamma, A \vee B}\ c$$

$$\frac{\dfrac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, A, B}\ w}{\vdash \Gamma, A \vee B}\ \vee_m \qquad\qquad \frac{\dfrac{\vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A, B}\ w}{\vdash \Gamma, A \vee B}\ \vee_m$$

Cut-Elimination (Gentzen)

Se S è dimostrabile in LK_1 allora è dimostrabile in LK_1 anche senza far uso della regola del taglio (esiste una dim. cut-free di S).

Corollario 1 Se S è dimostrabile allora esiste una dim. di S che soddisfa la proprietà della sottoformula: ogni formula che appare in Π è sottoformula di qualche formula in S (conclusione)

Corollario 2: LK_1 è consistente: $\forall A$ non è possibile derivare in LK_1 sia A che $\neg A$

Proof: by absurdum assumiamo che esiste una A t.c.

$$\vdash A \quad \vdash \neg A \quad \Rightarrow \quad \frac{\vdash A \qquad \vdash \neg A}{\vdash}\,\text{cut} \quad \text{è dim}$$

Ma per la cut-elim $\Rightarrow$ "$\vdash$" il sequente vuoto è dimostrabile anche senza taglio. Ma allora per la sotto-formula proprietà ogni formula in Π (cut-free di "$\vdash$") deve essere sottoformula del sequente vuoto (concl) contraddicendo il fatto che per costruzione ogni derivazione ha almeno una foglia regole 0-arie come foglie e non è possibile far scomparire foglie senza usare le regole del taglio il contenuto delle foglie

Proof of cut-elimination : idee

taglio logico : le formule attive del cut $(A, \neg A)$ e' introdotte immediatamente prima del cut in entrambe le premesse

es

$$\Pi: \quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_0\\ \vdots\\ \vdash \Gamma_1, A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi_1\\ \vdots\\ \vdash \Gamma_2, B\end{array}}{\vdash \Gamma_1, \Gamma_2, A \wedge B}\,\wedge_m \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\Pi_2\\ \vdots\\ \vdash \Delta, \neg A, \neg B\end{array}}{\vdash \Delta, \neg A \vee \neg B}\,\vee_m}{\vdash \Gamma, \Delta}\,\text{cut} \qquad (\Gamma = \Gamma_1 \dot{\cup} \Gamma_2)$$

allora posso risolvere Π in Π' con tagli di grado minore

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_0\\ \vdots\\ \vdash \Gamma_1, A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi_2\\ \vdots\\ \vdash \Delta, \neg A, \neg B\end{array}}{\vdash \Gamma_1, \Delta, \neg B}\,\text{cut} \qquad \begin{array}{c}\Pi_1\\ \vdots\\ \vdash \Gamma_2, B\end{array}}{\vdash \Gamma, \Delta}\,\text{cut}$$

cresce il numero dei cut in Π' ma decresce il grado logico dei cut

Taglio con le costanti logiche

$$\Pi \quad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Pi' \\ \vdots \\ \vdash \Gamma\end{matrix}}{\vdash \Gamma, \bot}\ F_m = \bot \qquad \dfrac{\Pi''}{\vdash 1}\ 1 = V_m}{\vdash \Gamma}\ \text{cut} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{matrix}\Pi' \\ \vdots \\ \vdash \Gamma\end{matrix}$$

elimino il taglio

$$\Pi : \quad \dfrac{\begin{matrix}\Pi_1 \\ \vdots \\ \vdash \Gamma, \bot\end{matrix} \qquad \dfrac{}{\vdash \Delta, V}\ T = V_a}{\vdash \Gamma, \Delta}\ \text{cut} \quad \rightsquigarrow \quad \Pi' = \dfrac{}{\vdash \Gamma, \Delta, V}\ T = V_a$$

elimino il taglio

Taglio con assiomi logici

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi' \\ \vdots \\ \vdash \Gamma, A\end{matrix} \qquad \dfrac{}{\vdash A, \neg A}\ \text{ax}}{\vdash \Gamma, A}\ \text{cut} \quad \rightsquigarrow \quad \Pi' : \begin{matrix}\vdots \\ \vdash \Gamma, A\end{matrix}$$

elimino il taglio

il caso con le regole strutturali (introducono almeno una delle due premesse del cut)

Weakening

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ \vdots\\ \vdash \Gamma, A\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Pi_2\\ \vdots\\ \vdash \Delta\end{matrix}}{\vdash \Delta, \neg A}\,w}{\vdash \Gamma, \Delta}\,cut \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\begin{matrix}\Pi_2\\ \vdots\\ \vdash \Delta\end{matrix}}{\vdash \Gamma, \Delta}\,w$$

elimino il taglio

Contraction

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ \vdots\\ \vdash \Gamma, A\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Pi_2\\ \vdots\\ \vdash \Delta, \neg A, \neg A\end{matrix}}{\vdash \Delta, \neg A}\,c}{\vdash \Gamma, \Delta}\,cut \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ \vdots\\ \vdash \Gamma, A\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ \vdots\\ \vdash \Gamma, A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Pi_2\\ \vdots\\ \vdash \Delta, \neg A, \neg A\end{matrix}}{\vdash \Gamma, \Delta, \neg A}\,cut_1}{\vdash \Gamma, \Gamma, \Delta}\,cut_2}{\vdash \Gamma, \Delta}\,c$$

Problema: ma l'eliminazione del taglio termina?

- aumenta il numero di cut
- il grado logico di cut non diminuisce
- abbiamo il cut a una profondità minore di cut

Servono alcuni accorgimenti

$\rightarrow$

$d(cut)$

· grado di una cut-rule è il grado della cut-formula (il # delle costanti logiche)

· grado di una π, $d(\pi) = \max\{d(cut_i) \mid cut_i \in \pi\}$

note: $d(\pi) = 0$ sse π è cut-free.

· altezza di una der π è $h(\pi)$ altezza dell'albero ~~dove T è albero di π~~.

$h(\pi)$ è il max{lunghezza (e) | e ramo di π}.

· multi-cut $n, p \in \mathbb{N}$: (idea che useremo anche per la logica Lineare)

$$\frac{\vdash \Gamma, A^n, \Delta \qquad \vdash \Gamma', (\neg A)^p, \Delta'}{\vdash \Gamma, \Gamma', \Delta, \Delta'}\ m\text{-}cut$$

Osservazione: m-cut è equivalente a cut, una regola strutturale

$$\dfrac{\dfrac{\vdash \Gamma, A^n}{\vdash \Gamma, A}\,c \qquad \dfrac{\vdash \Delta, (\neg A)^m}{\vdash \Delta, \neg A}\,c}{\vdash \Gamma, \Delta}\,\text{cut} \qquad n, m > 0$$

$$\dfrac{\dfrac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, A^n}\,w \qquad \dfrac{\vdash \Delta, \neg A}{\vdash \Delta, (\neg A)^m}\,w}{\vdash \Gamma, \Delta}\,\text{multi-cut}$$

$$\overline{\text{se } n \text{ o } m = 0}$$

$n = 0$

$$\dfrac{w\,\dfrac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, A} \qquad \dfrac{\vdash \Delta, (\neg A)^m}{\vdash \Delta, \neg A}\,c}{\vdash \Gamma, \Delta}\,\text{cut}$$

Equivalenza multicut = cut + structural rules

Principal Lemma :

$\forall n, p \in \mathbb{N}^+$, sia A una fbf e Π, Π' due d.n.

$$\begin{array}{c}\Pi\\ \vdots \\ \vdash \Gamma, A^n\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi'\\ \vdots\\ \vdash \Gamma', (\neg A)^p\end{array} \quad \text{such that :}$$

$dg(\Pi) < dg(A)$ e $dg(\Pi') < dg(A)$ $\quad (d(A) = d(\neg A))$.

Allora, possiamo costruire una nuova d.n. Π_0

$$\begin{array}{c}\Pi_0\\ \vdots \\ \vdash \Gamma, \Gamma'\end{array} \quad \text{tale che } dg(\Pi_0) < dg(A).$$

Proof by induction on $h(\Pi) + h(\Pi')$.

base $h(\Pi) + h(\Pi') = 0$.

$\Rightarrow \Pi, \Pi'$ devono consistere di un singolo nodo etichettato da una regola 0-aria (ax. o reg. su cost. logiche)

Consideriamo i seguenti casi:

caso axioma

$$\Pi \ \dfrac{}{\vdash A, \neg \underline{A}} \qquad \dfrac{}{\vdash \underline{A}, \neg A}\,\Pi' \quad \Rightarrow \quad \Pi_0 : \dfrac{}{\vdash A, \neg A}\,ax \qquad \begin{cases} dg(\Pi_0) = 0 \\ dg(A) = dg(\neg A) = 1 \end{cases}$$

caso V_m

$$V_m \dfrac{}{\vdash \underline{V}} \qquad \dfrac{}{\vdash V, \underline{F}}\, V_a = T \quad \rightsquigarrow \quad \Pi_0 : \dfrac{}{\vdash V}\, V_m \qquad \begin{cases} dg(\Pi_0) = 0 \\ dg(V) = 1 \end{cases}$$

caso V_a

$$\dfrac{}{\vdash V, \underline{A}, \Gamma}\, V_a \qquad \dfrac{}{\vdash A, \neg \underline{A}}\, ax \quad \rightarrow \quad \Pi_0 = \dfrac{}{\vdash V, A, \Gamma}\, V_a \qquad \begin{cases} dg(\Pi_0) = 0 \\ dg(V) = 1 \end{cases}$$

caso $h(\pi)+h(\pi') = m > 0$ (ip. ind. lemma vale per $m-1$)

consideriamo i seguenti casi:

* l'ultima regola di π o π' è una regola strutturale su A:

1. es

$$\pi\ \dfrac{\begin{matrix}\vdots\,\sigma\\ \vdash\Gamma\end{matrix}}{\vdash\Gamma, A}\,W \qquad \begin{matrix}\pi'\\ \vdots\\ \vdash\Delta,(\neg A)^p\end{matrix} \quad\rightsquigarrow\quad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\,\sigma\\ \vdash\Gamma\end{matrix}}{\dfrac{}{\vdash\Gamma,\Delta}}\,W$$

2. es

$$\pi:\ \dfrac{\begin{matrix}\sigma\\ \vdots\\ \Gamma, A, A\end{matrix}}{\vdash\Gamma, A}\,c \qquad \begin{matrix}\pi'\\ \vdots\\ \vdash\Delta,(\neg A)^p\end{matrix} \quad\rightsquigarrow\quad \text{ip. ind. } h(\sigma)+h(\pi')\ \ \exists\, \pi_0 :\ \Gamma,\Delta.$$

potrebbe essere una regola logica per le costanti $\perp = Fm$ *

ecc.

* l'ultima regola di π o π' è una regola logica o strutturale che non introduce una occ. di A

vari casi.. ne vediamo solo uno (caso logico)

$$\begin{matrix}\pi\\ \vdots\\ \vdash\Gamma,(A)^n\end{matrix} \qquad \left.\dfrac{\begin{matrix}\sigma\\ \vdots\\ \vdash\Gamma', C, D, (\neg A)^p\end{matrix}}{\vdash\Gamma', C\vee D, (\neg A)^p}\,\vee_m\right\}\pi' \quad\Longrightarrow$$

ip. ind su $h(\pi)+h(\sigma) \Rightarrow \exists\, \pi'_0$ di $\vdash\Gamma', C, D, \Gamma$

poi una istanza di $\vee_m \Rightarrow$

$$\dfrac{\begin{matrix}\pi'_0\\ \vdots\\ \vdash\Gamma', C, D, \Gamma\end{matrix}}{\vdash\Gamma', C\vee D, \Gamma}\,\vee_m$$

* caso in cui entrambe le ~~~~ ultime regole di Π e Π' introducono una occorrenza delle formule attive del cut (~~escludiamo~~ le regole non solo strutturali; caso presentato)

caso (ax)

$$\Pi : \dfrac{}{\underbrace{\neg A}_{\Gamma}, \underbrace{A = C \wedge D}_{A}} \qquad \Pi' : \dfrac{\begin{matrix}\sigma \\ \vdots \\ \Gamma', \neg C, \neg D\end{matrix}}{\Gamma', \underbrace{\neg C \vee \neg D}_{\neg A}} \vee_m \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\begin{matrix}\sigma \\ \vdots \\ \vdash \Gamma', \neg C, \neg D\end{matrix}}{\vdash \Gamma, \neg C \vee \neg D} \vee_m$$

caso $V_m = 1$

$$\Pi : \dfrac{}{\vdash \Delta} V_m = 1 \qquad \Pi' \dfrac{\begin{matrix}\sigma \\ \vdots \\ \vdash \Gamma', (\perp)^{p-1}\end{matrix}}{\vdash \Gamma', (\perp)^{p}} \perp \Rightarrow$$

per ipt. ind^{ne} $h(\Pi) + h(\sigma)$
ottengo $\Pi_0 : \vdash \Gamma'$

caso $V_a = T$ (2 sottocasi)

- $$\Pi : \dfrac{}{\vdash \Gamma, T, \underline{\underline{1}}} T \qquad \dfrac{}{\vdash \underline{\underline{1}}} 1$$

→ siamo nel caso base per cui

$$\Pi_0 = \dfrac{}{\vdash \Gamma, T} T_a$$

- $$\Pi \dfrac{}{\vdash \Gamma, \underline{T}} T \quad \Pi' \dfrac{\begin{matrix}\sigma \\ \vdots \\ \vdash \Delta\end{matrix}}{\vdash \Delta, \underline{\perp}} \perp \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\begin{matrix}\sigma \\ \vdots \\ \vdash \Delta\end{matrix}}{\vdash \Gamma, \Delta} W$$

caso: ... del taglio logico (moltiplicativo) ($\vee_m / \wedge_m$)

$$\pi : \dfrac{\left.\begin{array}{c}\rho \\ \vdots \\ \vdash \Gamma, A, B, (A\vee B)^{n-1}\end{array}\right\}\rho}{\vdash \Gamma, (A\vee B)^{n}} \vee_m$$

$$\pi' : \dfrac{\left.\begin{array}{c}\sigma \\ \vdots \\ \vdash \Gamma_1', \neg A, (\neg A\wedge\neg B)^{K}\end{array}\right\}\sigma \qquad \left.\begin{array}{c}\tau \\ \vdash \Gamma_2', \neg B, (\neg A\wedge\neg B)^{p-K-1}\end{array}\right\}\tau}{\vdash \underbrace{\Gamma_1', \Gamma_2'}_{\Gamma'}, (\neg A\wedge\neg B)^{p = (\cancel{K} + p - \cancel{K} - \cancel{1} + \cancel{1})}} \wedge_m$$

allora applichiamo l'ip. ind su $\begin{cases} h(\rho) + h(\pi') \text{ e su} \\ h(\sigma) + h(\pi) \text{ e} \\ h(\tau) + h(\pi) \end{cases}$

ip. ind su ρ e π'

$$\begin{array}{c}\rho \\ \vdots \\ \vdash \Gamma, A, B, (A\vee B)^{n-1}\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi' \\ \vdots \\ \vdash \Gamma_1', \Gamma_2', (\neg A\wedge\neg B)^{p}\end{array}$$

otteniamo

$$\Rightarrow \pi_0' = \vdash \Gamma, A, B, \underbrace{\Gamma_1', \Gamma_2'}_{\Gamma'}$$

$d(\pi_0') < d(A\vee B)$

e applicando l'ip. ind su σ e Π

$$\dfrac{\Pi}{\vdots} \quad \vdash \Gamma, (A \vee B)^n \qquad\qquad \dfrac{\sigma}{\vdots} \quad \vdash \Gamma'_1, \neg A, (\neg A \wedge \neg B)^k \quad \Rightarrow$$ otteniamo

$$\Pi_0^2 : \vdash \Gamma, \Gamma'_1, \neg A$$

e su τ e Π

$$\dfrac{\Pi}{\vdots} \quad \vdash \Gamma, (A \vee B)^n \qquad\qquad \dfrac{\tau}{\vdots} \quad \vdash \Gamma'_2, \neg B, (\neg A \wedge \neg B)^{p-k-1}$$ otteniamo

$$\Pi_0^3 : \vdash \Gamma, \Gamma'_2, \neg B$$

Infine mettiamo assieme Π_0^1, Π_0^2 e Π_0^3 come segue e otteniamo Π_0.

$$\Pi_0 \left\{ \begin{prooftree}
\AxiomC{Π_0^3}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdash \Gamma, \Gamma'_2, \underline{\neg B}$}
\AxiomC{Π_0^1}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdash \Gamma, \underline{A}, B, \Gamma'$}
\AxiomC{Π_0^2}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdash \Gamma, \Gamma'_1, \underline{\neg A}$}
\RightLabel{cut}
\BinaryInfC{$\vdash \Gamma, \underline{B}, \Gamma', \Gamma'_1$}
\RightLabel{cut}
\BinaryInfC{$\vdash \Gamma, \Gamma, \Gamma', \underbrace{\Gamma'_1, \Gamma'_2}_{\Gamma'}$}
\doubleLine
\RightLabel{c}
\UnaryInfC{$\vdash \Gamma, \Gamma'$}
\end{prooftree} \right.$$

avremo $dg(\Pi_0) < dg(A \vee B)$ ■

Propositon Hauptsatz

Se π è una dim di S di grado $d(\pi)>0$ allora
può essere costruito un π' di grado $d(\pi')<d(\pi)$
con la stessa conclusione S

<u>Proof</u>: per induzione su $h(\pi)$. Analizziamo l'ultima
quindi
regola R di π. Dato che $d(\pi)>0 \Rightarrow h(\pi)>0$.

1. $R \neq$ cut di grado $d(\pi)$.

Es.

$$\pi : \frac{\overset{\sigma_1}{\Gamma, A} \qquad \overset{\sigma_2}{\Delta, \neg A}}{\Gamma, \Delta} R = cut \qquad d(R) < d(\pi)$$

allora per ip. ind su σ_i, $\exists \sigma_i'$, $d(\sigma_i') < d(\pi)$

$$\Rightarrow \pi' = \frac{\overset{\sigma_1'}{\Gamma, A} \qquad \overset{\sigma_2'}{\Delta, \neg A}}{\Gamma, \Delta} cut = R \qquad d(\pi') < d(\pi)$$

2. R è un cut di grado $d = \delta(\pi)$, allora:

$$\pi : \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ \vdots\\ \vdash \Gamma, A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ \vdots\\ \vdash \Delta, \neg A\end{array}}{\vdash \Gamma, \Delta}\ R = cut \qquad \delta(R) = \delta(\pi) = d$$

allora per ipt ind su $h(\pi_i) < h(\pi)$, $\exists\, \pi_i'$ t.c

$\delta(\pi_i') < \delta(\pi_i)$

$$\begin{array}{c}\pi_1'\\ \vdots\\ \vdash \Gamma, A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_2'\\ \vdots\\ \vdash \Delta, \neg A\end{array} \qquad \text{con } \delta(A) = \delta(\neg A)$$

$\Rightarrow$ Per il Lemma Principale $\Rightarrow \exists$ una π'

$$\begin{array}{c}\pi'\\ \vdots\\ \vdash \Gamma, \Delta\end{array} \quad \text{t.c. } \delta(\pi') < \delta(\pi).$$

Teorema Hauptsatz (Gentzen) 1934

Se Π è una derivazione di S $\Rightarrow$ può essere costruita una Π' di S (da Π) senza uso di cut

Proof: iterando opportunamente la Proposizione Principale Hauptsatz. $\square$

(ad ogni iterazione però dell'iterazione $d(\Pi') < d(\Pi)$ quindi l'iterazione termina)

Commenti alla Eliminazione del taglio WN/~~SN~~

- l'eliminazione del taglio a piccoli passi (locali) non gode della proprietà di Strong Normalization
(SN: data una derivazione di LK non esiste alcuna successione infinita di passi di riduzione che parta da π

$$\pi \rightsquigarrow \pi_1 \rightsquigarrow \pi_2 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \pi_n$$

Rem: il λ-calcolo puro non è
- né SN
- né WN

Esempio:

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{\dfrac{}{\vdash \neg X, X} \quad \dfrac{}{\vdash \neg Y, Y}}{\vdash \neg X \wedge \neg Y, \underline{X}, Y}\,\wedge_m
    \qquad
    \dfrac{}{\vdash \neg \underline{X}, X}\,ax
  }{\vdash \neg X \wedge \neg Y, X, \underline{Y}}\,cut_1
  \qquad
  \dfrac{}{\vdash \neg \underline{Y}, Y}\,ax
}{\vdash \neg X \wedge \neg Y, X, Y}\,cut_2
$$

sul cut_2 posso applicare $\begin{cases} \text{un passo commutativo (cc) con } cut_1 \\ \text{oppure un passo cut-ax} \end{cases}$

ma potrei anche generare una sequenza infinita di passi (cc) commutativi

$$cut_1 \underset{cc}{\overset{cc}{\rightleftarrows}} cut_2 \,.$$

LK è weak-normalizing.

$\Big\{$ LK è weak-normalizing, eccetto con embedding in LL $\Rightarrow$ SN

Commenti sulla Elim del Taglio : ~~Confluenza~~

a differenza del λ-calcolo (non tipato) LK cut-elim è non-confluente. Se la riduzione di un λ-term t termina con la forma normale, allora tutte le strategie di riduzione di t terminano con la stessa forma normale

Confluenza (locale)

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[dr, "*"] & \\ a \arrow[ur] \arrow[dr] & & d \sim \\ & c \arrow[ur, "*"'] & \end{tikzcd}$$

termina con la stessa forma normale

Per via delle Regole Strutturali :

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1 \\ \vdots \\ \vdash \Gamma\end{matrix}}{\vdash \Gamma, A}\,w \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Pi_2 \\ \vdots \\ \vdash \Delta\end{matrix}}{\vdash \Delta, \neg A}\,w}{\vdash \Gamma, \Delta}\,cut$$

due possibili riduzioni non confluenti

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$\dfrac{\left.\begin{matrix}\Pi_1 \\ \vdots \\ \vdash \Gamma\end{matrix}\right\}\text{normale}}{\vdash \Gamma, \Delta}\,w \qquad\qquad \dfrac{\left.\begin{matrix}\Pi_2 \\ \vdots \\ \vdash \Delta\end{matrix}\right\}\text{normale}}{\vdash \Gamma, \Delta}\,w$$

$$\Pi_1 \neq \Pi_2 \;!$$

$$\not\searrow \qquad \not\swarrow$$

$$t$$

non è confluente.