

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA "LA SAPIENZA"
DIPARTIMENTO DI STUDI FILOSOFICI ED EPISTEMOLOGICI



CORSO DI DOTTORATO DI RICERCA IN
LOGICA ED EPISTEMOLOGIA - XI CICLO

FOCALIZZAZIONE DELLE PROVE
IN LOGICA NON COMMUTATIVA

Roberto Maieli

Coordinatore del Dottorato
Prof. Carlo Cellucci

Relatori
Prof. V. Michele Abrusci
Prof. Carlo Cellucci

Anno Accademico 1998-99

Ai miei genitori

Indice

Prefazione	11
Introduzione	19
Il paradigma di costruzione delle prove	23
Messa a fuoco del <i>non determinismo</i>	26
La logica lineare	27
La logica non commutativa	29
Sincronicità e Asincronicità	33
Parallelismo e sequenzialità	41
Dalla Focalizzazione alla Ludica: sviluppi futuri	43
Struttura della Tesi	47
1 La Logica Non Commutativa	51
1.1 Introduzione	51
1.2 Varietà d'ordine	54
1.2.1 Caratterizzazione delle varietà di ordini seriali-parallele	56
1.2.2 Altalena ed Entropia	59
1.3 Calcolo dei Sequenti	60
1.3.1 Il frammento moliplicativo	63
2 Focalizzazione delle prove nel calcolo dei sequenti	69
2.1 Introduzione	69
2.1.1 Il Paradigma di costruzione delle prove	71
2.2 Gli esponenziali	75
2.3 Identità e taglio	78
2.4 Il problema della formula principale: il caso lineare	79
2.5 Dal caso lineare a quello non-commutativo	84

3	Focalizzazione delle reti dimostrative	87
3.1	Introduzione	87
3.2	Reti dimostrative di MNL	89
3.2.1	Sequenzializzazione	94
3.3	Sequenzializzazione e Focalizzazione	97
3.3.1	Conclusioni focalizzanti	99
3.3.2	Il Teorema di Focalizzazione	100
3.3.3	Sequenzializzazione focalizzata	103
3.4	Appendice: proprietà di splitting commutativo	105
4	Calcolo dei sequenti focalizzati per MNL	109
4.1	Introduzione	109
4.2	Partizioni di ordini seriali-paralleli	110
4.2.1	Composizione parallela di un ordine	111
4.2.2	Composizione seriale di ordini	111
4.3	Sequenzializzazione	121
5	Focalizzazione dell'intero frammento non-commutativo	129
5.1	Introduzione	129
5.2	Reti dimostrative di NL	131
5.2.1	Legami additivi ed esponenziali	131
5.2.2	Conclusioni scidenti e focalizzanti	135
5.2.3	Proprietà di Focalizzazione	137
5.2.4	Sequenzializzazione	142
5.3	Calcolo dei sequenti focalizzato per l'intero frammento di NL	145
5.3.1	Focalizzazione delle regole logiche	145
5.3.2	Sincronizzazione delle regole positive	146
5.3.3	Focalizzazione dell'Entropia	154
5.4	Ottimalità del risultato	155

Elenco delle figure

1	Interpretazione di una formula come istruzione	24
2	Procedura generale di costruzione delle prove	37
3	Permutazione di figure di inferenza	37
4	Circuiti di una dimostrazione	38
5	Permutabilità del frammento MNL	40
6	Quadro sinottico dei passi di focalizzazione per il frammento proposizionale di NL.	48
1.1	Ciclo orientato e ordine totale	52
3.1	Un esempio di rete scidente	95
3.2	Differenti modi di assemblare sotto-reti	102

Elenco delle tabelle

1	Calcolo dei Sequenti Lineari (caso proposizionale)	30
1.1	Calcolo dei sequenti non-commutativo Σ	62
1.2	Frammento moltiplicativo non-commutativo Σ_{mnl}	65
2.1	Calcolo diadico non-commutativo Σ_2	76
2.2	Sistema Triadico Lineare Σ_3^c	83
4.1	Il Calcolo Focalizzato (moltiplicativo) Σ_{mnl}^f	122
5.1	Sistema Triadico con Entropia Σ_3'	148
5.2	Calcolo dei sequenti focalizzato Σ_3 per NL	156

Prefazione

La tesi affronta la questione della *dinamica del processo di costruzione delle prove* (dimostrazioni) nella *Logica Non-commutativa* (NL). Quest'ultima, è stata introdotta recentemente da V. M. Abrusci e P. Ruet (in [3], [45]) come un *raffinamento*¹ della *Logica Lineare* (LL), lanciata dal matematico francese J.-Y. Girard [14] nel 1987.

Nell'introduzione che segue a questa prefazione, illustreremo e motiveremo le principali idee che animano la presente ricerca; in particolare, forniremo una dettagliata spiegazione di cosa si intende per *processo di costruzione di una dimostrazione*. Intuitivamente, si tratta di un *processo di espansione*, che estende dal basso, la radice, verso l'alto, le foglie, la dimostrazione. L'assunzione in questo caso è che le dimostrazioni possano essere rappresentate come *alberi*² nello stile del *Calcolo dei Sequenti* di Gentzen [13]: la radice è etichettata dal sequente da dimostrare, le foglie dagli assiomi o identità, mentre un singolo nodo rappresenta un'istanza di una regola di inferenza. Ogni passo di espansione consiste nell'istanziamento di una regola di inferenza del calcolo. Ogni espansione comporta, dunque, una *transizione*: alcune transizioni, come vedremo, sono *deterministiche* altre *non deterministiche*³.

Le proprietà di permutazione degli schemi di inferenza logica mostrano che le transizioni deterministiche e quelle non-deterministiche possono essere *intrecciate* in maniera molto complessa tra di loro, senza che questa complessità sia sempre *significativa*. Una dimostrazione con una certa complessità data dall'intreccio degli schemi di inferenza può, infatti, essere *equivalente* ad una

¹Il termine "raffinamento" è stato usato dagli stessi autori di NL, per indicare il rapporto che lega la logica non commutativa alla logica lineare. In realtà, come vedremo, se volessimo esprimere questo rapporto in termini di inclusione tra i due frammenti, allora potremmo dire che il frammento non commutativo include quello lineare, nel senso che ogni dimostrazione lineare è anche una dimostrazione non-commutativa, ma non viceversa.

²Possibilmente *n*-ari.

³Alcune istanze, cioè, determinano *univocamente* il risultato della transizione, altre aumentano lo spazio dei possibili risultati.

dimostrazione che presenti un intreccio più semplice. Con questo riguardo, diremo che la seconda dimostrazione è più significativa della prima, in quanto essa “dice le stesse cose” ma in “maniera più semplice” di quanto non faccia la prima.

Usando ancora l’efficace immagine dell’intreccio, la nostra tesi consiste nel mostrare come dipanare il broglio delle transizioni, seguendo una strategia che soddisfa una proprietà che le transizioni hanno. Tecnicamente si tratta di *sincronizzare*, quanto più possibile, le transizioni deterministiche e non deterministiche nel processo di espansione di una dimostrazione di NL. In particolare siamo interessati a trovare l’intreccio più semplice, e quindi più significativo di tutte le transizioni invocate dal processo di espansione di una dimostrazione non-commutativa. Un intreccio, che presenti la sincronizzazione delle transizioni più semplice e significativa sarà chiamato *focalizzante*⁴.

Molto sinteticamente, il principale risultato del presente lavoro consiste nel mostrare che il processo di costruzione delle prove di NL è *focalizzante*, cioè, esso soddisfa la proprietà logica⁵ chiamata *focalizzazione*.

L’espressione “focalisation des preuves” apparve per la prima volta, nel 1990, nella Tesi di Dottorato del francese Jean-Marc Andreoli [4]. Con tale espressione Andreoli si riferiva ad una *procedura di normalizzazione* delle dimostrazioni lineari, che consisteva, essenzialmente, nel fissare una *strategia* di ricerca (un algoritmo) per le prove lineari in grado di *sincronizzare* nella misura possibile, le transizioni deterministiche e non deterministiche invocate durante la ricerca. Andreoli, nello specifico, mostrava come la dimostrazione di un sequente del calcolo standard⁶ di LL poteva essere eseguita in un Calcolo dei Sequenti, chiamato *triadico*⁷, che risultava essere equivalente⁸ al calcolo standard. Ogni dimostrazione del sistema triadico poteva essere pensata come il *prototipo* di una classe di dimostrazioni equivalenti. Il prototipo, veniva anche chiamato la *dimostrazione in forma normale* del sequente dato. Queste dimostrazioni normali erano particolarmente significative, nel senso che la loro costruzione richiedeva solo un *minimo* di quel *non determinismo* ineliminabile del tutto dal processo di costruzione di una prova.

L’approccio proposto da Andreoli aveva però un limite: la focalizzazione

⁴Il termine traduce l’espressione inglese “focusing”.

⁵Una proprietà che dipende solo dalla natura logica dei connettivi di NL.

⁶Chiameremo standard il Calcolo dei Sequenti nella formulazione data da Giarard nel 1987 in [14].

⁷Per la particolare suddivisione in tre zone delle formule presenti nel sequente.

⁸Corretto e completo modulo i passi di focalizzazione.

appariva come una semplice — anche se efficiente — strategia di normalizzazione⁹. La focalizzazione mancava ancora di quella astrazione necessaria a comprenderne i principi logici sottostanti¹⁰. Questo limite deriva dal fatto che Andreoli lavorava sul calcolo dei sequenti per la logica lineare¹¹. Le transizioni nelle prove del calcolo dei sequenti risentono fortemente della natura sequenziale dell'ordine di applicazione delle regole.

La nozione di *Rete Dimostrativa* (o *Proof-Net*¹²) introdotta da Girard in [14] offre una rappresentazione desequenzializzata delle dimostrazioni, nella quale l'ordine esatto delle occorrenze degli schemi di inferenza è solo parzialmente riscontrabile. Questa rappresentazione offre un quadro più compatto per l'analisi delle prove di quanto faccia il calcolo dei sequenti.

Nel Capitolo 3 dimostreremo come sia possibile caratterizzare direttamente sulle reti non-commutative la sincronizzazione delle transizioni deterministiche e non deterministiche. Enunceremo e dimostreremo il *teorema di focalizzazione*¹³ per le reti non-commutative. Questo teorema consente di generalizzare la proprietà di focalizzazione per ogni raffinamento della logica lineare (che soddisfi la *proprietà di splitting*).

La “tecnica” di focalizzazione, per la logica lineare riscosse subito, fin dai primi anni del '90 grande interesse da parte della comunità logica. Girard stesso, per primo, intravide la grande potenzialità e innovazione delle idee che stavano dietro a quella che all'inizio sembrava una efficace tecnica di trasformazione del calcolo dei sequenti standard in un sistema più efficiente che ben spiegava il complesso contenuto computazionale sia dei connettivi esponenziali che logici.

Con il nuovo programma sull'*unità della logica* [19], lanciato nel 1992, Girard proponeva un unico calcolo dei sequenti comune alla logica classica, intuizionista e lineare, la cui principale novità era data dal fatto che la logica classica, intuizionista e lineare apparivano come frammenti di un unico cal-

⁹Rimandiamo all'introduzione per una spiegazione di cosa si intende per *normalizzazione*.

¹⁰In [4], pagina 78], Andreoli scrive: «...Cet objectif n'est pas purement théorique: la mise en oeuvre effective, la stratégie de choix peut être simple à définir, et même, prendre en compte des informations d'ordre heuristique ... de primitives de contrôle diverses ...».

¹¹La preferenza verso il calcolo dei sequenti era motivata dall'ottica applicativa. Il sistema focalizzato triadico chiamato da Andreoli *LINLOG* era infatti alla base di concreti sistemi di programmazione come *ForumTalk* e *CLF*, entrambi sviluppati nei laboratori di ricerca francesi della Xerox.

¹²Si veda il Capitolo 3.

¹³Tale teorema presuppone solo la *proprietà di splitting*. Si veda l'appendice al Capitolo 3.

colo focalizzato alla maniera di Andreoli. Si trattava di un calcolo unitario, la cui forza era data dall'interazione da e tra i singoli frammenti. Girard aveva subito colto che la procedura di costruzione focalizzata (o focalizzante) di una prova lineare rivelava in maniera alquanto naturale un aspetto fondamentale del processo di dimostrazione: l'interazione¹⁴. Il punto chiave da comprendere per spiegare a pieno la focalizzazione è dunque l'interazione. Quale grande balzo in avanti aveva fatto il Paradigma di Ricerca delle Prove! Prima dei lavori di Andreoli e Girard si era solo parlato di *ricerca automatica delle prove*, e l'espressione "automatica" lasciava ben poco spazio a qualsiasi richiamo agli aspetti dinamici ed interattivi della ricerca di una dimostrazione.

Il programma di unità della logica puntava a cogliere la generalizzazione l'astrazione della tecnica di focalizzazione. Il tentativo però ristagnava ancora sulle dimostrazioni del calcolo dei sequenti. Il risultato era che l'astrazione e l'interazione erano pagati col prezzo (troppo alto) di un calcolo logico ostico e per nulla maneggevole.

Prendendo spunto da quei primi tentativi di generalizzazione, il primo importante risultato che stabiliremo (nel Capitolo 3) è che la focalizzazione è una proprietà della logica lineare, stabile per qualsiasi raffinamento o estensione di quest'ultima. Si tratta di una proprietà che non è soggetta ad alcuna ulteriore raffinamento. Essa, come vedremo nelle sezioni della prossima Introduzione, scandisce quello che Girard in [22] chiama il *tempo della logica*. Questo tempo concerne la *causalità* del processo di costruzione delle prove. Intuitivamente, potremmo dire che si tratta del *tempo della dinamica* e non quello della *cinematica*. Esso è dato dall'*alternanza di due semplici principi logici*, quello della *reversibilità* ed *irreversibilità* degli schemi di inferenza. Non si tratta, dunque, di un tempo che "misura", per così dire, lo svolgimento di un fenomeno, bensì esso è dato dalla semplice alternanza di *due principi logici*, che chiameremo rispettivamente *positivo* e *negativo*. Questi due principi governano l'avvicendamento delle istanze delle regole logiche.

Il principio, che chiameremo negativo, concerne intuitivamente la reversibilità di alcune regole logiche¹⁵. Viceversa il principio duale positivo esprime un senso particolare della irreversibilità delle istanze di regole logiche, e che costituisce il cuore della focalizzazione. Questi due principi consentono di di-

¹⁴Quello dell'interazione è uno dei temi principali che erano alla base del programma di ricerca sulla logica lineare, tanto da costituire un innovativo tema di ricerca esposto nel programma della *Geometria dell'Interazione* (GoI) [16].

¹⁵Diremo che una figura di inferenza R con conclusione σ e premesse $\sigma_1 \dots \sigma_n$ è reversibile se σ è derivabile se e solo se $\sigma_1 \dots \sigma_n$ lo sono.

vedere i connettivi in due gruppi disgiunti: i positivi o sincroni e i negativi o asincroni.

I due principi esprimono rispettivamente il *successo dell'associatività*, all'interno di ciascuno dei due gruppi disgiunti di connettivi. L'associatività di cui godono (separatamente) i connettivi di ciascun gruppo fa sì che questi connettivi possano essere considerati ciascuno come un unico *connettivo generalizzato*. Il tempo della logica è scandito dall'alternarsi del fallimento di ciascuna delle due associatività. L'associatività dei connettivi sincroni termina non appena fa la sua comparsa nella dimostrazione una formula principale avente come connettivo più esterno un connettivo negativo.

I due principi negativo/positivo, agiscono come due vere e proprie forze opposte sul processo di costruzione di una prova, segnando in maniera diversa il destino della dimostrazione stessa: due forze che spingono, rispettivamente, su due assi ortogonali l'espansione della dimostrazione: orizzontale (il negativo) e verticale (il positivo).

L'azione di questi due principi limita, in una misura possibile, il non determinismo implicito nel processo di espansione delle prove. Ad ogni istante del processo di espansione di un sequente delle differenti scelte devono essere fatte:

- la scelta della *formula principale* del sequente;
- la scelta della *istanza di inferenza* corrispondente alla formula selezionata come principale.

Due forme diverse di non determinismo che non sempre sono essenziali nel processo di costruzione. Tutte queste scelte devono essere fatte una alla volta in maniera sequenziale. Alcune sono reversibili, possono cioè essere fatte in qualsiasi istante, senza compromettere le successive espansioni delle prove. Queste scelte reversibili, possono essere rinviate o effettuate immediatamente e non pongono particolari problemi. Si tratta di scelte *asincrone*, insensibili al tempo, in altre parole non hanno una causalità specifica, pertanto possono essere associate ed effettuate tutte *in un solo istante* (senza tempo), come se si trattasse di una singola scelta. Le scelte asincrone riguardano una forma di non determinismo riducibile ad una forma deterministica. Si può sempre decidere di effettuare all'inizio dell'espansione tutte le mosse negative, in maniera asincrona. In tal modo tutte le formule asincrone presenti nella dimostrazione possono essere selezionate come formule principali nel sequente. Successivamente le istanze delle inferenze che corrispondono alle formule principali possono essere applicate simultaneamente, come se si trattasse di una unica regola di introduzione.

Viceversa, ci possono essere delle scelte, durante il processo di costruzione di una prova, che segnano in maniera irreversibile lo sviluppo futuro della prova. Queste scelte comportano una forma di non determinismo difficilmente eliminabile dalla dimostrazione, anche se *riducibile* a delle forme minimali o *normali*. Si tratta di un genere di non determinismo che chiameremo *sincrono*.

Non tutte le scelte sincrone sono significative, alcune sequenze di scelta sono equivalenti *modulo* la permutabilità di alcune istanze di regole di inferenza. Le sequenze significative sono quelle che riducono al “minimo” il non-determinismo dell’espansione, cioè le sequenze focalizzanti.

Nel Capitolo 3 mostreremo che la proprietà di focalizzazione dipende solo da semplici *assunzioni geometriche*, come ad esempio la semplice simmetria alla base delle dualità *input/output*, *destra/sinistra*, ecc.. Ogni dimostrazione del calcolo dei sequenti lineari può essere rappresentata come un *oggetto geometrico*, un particolare grafo (*rete*), che risulta sempre essere focalizzante.

Più in generale, mostreremo che la proprietà focalizzante è preservata ed è stabile per qualsiasi raffinamento degli oggetti geometrici (reti) iniziali (lineari). In particolare, dunque, questa proprietà vale per la logica non-commutativa, essendo quest’ultima un raffinamento della logica lineare.

Il secondo gruppo di risultati, mostrati nei Capitoli 4 e 5, mostra come trovare un calcolo dei sequenti focalizzato (che chiameremo *triadico* alla maniera di Andreoli) per il frammento proposizionale di NL, prima solo moltiplicativo (Capitolo 4) e poi compello (Capitolo 5). La ricerca dei Sistemi focalizzati di NL è stata particolarmente complessa, ed ha richiesto un grosso sforzo matematico oltrechè logico.

Particolare attenzione occorre prestare nei Capitoli 4 e 5 ai Sistemi¹⁶ focalizzati non-commutativi Σ_{mnl}^f (Tavola 4.1) e Σ_3 (Tavola 5.2), che esplicitano tutta l’interazione del processo di costruzione delle prove. Nel calcolo Σ_{mnl}^f ci sono due principali gruppi di regole : una positiva ed una negativa. Nelle prove focalizzate tra due passi negativi ci può essere al massimo un unico passo positivo.

Immaginiamo che il processo di costruzione di una dimostrazione sia come lo sviluppo di un gioco, che risulti, cioè, dall’interazione di un *giocatore A* con il suo *opponente B*. Il giocatore *A* inizia con una mossa positiva, ed il giocatore *B* risponde con una negativa.

L’interazione catturata dai sistemi focalizzati costituisce l’idea centrale del

¹⁶Calcoli dei sequenti.

nuovo programma di ricerca lanciato da Girard e chiamato *Ludique*¹⁷. La Ludica cerca di comporre le idee alla base della Costruzione Focalizzata delle prove con quelle sulla riduzione delle prove studiate dalla Geometria dell'interazione e della Semantica dei Giochi. Intuitivamente, in questa sede preliminare, possiamo limitarci a dire che una mossa nella Ludica corrisponde ad un passo di costruzione o, equivalentemente, ad un passo di riduzione di una prova.

I temi accenati in questa premessa verranno ripresi in maniera più approfondita nell'Introduzione seguente.

Ringraziamenti

La tesi è stata svolta nel quadro della Rete di Ricerca Europea *Training and Mobility of Researchers in Linear Logic and Theoretical Computer Science*¹⁸.

Sono grato a tutti i membri della rete TMR per il supporto e la proficua interazione scientifica avuta durante lo svolgimento della presente ricerca.

Il mio particolare ringraziamento va a Gianfranco Mascari dell'*Iac-Cnr* di Roma per avermi per primo introdotto al tema della focalizzazione; a Michele Abrusci dell'*Università "Roma Tre"*, ed a Jean-Marc Andreoli dello *Xerox Research Centre Europe* di Grenoble, per aver accettato di guidare questa Tesi; a Jean-Yves Girard e a Paul Ruet dell'*Institut des Mathématiques* di Marsiglia per la profonda influenza che hanno avuto sulla mia formazione scientifica.

Un ringraziamento va a Marco Pedicini, per avermi pazientemente assistito nella redazione della tesi. Infine, un ringraziamento particolare va a Chiara per avermi stimolato ed incoraggiato in tutti i momenti difficili e felici che hanno accompagnato il presente lavoro.

Roma, 19 Gennaio 2000

¹⁷Ecco cosa dichiara Girard all'inizio del suo ultimo lavoro dal suggestivo titolo *Locus Solus* [25]: «Le programme *ludique* a été énoncé dans l'article [22], et partiellement réalisé dans [23] comme une approche interactive et moniste à la logique, dialectique em quelque sorte».

¹⁸<http://iml.univ-mrs.fr/LINEAR/> .

Introduzione

La costruzione focalizzata delle prove

Tra i principali ruoli che la logica gioca nel panorama scientifico contemporaneo, vi è quello, forse più promettente, condotto sul terreno della *Computer Science*¹⁹ e che consiste, principalmente nel cercare di dare una fondazione teorica dei *Paradigmi di Programmazione*. Nello specifico, basti pensare alla — ormai famosa — *interpretazione funzionale* delle dimostrazioni catturata dalla *corrispondenza Curry-Howard*²⁰ che fornisce una solida e chiara fondazione del così detto *paradigma di programmazione funzionale*²¹.

Una delle caratteristiche essenziali del paradigma di programmazione funzionale è che esso si riferisce principalmente a programmi che terminano e restituiscono un risultato. La *procedura di eliminazione della regola del taglio*²² e in particolare la Procedura Forte di eliminazione dei tagli²³, danno

¹⁹Preferiamo l'espressione inglese alla corrispondente espressione italiana "Informatica Teorica". La prima, infatti, a nostro avviso risulta essere più densa di significato e tradizione storica della prima.

²⁰Si tratta della corrispondenza tra *tipi* e *proposizioni* stabilita in [29]. Il presente lavoro non tratta specificatamente di questa corrispondenza. Intuitivamente, quando pensiamo alle dimostrazioni, nello spirito del Calcolo di Deduzione Naturale [42], le *formule* (del frammento proposizionale \wedge, \Rightarrow) diventano *tipi*, mentre le *dimostrazioni* diventano *termini* del *Lambda Calcolo* (tipato semplice) [17]. Così, una *dimostrazione della formula A* diventa un *termine di tipo A*.

²¹Nel paradigma di programmazione funzionale ai *termini* del Lambda Calcolo vengono associati *programmi*, mentre ai *tipi* si associano le *specifiche* dei programmi. Un specifica corrisponde grosso modo alla dichiarazione o specificazione di ciò che un programma è in grado di svolgere.

²²Una procedura che data una dimostrazione π del sequente Γ che contiene istanze della regola del taglio (o "cut")

$$\frac{\vdash \Gamma', A \quad \vdash \Gamma'', A^\perp}{\vdash \Gamma', \Gamma''}$$

trasforma π in una dimostrazione π' dello stesso sequente che non fa alcun uso della regola di taglio. La procedura si deve, almeno nella prima formulazione a Gentzen [13].

²³Distinguiamo tra una versione *debole* e una versione *forte* del teorema di eliminazione

una adeguata astrazione ed efficace interpretazione di cosa succede durante l'esecuzione di un programma. Il problema, però, è che molti programmi o applicazioni non rientrano nel paradigma funzionale. Per avere degli esempi non occorre andare molto lontano. Tutti noi, usiamo quotidianamente un computer, e quindi un *sistema operativo*, per scrivere un'articolo, la tesi, leggere la posta, ecc.. Ma, cosa vuol dire “terminare” e “risultato”, quando ci si riferisce, ad esempio, ad una sessione di lavoro di un sistema operativo? Questo è, forse, un esempio banale, ma si pensi, sempre, alla pratica quotidiana, al caso dell'uso di un *web browser* che gestisce le interazioni unità disperse da qualche parte nella rete. Questi nuovi oggetti — dei veri e propri strumenti di conoscenza — hanno a che fare, piuttosto, con la necessità di *coordinare* unità remote, tra loro estranee, spesso eterogenee, costantemente interagenti²⁴.

Gli esempi di sopra mostrano che le intuizioni, e le idee, che stanno dietro il paradigma di programmazione funzionale sono del tutto inadeguate per la classe di problemi appena menzionati. Questo non vuol dire che i nuovi scenari prospettati dall'interazione sfuggano del tutto al paradigma di programmazione funzionale: in un qualsiasi momento, infatti, un sistema operativo o un browser può, sempre invocare un programma funzionale come una *black box*, ottenendo un certo output per un fissato input, disinteressandosi alle modalità dell'esecuzione. In altre parole, il paradigma funzionale non guarda, per così dire, all'*intero comportamento di un programma*; esso, infatti, prescinde da tutta una serie di *caratteristiche essenziali* che costituiscono un irrinunciabile non determinismo — spesso la ragione stessa d'essere di un programma²⁵!

Un qualsiasi paradigma di programmazione che volesse prescindere dalla analisi e fondazione teorica di questi nuovi aspetti dell'informatica teorica, giudicandoli inessenziali, perchè causa di un non determinismo giudicato *a priori* privo di significato computazionale, sarebbe destinato al fallimento.

Tra i principali compiti della logica, oggi c'è quello di chiedersi il perchè ed il come di certi comportamenti computazionali, incluso il loro non-determinismo, e non brutalmente risolvere un problema ignorandone o pregiudicandone la natura.

dei tagli. La versione debole dice che *esiste almeno una* strategia di eliminazione che termina, mentre la versione forte afferma che *tutte* le strategie di eliminazione terminano e sono dunque confluenti in una unica *forma normale* (si veda a tale riguardo la Proprietà di Church-Rosser [8]).

²⁴E' impossibile pensare, al limite, un stato “on/off” della rete!

²⁵Si pensi ad esempio ad un fenomeno di coordinazione, dove il non determinismo è la base, l'oggetto stesso della negoziazione.

La crescita di nuovi modelli di programmazione è in continua evoluzione e la pretesa di assumere una logica in qualche modo sorda, riluttante verso nuovi problemi, è ovviamente destinata al fallimento. Ciò non vuol dire che la logica debba dare fondazione di tutti gli aspetti (spesso solo pratici) di un paradigma di programmazione: essa deve esattamente rendere conto di *ciò che è essenziale e ciò che non lo è*.

La tesi che proponiamo si muove nell'ottica di cercare una soluzione fondazionale attraverso un tentativo di integrazione dei due opposti paradigmi. Molti degli sforzi fondazionali più recenti sono proprio guidati da quest'ottica: cercare di capire la natura logica di una eventuale integrazione. Basti pensare a ciò che più recentemente il programma di ricerca lanciato da Girard e denominato *Ludique*²⁶ sta operando nel terreno della *teoria della dimostrazione* e della *geometria dell'interazione*, dove la storica e sterile contrapposizione

programmazione logica/programmazione funzionale

che caratterizza il dualismo

costruzione delle prove/riduzione delle prove

cerca di ricevere una fondazione unica, omogenea, che componga entrambi gli approcci su menzionati.

Storicamente, il paradigma di costruzione delle prove affonda le sue radici nei primi lavori degli anni '70 sulla *programmazione logica*²⁷.

All'inizio la fondazione logica del paradigma di costruzione delle prove era data in termini "semantici" di *verità* piuttosto che in quelli "sintattici"²⁸ di *dimostrazione*. Le dimostrazioni²⁹ erano, infatti, usate come meri strumenti

²⁶Si veda la sezione di questa Introduzione.

²⁷Nel 1972 Kowalski [31] e Colmerauer [9] introdussero l'idea fondamentale che la logica potesse essere usata come un linguaggio di programmazione. La programmazione logica era una diretta discendente dei primi lavori sulla *dimostrazione automatica dei teoremi*. Prendendo spunto dal lavoro di Herbrand [26] del 1930, ci fu una intensa attività nell'ambito della *dimostrazione automatica* a partire dagli anni '60, un nome per tutti, Prawitz [42]. Questi sforzi culminarono con la pubblicazione nel 1965 del lavoro di Robinson [44] che introduceva il *metodo di risoluzione* per un frammento della logica intuizionista (la *logica di Horn*).

²⁸La tradizione logica ha così stigmatizzato questa distinzione oggi obsoleta che vede contrapposta alla dualità *sintassi/semantica* la dualità *dimostrabilità/verità logica*.

²⁹Senza dover entrare in dettagli tecnici, basti pensare alle *dimostrazioni per risoluzione*. Queste dimostrazioni fornivano il modello computazionale di linguaggi di programmazione logica come il PROLOG, molto alla moda nei dipartimenti del nord europa nella metà degli anni '70, tutti uniti dal motto "Intelligenza Artificiale e Prolog", e forse, più ispirati ai temi di certi film del regista inglese Stanley Kubrick che a quelli della logica!

capaci di maneggiare la nozione elementare di verità logica. La situazione cominciò a cambiare quando nella metà degli anni '80 fu introdotto il *paradigma delle dimostrazioni uniformi*³⁰, che promuoveva le dimostrazioni della logica Intuizionista come la base del paradigma di costruzione delle prove. Quell'approccio puntava a varie interpretazioni computazionali di particolari sistemi di sequenti logici. L'idea era che la logica classica fosse, per così dire, troppo potente, troppo densa di significato, per poter essere impiegata nella fondazione e nella definizione di paradigmi di programmazione basati sul modello di ricerca delle prove. Ciò era, già, accaduto con il frammento, ad esempio, della logica di Horn, ritenuto per alcuni decenni il solo frammento che avesse un vero significato computazionale, e che fosse dunque realmente "trattabile". Per la verità quel tipo di ricerca faceva un pò confusione, mischiando due obiettivi che avrebbero dovuto essere tenuti distinti e cioè, la definizione di un linguaggio di programmazione, e la questione della fondazione logica di un paradigma di programmazione. Infatti, mentre il primo obiettivo ha bisogno di tutta la potenza espressiva della sintassi, il secondo tende invece ad astrarre dalla sintassi stessa.

E' prendendo spunto da questi problemi, e dalla volontà di catturare la potenza computazionale dell'intera logica classica, che nacquero i primi lavori sulla Focalizzazione per la logica lineare, in un laboratorio tedesco, che consorziava la cooperazione di diversi centri di ricerca (anche privati), l'ECRC³¹ di Monaco, ad opera di Jean-Marc Andreoli e Remo Pareschi [7].

E' fuori dubbio che i lavori sulla focalizzazione delle prove lineari abbiano preso spunto da quelli svolti sulle dimostrazioni uniformi³².

Gli studi sulla focalizzazione delle prove muovono da due motivazioni principali:

- da un lato la naturale assunzione che il paradigma di costruzione delle prove è realmente non-deterministico. Questo è ciò che caratterizza e diversifica la costruzione delle prove rispetto alla riduzione delle prove. La presenza motivata di un certo non-determinismo è essenziale alla costruzione delle prove. Al contrario la riduzione delle prove ritiene che ci si debba sbarazzare quanto prima possibile di ogni forma di non determinismo implicito o esplicito³³ in una dimostrazione.

³⁰Ad opera del gruppo di ricerca americano composto da Miller, Pfenning, Scedrov, Hodas, ed altri [36], [38], [37].

³¹*European Computer Research Centre.*

³²Miller aveva diretto ad Edimburgo, la Tesi di Dottorato di Pareschi, e quest'ultimo, a suo volta, alla fine degli anni '90, meno di 10 anni dopo, si trovava a dirigere la ricerca di Andreoli.

³³Le perturbazioni causate dalla presenza della regola del taglio in una dimostrazione

- dall'altro lato è anche vero che non tutto questo non-determinismo è essenziale, e dunque dotato di un senso logico. Delle scelte possono essere fatte, prima o dopo, e questa scansione temporale (causale) può essere irrilevante ai fini della costruzione di una prova.

Il Paradigma di costruzione delle prove

Il paradigma di riduzione delle prove, come accennato precedentemente, si basa su un'idea molto precisa e sintetica catturata dall'ormai famoso slogan:

il paradigma di riduzione delle prove identifica *tipi* con *formule*
e *programmi ben tipati* con *dimostrazioni corrette*.

Al contrario il paradigma di costruzione delle prove, data la sua giovane età, non presenta ancora una formulazione così netta e sintetica. Grosso modo se volessimo trovare uno slogan, questo potrebbe suonare così:

il paradigma di costruzione delle prove identifica *formule* con
istruzioni e *dimostrazioni* con *stati*.

Tutti hanno una qualche idea (corretta o meno) di cosa sia una formula o una dimostrazione; le intuizioni diventano un pò meno chiare quando si comincia a parlare di “tipi” e “programmi”, fino a diventare vaghe quando si comincia a parlare di “istruzioni” e di “stati”. Varie interpretazioni sono possibili per questi due ultimi termini. Il modo, forse, più semplice è quello di riferire gli *stati* all'*assegnazione di valori alle variabili di un programma*, e le *istruzioni* alla *specificazione di una classe di transizioni di stato*. In maniera più rigorosa, l'interpretazione di una istruzione è l'insieme delle transizioni di stato specificate dall'istruzione. Una istruzione potrebbe essere vista come una funzione da stati a stati, e siccome vorremmo che questa interpretazione catturasse anche il non determinismo di certe transizioni, allora diremo che le istruzioni (formule) per una transizione (costruzione) di stato (dimostrazione) specificano trasformazioni da “uno stato” a “zero”, “uno”, o “più stati” (si veda la Figura 1).

Nel paradigma di costruzione delle prove, le dimostrazioni sono assunte essere “incomplete”, cioè, si tratta di alberi dimostrativi eventualmente n -ari i cui nodi terminali sono etichettati con *assiomi propri*³⁴. Chiameremo tali nodi sono esplicite, mentre quelle causate dall'ordine di applicazione delle istanze delle inferenze logiche sono considerate implicite.

³⁴Si tratta di assiomi non riducibili ad identità logiche $\frac{}{\vdash_{A,A} \perp}$. L'idea è quella di associare ad ogni assioma proprio una *ipotesi*. Una ipotesi può essere rimossa e sostituita da altre ipotesi più generali o del tutto diverse.

$$formula = istruzione = \left\{ \begin{array}{l} \emptyset \\ stato_0 \mapsto \\ \vdots \\ stato_n \end{array} \right\}$$

Figura 1: Interpretazione di una formula come istruzione

terminali *foglie aperte*. I rami di una dimostrazione rappresentano i cammini dell'esecuzione — possibilmente concorrente — del programma. Le foglie aperte rappresentano lo stato momentaneo delle esecuzioni attive sui i vari cammini.

La transizione più naturale che può essere effettuata sulle dimostrazioni incomplete è quella dell'espansione della dimostrazione stessa. Si tratta cioè di un processo che consiste nella *ramificazione*³⁵, di una foglia aperta. Nuovi rami vengono aggiunti al nodo aperto; questi rami, a loro volta, possono terminare con nuove foglie aperte. Il numero dei nuovi rami aggiunti può essere “zero” (il che significa che l'esecuzione termina) o diverso da zero (nuovi processi vengono creati).

In generale il processo di transizione — corrispondente al processo di espansione — si applica a qualsiasi genere di albero di derivazione, anche se non esprime una dimostrazione.

Il ricorso al Calcolo dei Sequenti, nello stile di Gentzen, fornisce un criterio di correttezza per questi alberi che diventano così dimostrazioni. Di seguito, parlando di focalizzazione delle prove, ci riferiremo sempre ad alberi che sono dimostrazioni: il paradigma della costruzione focalizzata avrà per oggetto la costruzione di dimostrazioni corrette.

Il calcolo dei sequenti descrive un sistema di *inferenze corrette*, e può, così, essere visto come una specifica formale per le *transizioni di stato ammesse*. Più in generale, l'interpretazione delle istruzioni (formule) nel paradigma di costruzione delle prove si basa sulle seguenti proprietà:

1. l'interpretazione \mathcal{I} di una istruzione φ è data dall'insieme delle transizioni per espansione. In altre parole, l'interpretazione è data dalle coppie di dimostrazioni $\langle \pi, \pi' \rangle$, tali che π' è ottenuta da π mediante

³⁵Il termine traduce l'espressione inglese “branching”.

una espansione exp di una foglia aperta etichettata con un assioma proprio. Formalmente:

$$\mathcal{I}(\varphi) = \left\{ \langle \pi, \pi' \rangle \mid \frac{\pi'}{\pi} exp \right\}$$

2. l'interpretazione di una istruzione è stabile per costruzione, cioè

$$se \langle \pi, \pi' \rangle \in \mathcal{I}(\varphi) \text{ allora } \langle \mathcal{P}[\pi], \mathcal{P}[\pi'] \rangle \in \mathcal{I}(\varphi)$$

dove π è una sotto-dimostrazione di \mathcal{P} , e scriveremo $\mathcal{P}[\pi]$

Il punto 1 dice che l'interpretazione di una formula come istruzione è data dall'insieme di tutte le coppie che hanno come componente sinistro la dimostrazione da espandere e come elemento destro una delle transizioni di cui è formata l'espansione exp .

Il punto 2 dice che l'interpretazione di una istruzione viene preservata qualora l'albero della prova iniziale a cui si riferisce l'istruzione venga innestato in un altro albero. Se una coppia $\langle \pi, \pi' \rangle$ appartiene all'interpretazione di una istruzione $\mathcal{I}(\varphi)$, allora anche tutte le coppie di transizioni $\langle \mathcal{P}[\pi], \mathcal{P}[\pi'] \rangle$ tale che π è una sottodimostrazione del componente sinistro, cioè $\mathcal{P}[\pi]$, appartengono all'interpretazione data.

Se pensiamo alle dimostrazioni di un Calcolo dei Sequenti nello stile di Gentzen allora i punti 1 e 2 dicono che l'interpretazione di una formula è data dall'insieme delle *figure di inferenza* \mathcal{R} nella forma generica:

$$\pi: \frac{\pi_1 \quad \pi_n}{\sigma_1 \cdots \sigma_n} \mathcal{R}$$

dove $\sigma, \sigma_1, \dots, \sigma_n$ sono sequenti nello stile di Gentzen, e \mathcal{R} indica una generica regola di espansione exp .

Dato un calcolo dei sequenti, l'interpretazione di una formula F è data dall'insieme delle istanze delle figure di inferenza che introducono F come principale.

Anticipando delle cose che verranno dette nella sezione dedicata alla logica lineare, l'interpretazione del prodotto tensoriale³⁶ di due formule A, B , scritto

³⁶Il prodotto tensoriale \otimes ("times") esprime una congiunzione moltiplica, una congiunzione, cioè, su cui non si fa alcuna assunzione sulla natura del contesto (l'insieme delle istanze di formule che non contiene la formula principale introdotta).

come $A \otimes B$ nel sistema dei sequenti della logica lineare, è dato dall'insieme delle inferenze della forma

$$\frac{\Gamma, A \quad \Delta, B}{\Gamma, \Delta, A \otimes B}$$

Una figura di inferenza come \mathcal{R} rappresenta, così, tutte le transizioni per espansione

$$\{\langle \pi, \pi_1 \rangle, \dots, \langle \pi, \pi_n \rangle\}$$

da una dimostrazione π con assioma proprio o foglia σ ad una dimostrazione π_i ottenuta mediante un'espansione a livello σ , che ramifica la dimostrazione momentaneamente incompleta con le nuove foglie $\sigma_1, \dots, \sigma_n$.

L'*esecuzione* di una istruzione secondo il paradigma di costruzione è una sequenza di transizioni contigue di uno stato (dimostrazione). La sequenza è tale che ciascuna transizione appartiene all'interpretazione di una istruzione. Ogni passo di espansione esprime l'istanza di una figura di inferenza. Le sequenze di passi rappresentano dunque sequenze di istanze di inferenza. Se tutte le istanze appartengono alla stessa interpretazione di una formula allora il differente ordine dato da queste sequenze non conta, è cioè irrilevante³⁷.

In generale nulla impedisce di pensare che più formule possano essere selezionate come principali, a meno che non intervengano conflitti tra le corrispondenti istanze degli schemi di inferenza.

Una esecuzione dipende, pertanto, solo dallo stato, dato dall'insieme dei nodi aperti della dimostrazione incompleta.

Nella prossima sezione mostreremo come la particolare forma dello stato di una dimostrazione possa ridurre notevolmente il non determinismo delle transizioni associate ad una istruzione. Nello specifico siamo interessati ad esecuzioni che partano da uno stato iniziale (dimostrazione incompleta) capace di essere da solo la causa per la quale solo specifiche istruzioni possono essere usate nel resto dell'esecuzione.

Siamo interessati, dunque, ad esecuzioni che partano da una dimostrazione degenerata, o ridotta, ad un singolo nodo etichettato da un sequente iniziale σ . Questo sequente iniziale può essere visto come un programma che guida l'esecuzione.

Messa a fuoco del *non determinismo*

I primi tentativi di studiare il paradigma di costruzione delle prove si basavano essenzialmente sulla Logica Classica, più precisamente su dei frammenti

³⁷Ogni sequenza delle istanze di inferenza induce lo stesso insieme di transizioni o una uguale interpretazione per la stessa istruzione o set di istruzioni concorrenti selezionate.

di quest'ultima, come il frammento intuizionista. Questi primi approcci fornivano delle soluzioni inadeguate sia dal punto di vista fondazionale che espressivo.

Alla fine degli anni '80, la comparsa della Logica Lineare, dovuta a Girard [14] cambiò drasticamente il concetto di dimostrazione. La logica lineare non si presentava come una nuova logica che andava ad aggiungersi alla schiera delle logiche (e relativi frammenti nati in quegli anni), ma guardava alla logica classica nella sua pienezza e complessità, e della *logica classica* voleva essere un *raffinamento*.

Precludendo la possibilità di liberamente duplicare o cancellare le formule nei sequenti, grazie all'uso controllato delle regole strutturali di Contrazione ed Indebolimento, la logica lineare conferiva, per così dire, alle formule della logica (classica) lo stato di "risorse ristrette".

Le dimostrazioni non parlavano più di verità eterne ed immutabili, ma cominciavano a pagare dei prezzi per l'uso condizionato o incondizionato di informazioni che diventavano così risorse suscettibili di deperimento o di accrescimento.

La logica lineare

La logica lineare introdotta da Girard ([14],[21]) è un raffinamento della logica classica che inoltre gode

- della natura costruttiva di cui gode la logica intuizionistica, cioè, una normalizzazione forte per l'eliminazione della regola del taglio;
- della simmetria di cui gode la logica classica, cioè, la negazione è involutiva.

Nella logica classica come in quella intuizionista, la verità è perenne: avendo A e $A \Rightarrow B$ si può dedurre B avendo ancora A . Al contrario, nella logica lineare le formule sono risorse che non possono essere riusate, così, avendo A e $A \rightarrow B$ si produce B , ma A non è più disponibile. Una deduzione (ad esempio, il "modus ponens") è un processo che consuma ipotesi. Le formule sono come le molecole che vengono consumate durante un processo chimico. Le regole che in logica classica o intuizionista fanno sì che le ipotesi siano delle risorse perenni sono quelle (dette *strutturali*) dell'*indebolimento* W (dall'inglese "weakening") e *contrazione* C (dall'inglese "contraction"):

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} W \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A} W$$

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} C \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A} C$$

che rispettivamente permettono la rimozione o la duplicazione³⁸ delle ipotesi (rispettivamente, delle conclusioni) se alla sinistra del segno di derivazione “ \vdash ” (rispettivamente, se alla destra del segno di derivazione “ \vdash ”).

Nella logica lineare, a differenza di quanto avviene nella logica classica ed intuizionista, le regole strutturali non possono essere applicate in maniera sistematica. Questo fatto conduce ad una divisione naturale tra due tipi di connettivi binari:

- *connettivi moltiplicativi*:
 - congiunzione \otimes (*tensore* o *times*);
 - disgiunzione \wp (*par*);
- *connettivi additivi*:
 - congiunzione $\&$ (*with*);
 - disgiunzione \oplus (*plus*);

Il potere espressivo della usuale logica (classica o intuizionista) è recuperato grazie all’uso di nuovi connettivi unari chiamati *esponenziali*: $!$ (*of course*) e $?$ (*why not*).

Il collegamento tra connettivi additivi e moltiplicativi è dato — grazie all’uso degli esponenziali — mediante i seguenti isomorfismi:

$$!A \otimes !B \cong !(A \& B)$$

$$?A \wp ?B \cong?(A \oplus B)$$

Le formule³⁹ sono costruite a partire dai letterali $p, q, \dots, p^\perp, q^\perp, \dots$ e le costanti $1, \perp, \top, 0$ mediante i connettivi binari $\otimes, \wp, \&, \oplus$ e quelli unari $!, ?$. La negazione è definita da:

$$\begin{array}{ll} (p)^\perp = p^\perp & (p^\perp)^\perp = p \\ 1^\perp = \perp & \perp^\perp = 1 \\ \top^\perp = 0 & 0^\perp = \top \\ (A \otimes B)^\perp = A^\perp \wp B^\perp & (A \wp B)^\perp = A^\perp \otimes B^\perp \\ (A \& B)^\perp = A^\perp \oplus B^\perp & (A \oplus B)^\perp = A^\perp \& B^\perp \\ (!A)^\perp = ?A^\perp & (?A)^\perp = !A^\perp \end{array}$$

³⁸Leggendo le regole dal basso verso l’alto (“bottom-up”).

³⁹In questa presentazione ci limitiamo al caso proposizionale, solo per ragioni di semplicità. I quantificatori non pongono speciali problemi e pertanto li omettiamo (si veda [14] e [21]).

La negazione risulta così involutiva: $A^{\perp\perp} = A$.

L'implicazione lineare \rightarrow è un connettivo definito: $A \rightarrow B = A^{\perp} \wp B$

Un *sequente* è una espressione della forma $\vdash \Gamma$, con Γ un multinsieme di formule, o un insieme di occorrenze diverse di formule. Con la notazione $\Gamma, \Delta \dots$ intendiamo multiinsiemi di formule. Le regole del calcolo LL sono date nella Tabella 1.

Un sequente $\vdash A_1, \dots, A_n$ è interpretato come la formula $A_1 \wp \dots A_n$, che può essere letta come “ $A_1 \otimes \dots \otimes A_{i-1} \otimes A_{i+1} \otimes \dots \otimes A_n$ implica linearmente A_i ” per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$.

Gli esponenziali permettono di recuperare il potere espressivo della logica usuale (classica o intuizionista). Esistono infatti delle traduzioni dalla logica classica alla logica lineare che sono corrette e complete rispetto alla dimostrabilità. Tali traduzioni, in verità, sono interessanti per un altro motivo ancora più importante: esse infatti offrono una raffinata analisi dell'eliminazione della regola del taglio per il calcolo dei sequenti classico, che non risulta essere nè confluyente nè terminante in generale (si veda [18] e [10]).

La logica non-commutativa

L'uso non controllato della regola di scambio nella logica lineare di Girard conduce alla *commutatività* dei connettivi moltiplicativi \otimes e \wp , e quindi alla commutatività dell'intera logica lineare. I primi lavori sulla *non-commutatività*, ispirati alla logica lineare, si limitavano a proporre solo *frammenti non-commutativi* in cui, cioè, la regola di scambio era stata soppressa. In tutti questi lavori, la regola di scambio assumeva, essenzialmente, una delle seguenti due principali formulazioni nel calcolo dei sequenti: i sequenti venivano considerati come insiemi finiti di occorrenze di formule e la regola di scambio finiva per diventare implicita nel calcolo, oppure i sequenti sono finite sequenze di formule e la regola di scambio è resa esplicita (si veda la Tavola 1).

Si può sempre rimuovere la regola di scambio dalla logica lineare, e mostrare che la procedura di eliminazione dei tagli preserva, in modo cruciale, l'assenza della regola di scambio. Il calcolo così ottenuto soddisfa un'altra importante proprietà, la dimostrabilità è infatti chiusa sotto la regola dello *scambio ciclico*:

$$\frac{A_1, \dots, A_n}{A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(n)}}$$

dove σ è una permutazione ciclica di $\{1, \dots, n\}$. Si tratta della Logica lineare Ciclica (CyLL), proposta da J.-Y. Girard in [15]. In CyLL i sequenti sono

Identità

$$\frac{}{\vdash A^\perp, A} \mathbf{I} \qquad \frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Delta, A^\perp}{\vdash \Gamma, \Delta} \textit{taglio}$$

Regole Moltiplicative

$$\frac{}{\vdash \Gamma, \perp} \mathbf{1} \qquad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, \perp} \perp$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Delta, B}{\vdash \Gamma, \Delta, A \otimes B} \otimes \qquad \frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \wp B} \wp$$

Regole Additive

$$\frac{}{\vdash \Gamma, \top} \top \quad (\textit{nessuna regola per } 0)$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \& B} \& \qquad \frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, A \oplus B} \oplus_1 \qquad \frac{\vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \oplus B} \oplus_2$$

Esponenziali

$$\frac{\vdash ?\Gamma, A}{\vdash ?\Gamma, !A} ! \qquad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, ?A} \textit{indebolimento}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, ?A, ?A}{\vdash \Gamma, ?A} \textit{contrazione} \qquad \frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, ?A} \textit{abbandono}$$

Scambio

$$\frac{\vdash \Gamma, \Delta, \Sigma}{\vdash \Gamma, \Sigma, \Delta} \mathbf{S}$$

Tabella 1: Calcolo dei Sequenti Lineari (caso proposizionale)

definiti come cicli finiti di occorrenze di formule. In [1] sono definiti le *reti dimostrative cicliche* per CyLL, come reti dimostrative lineari che soddisfano particolari condizioni.

I frammenti puramente non-commutativi hanno però lo svantaggio di essere troppo limitati nelle applicazioni (alla linguistica o all'informatica), e sostanzialmente in contraddizione con l'idea che la logica non-commutativa debba essere qualcosa di più generale del semplice frammento commutativo (lineare). In [43] C. Retoré ha anche mostrato che *allargare* il frammento lineare (LL) esteso mediante l'aggiunta della regola detta di Mix contiene un connettivo *auto-duale*, che si pone tra \otimes e \wp , il connettivo \triangleleft ("before"). Egli fornisce anche la teoria delle corrispondenti reti dimostrative per la sua POMSET logic, ma con un complicato calcolo dei sequenti che rende impossibile (al momento) una efficace sequenzializzazione.

Altri approcci sono stati infine proposti (come ad esempio in [40]) che fanno ricorso a delle *modalità* per cercare di ripristinare la commutatività all'interno di frammenti non-commutativi, con parecchie complicazioni.

Una semplice soluzione al problema della non-commutatività è quella che viene dall'interazione del lavoro di Abrusci e Ruet. Il primo ha introdotto due *nuovi legami moltiplicativi* nelle strutture dimostrative non-commutative: il legame di congiunzione \odot e il legame di disgiunzione ∇ .

L'idea seguita da Abrusci, è di associare al legame \odot un solo *interruttore*⁴⁰, e di associare tre differenti *interruttori* al legame ∇ . Ne consegue una semplice definizione di rete dimostrativa che può essere generalizzata in presenza dei legami commutativi \otimes e \wp .

Al secondo autore si deve invece il calcolo dei sequenti *misto*, commutativo e non-commutativo, che soddisfa la proprietà dell'eliminazione dei tagli. La principale novità alla base del calcolo non-commutativo di Ruet, è data dalla nozione matematica di *varietà d'ordine* che grande ruolo gioca nel presente lavoro.

Una varietà d'ordine α è una struttura tale che, fissato un punto x della base $|\alpha|$, può essere vista come un *ordine parziale* ω sull'insieme $|\alpha| \setminus \{x\}$. Chiameremo ω una presentazione di α .

Le varietà d'ordine rappresentano l'invarianza (la classe di equivalenza) delle presentazioni (ordini parziali). Diremo che due ordini parziali sono equivalen-

⁴⁰Intuitivamente, data una rete dimostrativa si possono orientare gli archi in maniera tale da considerare i cammini come si fa con grafi usuali. Ci sono vari modi di orientare gli archi di una rete, questi modi vengono chiamati *interruttori*. Per i dettagli rimandiamo al Capitolo 3.

ti quando sono presentazioni della stessa varietà d'ordine. Data una varietà d'ordine esiste sempre una presentazione non unica per essa.

Dato un ordine parziale ω possiamo sempre associare ad esso l'insieme delle sue presentazioni $\overline{\omega}$, cioè la sua varietà (d'ordine). Viceversa, una varietà d'ordine α può sempre essere presentata come un ordine parziale α_x , in pratica, focalizzando su un qualsiasi punto x del supporto $|\alpha|$. Comunque la presentazione di α non è unica, infatti, come avremo modo di spiegare nel Capitolo 1,

$$\alpha = \overline{\omega_1 \parallel \omega_2} = \overline{\omega_1 < \omega_2} = \overline{\omega_2 < \omega_1}$$

dove $\omega_1 \parallel \omega_2$ e $\omega_1 < \omega_2$ indicano la somma *parallela*, rispettivamente, *seriale* degli ordini ω_1, ω_2 . Intuitivamente una varietà d'ordine di occorrenze di formule sta per un sequente del calcolo della logica non-commutativa. Possiamo anche preferire di lavorare con le presentazioni di una varietà anzichè con la varietà stessa. E' infatti possibile definire un calcolo dei sequenti in cui questi ultimi sono ordini parziali (seriali-paralleli). Questo è ad esempio fatto in [45], ma due nuove regole strutturali, *altalena* ed *entropia* necessitano di essere aggiunte:

$$\frac{\vdash \Gamma \parallel \Delta}{\vdash \Gamma < \Delta} \textit{altalena} \quad \frac{\vdash \Gamma[\Delta < \Sigma]}{\vdash \Gamma[\Delta \parallel \Sigma]} \textit{entropia}$$

Queste due regole consentono di cambiare la presentazione di un ordine.

Di seguito noi adotteremo una terza soluzione per il calcolo dei sequenti non-commutativi. Il calcolo della Tavola 1.1, usa sia le varietà d'ordine nei sequenti, sia la regola esplicita di entropia definita con la semplice relazione di inclusione tra varietà d'ordine

$$\frac{\vdash \alpha}{\vdash \beta} \textit{ se } \beta \subseteq \alpha$$

Le varietà d'ordine hanno il vantaggio di rappresentare l'invarianza delle presentazioni mentre la regola esplicita di entropia consente facilmente di individuare i punti critici del processo di costruzione delle prove non-commutative. Sarà compito del processo di focalizzazione individuare e rimuovere i punti di non determinismo indotti dall'entropia durante le fasi di costruzione di una dimostrazione non-commutativa.

Le varietà d'ordine giocano un ruolo centrale nella logica non-commutativa e il loro efficace trattamento è uno degli obiettivi principi di questa tesi. Dettagli tecnici sulle varietà d'ordine vengono dati nel Capitolo 1, nella presente introduzione ci soffermiamo a dare alcune idee intuitive importanti.

La varietà d'ordine complica il non determinismo implicito nelle possibili scelte legate alla costruzione delle prove. Di seguito mostreremo come ridurre al minimo o come semplificare il non-determinismo implicito con le varietà d'ordine, in maniera tale che le scelte delle istanze delle regole non commutative vengano effettuate solo al momento opportuno.

Sicronicità e Asincronicità

Analizzati nell'ottica della costruzione delle prove, i connettivi non-commutativi possono differenziarsi secondo gruppi diversi in funzione del non determinismo relativo alla transizione, corrispondente ad un dato connettivo, invocata dal processo di espansione.

Ogni transizione coinvolge una o più formule principali. L'istanza della regola logica corrispondente al connettivo più esterno di una formula principale può dare luogo ad espansioni (non appena le inferenze sono selezionate ed applicate) il cui stato non è univocamente determinato.

Per semplicità distingueremo tra quanto avviene nel caso puramente commutativo o lineare, e il caso completo non commutativo. Questo approccio consente di distinguere gli aspetti cruciali e specifici del caso non commutativo da quelli che usualmente concernono il frammento lineare.

Permutabilità delle inferenze lineari

Alcune istanze di regole di inferenza, come ad esempio la disgiunzione moltiplicativa \wp , possono indurre transizioni deterministiche degli stati (dimostrazioni). Viceversa le transizioni indotte dall'istanza di una regola logica moltiplicativa \otimes comportano delle transizioni non deterministiche, nel senso che due applicazioni della medesima istanza possono condurre a due diverse transizioni di stato, cioè due diverse dimostrazioni! Si consideri, come esempio, un passo di espansione del nodo aperto etichettato con il seguente

$$\vdash A\wp B, C \otimes D, \Gamma$$

Diverse transizioni possono essere effettuate, a seconda di quale formula venga selezionata come principale. Altre transizioni dipendono dalla scelta dell'istanza corrispondente alla formula principale; molteplici istanze possono infatti essere disponibili (o candidabili per la medesima formula principale). Se selezioniamo la formula $A\wp B$ come principale, tutte le transizioni ad essa associabili sono univocamente determinate dalla espansione data dall'istanza di una regola tipo \wp

$$\frac{\vdash A, B, C \otimes D, \Gamma}{\vdash A\wp B, C \otimes D, \Gamma} \wp$$

Viceversa, se selezioniamo la formula $C \otimes D$ come principale allora lo spazio delle transizioni possibili aumenta: nell'insieme delle transizioni possibili (l'interpretazione dell'istruzione $C \otimes D$) potrebbero esserci ad esempio le seguenti transizioni :

$$\frac{\vdash A\wp B, C, \Gamma' \quad \vdash D, \Gamma''}{\vdash A\wp B, C \otimes D, \Gamma} \otimes \quad \text{oppure} \quad \frac{\vdash C, \Gamma' \quad \vdash D, A\wp B, \Gamma''}{\vdash A\wp B, C \otimes D, \Gamma} \otimes$$

per una fissata partizione del contesto $\Gamma = \Gamma' \uplus \Gamma''$.

Il caso dell'istanza della regola del \wp non comporta alcuna forma di non determinismo, mentre l'istanza della regola del tensore \otimes induce un forte non determinismo. Si tratta in entrambi i casi di fenomeni di determinismo/non-determinismo relativi alla sola scelta della corretta istanza di inferenza logica. Nulla è stato ancora detto su un'altra forma di non determinismo legato alla dinamica vera e propria del processo di costruzione: le modalità per la selezione della corretta istruzione sono anch'esse soggette a non determinismo. Nell'esempio precedente le scelte relative al \wp e \otimes non comportano particolari problemi. Alcune scelte però possono condurre a dimostrazioni non corrette.

Noi siamo interessati ad un processo di espansione che termini con una dimostrazione, qualora il sequente sia dimostrabile.

In generale, vorremmo che fosse una qualche proprietà logica (non una semplice o efficiente strategia) a dire se l'ordine di applicazione delle due diverse regole è irrilevante. Proprietà del genere sono molto importanti nella logica, e vanno ad esempio sotto il nome di *proprietà di permutabilità delle regole*. Le proprietà di permutabilità delle inferenze di LK ed LJ (classiche ed intuizioniste) furono per la prima volta studiate da Kleene [30]. Tali proprietà giocano un ruolo chiave nella dimostrazione di alcuni importanti teoremi della logica, come ad esempio il teorema dell'eliminazione dei tagli di Gentezen [13].

Due regole R_1 ed R_2 sono dette essere in una *situazione di permutabilità* se esiste una dimostrazione del calcolo dei sequenti in cui R_2 è applicata immediatamente dopo l'istanza R_1 e la conclusione di R_1 non è premessa di R_2 . In tal caso, diremo che R_1 *non permuta* con R_2 se esiste un sequente che può essere provato solo con l'istanza R_2 sotto R_1 ; altrimenti, diremo che R_1 *permuta* con R_2 .

Se ci limitiamo al caso lineare sappiamo che alcune regole, come ad esempio il \wp o il $\&$, *permutano* con qualsiasi altra inferenza. Tali regole possono cioè scambiare il proprio posto (ordine) con qualsiasi altra regola nell'albero

dimostrativo. Altre regole invece risultano essere solo *parzialmente permutabili*: esse, cioè, possono scambiare il posto solo con istanze di altre regole appartenenti allo stesso gruppo.

Altre regole come quelle strutturali non risultano permutabili. Esse però rendono permutabile qualsiasi regola che le preceda nella derivazione.

In generale la permutabilità dipende dalla *proprietà di reversibilità* di una regola; la reversibilità stabilisce l'equivalenza, rispetto alla derivabilità, tra conclusioni e premesse di una inferenza.

Le istanze reversibili sono quelle che possono essere spostate lungo tutto l'albero dimostrativo e fatte scivolare verso la radice della dimostrazione. Altre regole come quelle strutturali possono invece essere mosse verso le foglie, o l'alto, della dimostrazione. Le restanti regole sono quelle che necessitano per così dire di una sincronizzazione. Si tratta, cioè, di regole che possono subire degli *spostamenti locali* nell'albero dimostrativo.

Le permutabilità locali o globali delle inferenze sono la fonte del non determinismo della ricerca di una prova. A differenza delle regole reversibili e di quelle strutturali, che trovano una facile e rapida localizzazione nella dimostrazione, alcune regole logiche hanno una difficile localizzazione ottimale in una prova.

Grazie, però, alla parziale permutabilità delle regole irreversibili è possibile localizzare l'applicazione di queste ultime in punti precisi dell'albero dimostrativo. In altre parole è possibile concentrare in particolari sezioni continue (che chiameremo critiche) alcune sequenze di regole irreversibili in maniera tale che prese in tale sezione due istanze contigue irreversibili, la premessa della regola più bassa è formula principale della regola che la precede. Tali connettivi vengono chiamati *sincroni* (o *positivi*), poichè le regole che li introducono necessitano una sincronizzazione (localizzazione) nella derivazione. Viceversa i connettivi introdotti da istanze di regole reversibili prendono il nome di *asincroni* (o *negativi*).

Nella logica lineare due forme di non determinismo che chiameremo *asincrono* e *sincrono* sono introdotte da connettivi di differente polarità:

- i *connettivi negativi*, introducono *non-determinismo asincrono*:
 \perp (*bottom*), \top (*top*), \wp (*par*), ∇ (*sequential*), $\&$ (*with*), $?$;
- i *connettivi positivi*, introducono *non-determinismo sincrono*:
 $\mathbf{1}$ (*uno*), \otimes (*times*), $\mathbf{0}$ (*zero*), \oplus (*plus*), $!$.

Questa distinzione di polarità, può essere estesa al caso delle formule atomiche, se fissiamo una arbitraria partizione di quest'ultime. Questa esten-

sione, non è secondaria ⁴¹, e consente un trattamento naturale del non-determinismo, anche per le inferenze atomiche, alla stessa stregua delle inferenze logiche.

La procedura di focalizzazione per le prove della logica lineare consiste essenzialmente nel sincronizzare le regole del calcolo della Logica Lineare LL (della Tabella 1), cioè, nel ridurre le due forme di non-determinismo menzionate sopra, assicurando che:

1. i *passi negativi* (le istanze, cioè, di figure di inferenza che introducono un connettivo negativo) siano eseguiti (“applicate”, dal basso verso l’alto) “quanto prima possibile”;
2. sequenze di *passi positivi* — il cui ordine di applicazione sarebbe altrimenti una “irrilevante successione temporale” — siano applicate (dal basso verso l’alto) in un solo “istante”.

Per capire meglio i punti dove il non-determinismo ristagni nel processo di costruzione di una prova, descriviamo, nella Figura 2, la procedura di costruzione di una prova e azzardiamo una veloce analisi. I particolari di questa argomentazione sono contenuti nel Capitolo 2, a cui rinviamo per i dovuti approfondimenti.

Al passo 3 del processo di costruzione i nuovi nodi aperti $\{\sigma_k\}_{K=1\dots n}$ possono essere espansi simultaneamente. Questa è una forma di *parallelismo globale* perchè riguarda tutti i rami della dimostrazione, ed è opposto ad un *parallelismo locale* che riguarda ogni singolo ramo. Localmente ad ogni ramo, infatti, durante il passo 1, il criterio per la selezione di una figura di inferenza non è determinato.

E’ possibile immaginare una forma di selezione “parallela” (locale, in un ramo) che effettua tutte le scelte possibili in maniera tale che tutte le possibili dimostrazioni del sequente iniziale vengano generati. Molte di queste dimostrazioni saranno diverse per costruzione e differiranno solo nell’ordine in cui le sequenze di regole sono state effettuate. Può, però, risultare che l’ordine di alcune di queste regole sia irrilevante. Ciò implica che delle (sotto)dimostrazioni sono *equivalenti*.

⁴¹La menzione al ruolo svolto dalle polarità ed in particolare anche delle polarità atomiche, gioca un ruolo centrale nella messa a fuoco del non determinismo, in quanto consente un maggiore controllo di quest’ultimo, che si tardece, tecnicamente in alberi- dimostrazioni più corte. Rinviamo il lettore ai Capitoli 2, e 3, per la discussione del trattamento delle formule atomiche.

construct :

dato un sequente iniziale σ_0 , costruisci, incrementalmete, una dimostrazione π di σ_0 .

all'inizio assegna a π il nodo aperto σ_0

1. seleziona un'istanza di una figura di inferenza del sistema dei sequenti con sequente iniziale σ e con premesse i sequenti $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ con $n \geq 0$
2. espandi la dimostrazione π al nodo σ con n rami con nodi aperti etichettati con $\sigma_1, \dots, \sigma_n$;
3. per ciascuno $k = 1, \dots, n$ ripeti la procedura **construct**

Figura 2: Procedura generale di costruzione delle prove

Diremo che due dimostrazioni, costruite seguendo il processo della Figura 2, sono equivalenti quando ciascuna di esse può essere ottenuta dall'altra mediante uno dei seguenti modi:

1. *permutazione di inferenze* di una dimostrazione, come, ad esempio, la permutazione tra r, s nella Figura 3. L'esempio mostra come n istanze della regola s , potrebbero essere scatenate *simultaneamente* già al passo 1 del processo di costruzione della prova. Si tratta di una forma di parallelismo locale della selezione delle istanze, che porta ad un locale non-determinismo, che può e deve essere eliminato.

$$[r] \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \sigma_1 \dots \sigma_n \\ \vdots \end{array}}{[s] \frac{\sigma}{\sigma'}} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \vdots \\ s \frac{\sigma_1}{\sigma'_1} \dots s \frac{\sigma_n}{\sigma'_n} \\ \vdots \end{array} \frac{}{r \frac{}{\sigma'}}$$

Figura 3: Permutazione di figure di inferenza

2. i *circuiti* in una dimostrazione sono dovuti a situazioni come quelle della Figura 4, dove il sequente σ dentro la dimostrazione π è identico alla radice della dimostrazione stessa. In tal caso, la sottodimostrazione π' potrebbe rimpiazzare la dimostrazione stessa π . Il senso della dimostrazione rimarrebbe immutato, ed otterremmo, così, una dimostrazione più compatta. Questo è anche il significato del Teorema dell'eliminazione dei tagli di una dimostrazione, che mostra che un

certo teorema può essere ottenuto senza dover ricorrere a lemmi inutili (circuiti) in dimostrazione.

$$\frac{\vdots}{\sigma} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\vdots \quad \vdots}{\sigma} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\vdots}{\sigma}$$

Figura 4: Circuiti di una dimostrazione

Tutte le istanze di figure negative vengono effettuate nello stesso istante senza operare nessuna scelta (irrilevante). In assenza di formule negative, dopo che si è focalizzato su una formula positiva, si scatenano simultaneamente tutte le istanze di figure di inferenza legate alla formula (o alle sue dirette sottoformule), anche in questo caso l'ordine è irrilevante, ma solo dopo che si è focalizzata la formula principale.

Possiamo associare all'idea del processo di focalizzazione di una prova un'immagine spaziale. Nel momento in cui vengono applicate istanze di inferenze asincrone, la dimostrazione subisce una espansione *orizzontale*, corrispondente al fatto che tutte le possibili occorrenze di formule asincrone vengono analizzate simultaneamente. Viceversa, nel momento in cui il processo focalizza sull'occorrenza di una formula sincrona, allora la prova si espande solo *verticalmente*.

Permutabilità delle inferenze non commutative

La permutabilità delle figure di inferenza non commutative risente fortemente della presenza della regola di *entropia*. E' l'entropia la causa principale dell'aumento di non determinismo nella ricerca delle prove non commutative. Le regole strutturali immerse in un contesto non commutativo, non pongono particolari problemi: il loro comportamento è analogo a quello riscontrabile nel contesto lineare. E' possibile infatti spostare tutte le istanze di regole strutturali verso le foglie di una dimostrazione analogamente a quanto avviene nel caso lineare. Le ragioni della permutabilità delle istanze strutturali risentono dell'assunzione fatta in NL della *centralità degli esponenziali*. In NL si assume che le formule esponenziali siano libere di muoversi nel contesto di un sequente. In generale, data la varietà d'ordine di un contesto, l'introduzione per indebolimento di una nuova formula nel contesto induce una varietà d'ordine che lascia per così dire immutato l'ordine precedente delle formule.

La centralità degli esponenziali comporta la creazione di una zona *extraterritoriale*⁴² in cui stipare tutte le formule precedute dalla modalità esponenziale $?$: è il primo passo di focalizzazione che mostreremo nel Capitolo 2.

Il vero problema della permutabilità delle inferenze non commutative è dato dalla presenza della regola di entropia. A priori due differenti atteggiamenti possono essere adottati per cercare di limitare il non determinismo conseguente all'uso implicito o esplicito dell'entropia⁴³:

1. rimuovere completamente dal calcolo dei sequenti la regola di entropia;
2. usare esplicitamente la regola di entropia, cercando di localizzarne le istanze in zone precise della dimostrazione.

La prima ipotesi è legittima anche se può sembrare troppo forte. Il calcolo che ne risulta (nella Tabella 1.2) ha il vantaggio di essere vicino alle reti dimostrative non commutative di NL (discusse nel Capitolo 3). Osservando però la proprietà di reversibilità delle regole non commutative⁴⁴ scopriamo che la regola che introduce il connettivo \wp ha perso la caratteristica di piena reversibilità di cui godeva nel caso commutativo. Data infatti una dimostrazione π di un sequente $\Gamma, A \wp B$ con varietà d'ordine α si può sempre ottenere da π una dimostrazione π' del sequente Γ, A, B , con varietà d'ordine $\beta \subseteq \alpha$. In altre parole le due dimostrazioni non sono equivalenti. Ciò dipende dal fatto che per introdurre un connettivo \wp si fa un uso implicito di entropia, che consiste nel dimenticare l'ordine che legava le due occorrenze A e B . Questa dimenticanza è fonte di non determinismo durante la fase di ricerca della prova. Un passo di espansione che focalizzi $A \wp B$ lascia aperta la questione di quale sia l'ordine che lega due formule nella premessa.

Seguendo l'ipotesi 1 si pone la questione se i connettivi di NL siano ancora raggruppabili secondo i due gruppi connettivi-sincroni/asincroni. In caso di risposta affermativa allora i connettivi asincroni non dovrebbero essere più causa di alcun non determinismo, in quanto completamente reversibili.

Nel Capitolo 3 mostreremo la stabilità della proprietà di focalizzazione formulata direttamente sulle reti dimostrative non-commutative (frammento moltiplicativo). Tale stabilità afferma che il connettivo \wp mantiene la sua natura asincrona così come il connettivo ∇ , mentre i connettivi \otimes, \odot sono entrambi sincroni.

⁴²L'espressione si deve a Girard.

⁴³In tutto il ragionamento che segue si assume una qualche familiarità con le diverse formulazioni del Calcolo dei Sequenti per NL riportati nel Capitolo 1.

⁴⁴E' sufficiente, per il momento, limitarsi all'osservazione del frammento puramente moltiplicativo.

La seconda ipotesi⁴⁵ che consiste nel mantenere esplicita la regola di entropia, risulta in linea con la distinzione sincrona/asincronia dei connettivi, ma apre la questione nuova di sincronizzare (localizzare) in qualche modo le istanze di entropia rispetto alle altre regole (logiche) del calcolo.

La questione può essere ben sintetizzata dal grafo della Figura 5.

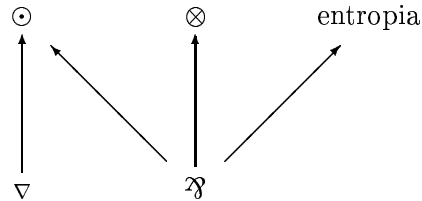


Figura 5: Permutabilità del frammento MNL

Il grafo esprime un ordine parziale sull'insieme dei connettivi moltiplicativi di NL. Gli archi orientati esprimono le proprietà di reversibilità delle inferenze di MNL. Un arco orientato da A a B esprime la dipendenza dell'inferenza B dalla inferenza A: tale dipendenza è logica, in altre parole l'istanza B può essere applicata solo quando tutte le possibili istanze di tipo A sono state applicate.

L'assenza di archi tra due nodi (etichettati da regole) mostra che le istanze sono indipendenti.

Gli elementi che sono minimali nell'ordine sono regole asincrone, mentre quelli massimali sono regole sincrone. Tutto ciò è coerente con l'ipotesi di focalizzazione. Ma che dire dell'entropia?

Il problema con entrambe le ipotesi è dunque quello di localizzare l'entropia, sia essa implicita che esplicita.

La soluzione da noi proposta contenuta nel Capitolo 4 (per il caso moltiplicativo) e nel Capitolo 5 (per il frammento completo), consiste nell'esibire dei Calcoli dei Sequenti (Tabelle 4.1 e 5.2) che localizzino l'entropia solo immediatamente prima delle istanze delle regole di \odot . Si tratta di sistemi di calcolo che dividono i connettivi, nella maniera naturale, in asincroni \wp , ∇ , $\&$, $?$, \perp e sinroni \otimes , \odot , \oplus , $\&$ sincroni.

Inoltre tali sistemi fanno un uso *minimo* di entropia nella derivazione, cioè le derivazioni usano la più piccola quantità di entropia necessaria a dimostrare un dato sequente. L'entropia è usata solo in prossimità delle istanze delle

⁴⁵Questa ipotesi è stata avanzata da Girard nel corso della "Giornata di Logica Non-commutativa" svoltasi all'IML-CNRS di Marsiglia il 13 Ottobre 1999.

regole di \odot . Ogni applicazione di una istanza logica di \odot richiede, per poter essere effettuata, che il contesto delle formule di un sequente sia un ordine seriale-parallelo *ammissibile*, cioè partizionabile in maniera tale che l'entropia venga ben ripartita su i due rami che risultano dalla separazione del contesto operata dalla regola del \odot . Formalmente diremo che un'istanza di regola \odot è applicabile se e solo se, non ci sono formule asincrone nel contesto, e se per una fissata partizione Γ', Γ'' del contesto Γ , la partizione è *ammissibile*⁴⁶.

I sistemi focalizzati da noi introdotti si comportano come degli algoritmi (di tipo **construct**) tali che dato un sequente con una varietà d'ordine α , se il sequente è dimostrabile, trovano la dimostrazione del sequente equivalente con la più piccola varietà d'ordine inclusa in α .

Parallelismo e Sequenzialità

La focalizzazione getta nuova luce sugli aspetti di sequenzialità e parallelismo impliciti o espliciti nelle dimostrazioni. La pratica del calcolo dei sequenti ci porta a considerare che la nozione di sequenzialità espressa mediante alberi dimostrativi è del tutto incapace di esprimere caratteristiche di parallelismo e concorrenza. Il calcolo dei sequenti, erroneamente, considera come estranei alla logica i concetti di parallelismo o concorrenza.

L'idea di sequenzialità che si trova nelle dimostrazioni dei sistemi alla Gentzen coincide sostanzialmente con l'idea che le regole di inferenza debbano essere applicate "una alla volta". In realtà le cose sono un pò più complesse. La focalizzazione mostra che se c'è una nozione di sequenzialità questa dipende solo dall'avvicinarsi di due opposte fasi in cui si articola il principio logico della focalizzazione. Una fase negativa ed una positiva. Due fasi negative possono essere separate da al massimo una fase positiva. Tali configurazioni si chiamano cicli e costituiscono l'unità minima del tempo della logica.

A primo impatto la focalizzazione riduce quanto meno la taglia delle sequenze di passi applicabili nel corso del processo di costruzione di una prova, operando una vera e propria semplificazione delle sequenze delle regole applicabili. Questa semplificazione non è una proprietà puramente sintattica, essa non dipende dal particolare modo in cui scriviamo o rappresentiamo le dimostrazioni, bensì è data dal fatto che la focalizzazione è una proprietà che le dimostrazioni hanno.

⁴⁶Per una spiegazione del criterio di ammissibilità si veda la Sezione 4.2.2 del Capitolo 4.

Qualunque rappresentazione corretta delle dimostrazioni deve poter esprimere la proprietà logica della focalizzazione.

Tanto più il disegno della dimostrazione sarà compatto e generale, tanto più la focalizzazione ci darà il grado di sequenzialità catturato o espresso da quelle rappresentazioni.

L'ideale è avere una teoria per la rappresentazione delle dimostrazioni talmente astratta ed efficace da poter ignorare del tutto la particolare nozione di sequenzialità. La focalizzazione potrebbe così essere vista come un modo per ripristinare l'essenziale della sequenzialità contenuta in questi oggetti astratti.

La logica non commutativa consente oltre allo studio delle dimostrazioni del calcolo dei sequenti, uno studio più astratto delle dimostrazioni che vengono viste come particolari grafi (dette Reti Dimostrative o "Proof-nets") in cui la nozione di parallelismo ha un ruolo centrale.

Astraendo dal particolare senso sequenziale di una dimostrazione è possibile investigarne il puro significato logico, che nel caso di grafi dipende dal significato "geometrico" dato ai nodi ed ai legami.

Ogni rete dimostrativa esprime una classe di dimostrazioni equivalenti. Più dimostrazioni del calcolo dei sequenti possono avere la stessa immagine (che è una rete), e si diranno allora equivalenti. Viceversa ad una rete corretta possono corrispondere delle dimostrazioni del calcolo dei sequenti equivalenti in qualche modo. Oggetti, cioè, che non differiscono che per semplici permutazioni nell'ordine di applicazione delle regole.

Il processo che trasforma un grafo corretto in una dimostrazione del calcolo dei sequenti è conosciuta come "procedura di sequenzializzazione". Essa consente di ristabilire l'essenziale degli aspetti di sequenzialità in una dimostrazione.

E' la procedura di sequenzializzazione a scandire le fasi realmente sequenziali di una dimostrazione. L'ordine di sequenzializzazione stabilisce un ordine (solo parzialmente permutabile) delle istanze delle regole di una dimostrazione nel calcolo dei sequenti. La sequenzializzazione si comporta come un processo che alterna l'iniezione di nodi permutabili (asincroni) alla iniezione di nodi non permutabili (sincroni).

La scansione di questi due momenti deterministici e non deterministici della sequenzializzazione di una rete dimostrativa può essere sincronizzata. Sincronizzare una sequenzializzazione vuol dire far in modo che vengano iniettati nella corrispondente dimostrazione del calcolo dei sequenti solo quei legami che sono pronti ad essere rimossi, legami, cioè, la cui rimozione dal grafo induce grafi ancora corretti.

La proprietà che dice che esiste sempre un legame che è ereditariamente pronto ad essere rimosso e sequenzializzato va sotto il nome di proprietà di focalizzazione per le reti dimostrative. Il Teorema 3.3 che dice che una struttura dimostrativa priva di nodi terminali asincroni contiene almeno una conclusione focalizzante è dimostrato da noi nel Capitolo 3.

Dalla Focalizzazione alla *Ludica*: sviluppi futuri

Il paradigma di costruzione delle prove riposa sulla procedura di normalizzazione per la logica lineare ([14, 15, 16, 17]). La procedura di normalizzazione permette di costruire, data una qualsiasi dimostrazione π , una dimostrazione equivalente a π detta in *forma normale*. La forma normale risulta essere più “compatta” perchè priva del non determinismo indotto dalle istanze della *regola del taglio*. Essa è particolarmente significativa e dunque adatta per rappresentare la classe di dimostrazioni ad essa equivalenti. A tal proposito, una cosa va osservata. L’uso che si fa delle procedure di normalizzazione nella fondazione dei paradigmi di costruzione delle prove, o di programmazione logica, differiscono largamente dall’uso che si fa nella fondazione dei paradigmi di programmazione funzionale o più in generale nella Geometria dell’Interazione. In questi ultimi ([32], [33], [15, 16]) l’esecuzione di un programma corrisponde alla normalizzazione di una prova che è già data, costruita. L’approccio assunto dal paradigma di costruzione delle prove è invece duale, poichè l’esecuzione di un programma consiste nel costruire una prova normale. E’ il carattere normale delle prove che si cerca di dimostrare che permette di mettere in atto una strategia seguibile che guidi la costruzione (o ricerca) delle prove.

In entrambi gli approcci, però, vi è una forma comune di dinamica. Nel caso della GoI emerge il carattere interattivo della normalizzazione, mentre nella ricerca delle prove il processo di riduzione segue e guida il processo di costruzione di una prova. Cercare di comporre questi aspetti dinamici è l’obiettivo principale che si pone il nuovo programma di ricerca lanciato da Girard e chiamato *Ludique* ([22], [23], [25]). Tale programma mira a realizzare il “puro calcolo” dell’interazione di cui immaginiamo l’esistenza quando pensiamo alla procedura dell’eliminazione del taglio.

L’idea del calcolo astratto, o puro, in generale è tipica del paradigma di costruzione delle prove, che abbiamo illustrato sopra, ed in modo particolare è l’idea che guida il Calcolo Focalizzato (lineare o più estesamente non commutativo).

Abbiamo più volte ripetuto come il modello di espansione di una prova —

che in definitiva non è altro che un grafo binario su una dimostrazione — si applica anche ad oggetti che non sono dimostrazioni. Ora, la dinamica coinvolta in un processo di costruzione di una prova (che non voglia essere stupidamente automatica) è di per se fortemente interattiva, e la forma poi più semplice e forse naturale per esprimere tale interazione è quella del *gioco*, nella sua accezione più ampia. L'interazione si basa su comportamenti (formule) e modi di creare nuovi comportamenti (regole). La forma attraverso la quale si sviluppa l'interazione tra due (o più individui) è il gioco.

Ogni individuo usa delle strategie, o disegni per i suoi comportamenti. Ci possono essere strategie vincenti (dimostrazioni) e perdenti (tra cui l'abbandono). L'idea di gioco rende (moralmente) pensabile (coerente) una qualche forma di interazione tra due espedienti (strategie) opposte. Un giocatore G e il suo opponente O si fronteggiano nel gioco: G cerca di dimostrare A , mentre O cerca di provare *non* A . Sarebbe assurdo pensare ad un modo in cui queste due azioni siano coerenti. Sarebbe, infatti, assurdo pensare ad una dimostrazione di A e al tempo stesso una dimostrazione di *non* A . L'unica possibilità è pensare ad un gioco, ad una interazione tra oggetti che non devono essere necessariamente dimostrazioni, bensì generali pseudo-dimostrazioni (i disegni della Ludica).

Assumendo l'idea di gioco, la costruzione e la riduzione delle prove rappresentano due modi equivalenti di dare una risposta allo stesso problema. Possiamo chiarire tale affermazione con un esempio:

immaginiamo una dimostrazione del sequente vuoto \vdash , ad esempio in Logica classica, come ottenuta da una istanza della regola del taglio

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdash A \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ A \vdash \end{array} \text{taglio}}{\vdash}$$

Il processo di eliminazione dalla dimostrazione di \vdash di quell'istanza di regola del taglio può essere considerato come del tutto equivalente al tentativo \mathcal{D} di dimostrare il sequente $\vdash A$ che interagisca col tentativo \mathcal{E} di dimostrare $A \vdash$.

Il processo ha un esito positivo se le due strategie \mathcal{D}, \mathcal{E} sono ortogonali, cioè, se la normalizzazione del sequente vuoto \vdash converge.

Questa idea è alla base del Programma di ricerca Ludica.

Un'altra idea molto importante è quella che vede come obsoleta la distinzione *fregeiana sintassi/semantica*. L'idea che si debba ricorrere ad una teoria semantica (*modelli*) o più in generale alla (*tarskiana*) *meta-teoria* per spiegare il significato della logica è superato nel programma della Ludica dall'idea che la logica si spiega a partire dall'interazione. Il significato non è qualcosa che i connettivi ricevono dall'esterno. L'interazione non è tra teoria e meta-teoria, bensì l'interazione è interna alla logica stessa: «il significato dei connettivi logici» dice Girard «va cercato nei connettivi stessi»!

Il presente lavoro segna un primo passo verso una Ludica non-commutativa. I sistemi focalizzati Σ_{mnl}^f e Σ_3 permettono la costruzione di oggetti finiti, stratificati secondo sequenze di regole positive e negative. In generale le dimostrazioni focalizzate sono tali che tra due passi negativi c'è al massimo una sequenza critica positiva. Ora è possibile ridurre ulteriormente tali sistemi ed ottenere dei sistemi *ipersequenzializzati*, attraverso i quali costruire oggetti ancora più semplici: dimostrazioni o pseudo-dimostrazioni in cui la scansione positivo/negativo è perfetta: ad un passo negativo segue uno positivo e viceversa, secondo sequenze possibilmente infinite. L'alternanza delle opposte polarità corrisponde all'interazione delle mosse di due giocatori. Questo modello di calcolo puro, attualmente in fase di studio, costituisce la base degli sviluppi futuri della presente ricerca.

Struttura della Tesi

Introduciamo brevemente il contenuto dei singoli capitoli.

Il Capitolo 1 è interamente dedicato alla presentazione e discussione della Logica Non-commutativa. Viene presentato il calcolo Σ (Tabella 1.1) per NL con varietà d'ordine e regola di entropia esplicita. Il frammento notevole moltiplicativo Σ_{mnl} (Tabella 1.2) viene discusso nella formulazione senza regola di entropia.

Il Capitolo 2 descrive la procedura di costruzione focalizzante per le prove della logica non-commutativa; tale processo si articola in due fasi successive: – normalizzazione delle regole strutturali, Sistema Diadico Σ_2 (Tabella 2.1); – normalizzazione delle regole logiche lineari: Sistema Triadico Σ_3^c (Tavola 2.2)

Nel Capitolo 3 stabiliremo che la proprietà di focalizzazione è un raffinamento della proprietà di splitting (Teorema 3.3), e dipende solo oltre che dallo stesso splitting, dal fatto che le reti sono sempre in forma canonica, cioè con legami-assioma atomici e polarizzati in maniera arbitraria.

Catturata per via geometrica, la proprietà di focalizzazione, goduta dalle reti dimostrative non-commutative, deve essere restituita alle dimostrazioni del calcolo dei sequenti non-commutativi.

Nel Capitolo 4 mostreremo come *iniettare* la proprietà di focalizzazione dalle reti alle dimostrazioni del Calcolo Focalizzato (moltiplicativo) Σ_{mnl}^f (Tavola 4.1)

Tecnicamente l'iniezione delle proprietà delle rete nel calcolo avviene grazie alla *procedura di sequenzializzazione* (Teorema 4.3) che consente di stabilire una corrispondenza tra reti e dimostrazioni del calcolo dei sequenti Σ_{mnl}^f . Un particolare trattamento viene riservato all'entropia localizzata solo in prossimità delle istanze della regola del \odot . Il Teorema 4.1 mostra inoltre che il Calcolo Σ_{mnl}^f fa uso della più piccola quantità di entropia necessaria a dimostrare un sequente del frammento moltiplicativo standard di MNL.

L'ultimo Capitolo affronta la questione della focalizzazione del frammento completo di NL. Due approcci sono proposti, analogamente a quanto fatto col solo frammento moltiplicativo: uno basato sulle reti dimostrative, e l'altro sul calcolo.

Il primo approccio tenta la risposta ad una questione attualmente aperta: quale sintassi per le reti additive ed esponenziali. La soluzione prospettata si basa essenzialmente nell'adattamento della soluzione basata sulle *scatole* [14]. Queste reti non hanno alcun legame per l'entropia che così rimane implicita come nel caso moltiplicativo. La varietà d'ordine indotta dai sistemi di interruttori sulle conclusioni della rete non è in generale seriale-parallela: ciò dipende dal legame &.

Come ultimo risultato — che completa l'intero lavoro — si mostra la focalizzazione direttamente sulle dimostrazioni del calcolo dei sequenti: il Sistema Triadico Σ_3 (Tavola 5.2) corretto e completo rispetto al calcolo originale Σ di NL.

La Figura 6 sintetizza schematicamente i punti principali di focalizzazione.

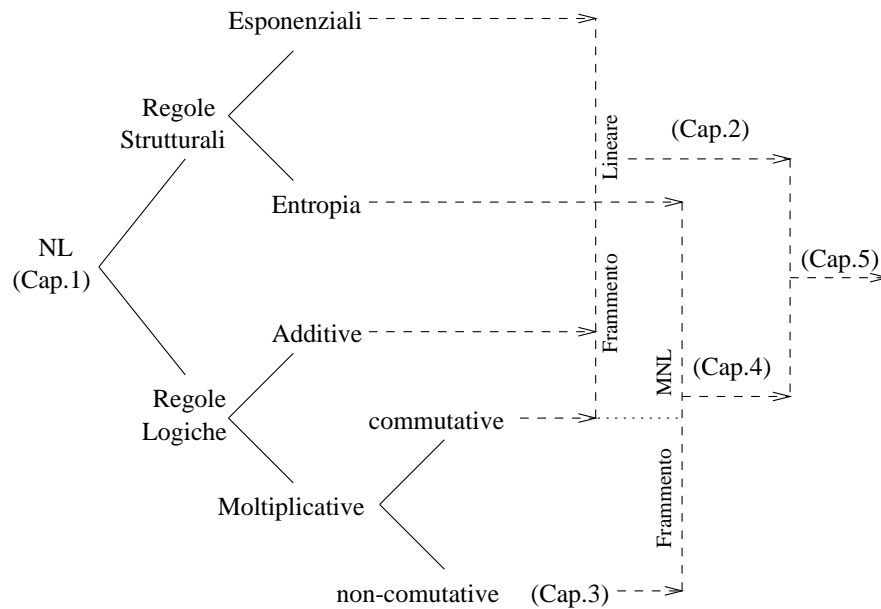


Figura 6: Quadro sinottico dei passi di focalizzazione per il frammento proposizionale di NL.

Capitolo 1

La Logica Non Commutativa

1.1 Introduzione

Il presente capitolo è interamente dedicato alla presentazione del frammento proposizionale completo della logica non-commutativa così come introdotta da Paul Ruet in [45] nel 1997.

La nozione centrale è quella di *varietà d'ordine* introdotta nella prima sezione. Nella seconda sezione viene introdotto il calcolo dei sequenti basato sulle varietà d'ordine, ed discusso il frammento moltiplicativo (MNL).

La logica non commutativa risulta dalla unificazione della logica lineare e della logica ciclica, quest'ultima è una estensione conservativa classica del Calcolo di Lambek [34].

Consideriamo il frammento puramente non commutativo della logica lineare, ottenuto rimuovendo la regola di scambio dal Calcolo dei Sequenti (nella Tavola 1.1), ed immaginiamo di voler introdurre dei connettivi commutativi. Ci accorgiamo che non possiamo rimuovere completamente la regola di scambio, perchè dobbiamo sempre essere in grado di distinguere una o più occorrenze di formule separandole dal contesto. Una soluzione ragionevole è quella di considerare le *permutazioni cicliche* di

$$\frac{\vdash \Gamma, \Delta}{\vdash \Delta, \Gamma}$$

Il bisogno di combinare una congiunzione commutativa con una congiunzione non commutativa conduce in modo naturale a considerare una unica congiunzione su un ordine parziale: così, $A \otimes B$ può avere tre differenti significati, a seconda che A sia indipendente da B (A, B sono parallele) oppure A viene prima di B o infine B precede A .

Il ricorso agli ordini parziali comporta il dover affrontare i seguenti problemi:

1. *Entropia*: dobbiamo sempre essere in grado di sostituire un ordine parziale con un ordine più debole, o viceversa, con un ordine più forte; ad esempio dobbiamo essere in grado di sostituire un sequente totalmente ordinato con un sequente che contenga, le stesse occorrenze di formule, ma disordinato.
2. *Contesto*: ci sono delle difficoltà nell'isolare una formula da un contesto: dobbiamo scrivere $\vdash A, \Gamma$, oppure $\vdash \Gamma, A$? Dobbiamo dire che, ad esempio, nel primo caso A precede Γ oppure sono indipendenti?
3. *Ciclicità*: dal momento che il frammento del calcolo dei sequenti puramente non commutativo è ciclico, un sistema misto dovrebbe consentire una qualche forma di ciclicità, che permetterebbe di muovere una formula A dalla sinistra alla destra di un sequente.

L'approccio alla *non commutatività* assunto nel presente lavoro, propone le seguenti soluzioni ai problemi esposti sopra.

Varietà d'ordine — Le varietà d'ordine sono delle strutture che possono essere presentate mediante ordini parziali in molteplici modi. Una buona analogia è pensare ad un ciclo orientato che diventa ordine totale non appena viene fissato un punto come origine



Figura 1.1: Ciclo orientato e ordine totale

Una proprietà essenziale delle varietà d'ordine è quella che permette sempre di isolare un punto in un sequente $\vdash \Gamma$ strutturato da una varietà d'ordine. Ad esempio, se isoliamo $A \in \Gamma$, allora il contesto residuo Γ' diviene un ordine parziale, che può essere rappresentato in tre differenti ordini parziali, a seconda che A *preceda*, *segua* o sia *indipendente* da tutte le altre occorrenze di formule in Γ' . Il punto è che queste tre diverse rappresentazioni sono in sostanza equivalenti se *dimentichiamo* A . Questo processo che consente di isolare da una varietà d'ordine un punto e poi di riattaccarlo è completamente reversibile, nel senso che la composizione di queste due operazioni di scollatura e incollatura restituisce la varietà d'ordine iniziale.

Una classe particolare di varietà d'ordine di cui parleremo, è quella rappresentata dalle varietà d'ordine *seriali-parallele*, cioè varietà d'ordini che hanno, sempre, almeno una presentazione mediante un ordine parziale seriale-parallelo.

Entropia — La definizione di entropia è la semplice relazione di inclusione tra varietà d'ordini. Se pensiamo alle presentazioni seriali-parallele delle varietà di ordini, le cose sono un po' più complesse. In generale l'entropia tra presentazioni seriali-parallele equivale all'idea di sostituire una composizione seriale in un ordine con una parallela. E' impossibile però esprimere l'entropia tra gli ordini seriali-paralleli come semplice inclusione tra ordini: le due congiunzioni (quella commutativa e quella non commutativa) collaserebbero in una stessa congiunzione, e sarebbero quindi equivalenti.

Esponenziali — Per le formule esponenziali ci sono delle scelte da fare:

1. le formule interrogate di tipo $?A$ non commutano in situazioni non commutative, il che vuol dire interdire regole come la seguente

$$\frac{\vdash \Gamma[?A, B]}{\vdash \Gamma[B, ?B]}$$

in cui la virgola “,” nel sequente stia intuitivamente per una relazione d'ordine tra le due occorrenze di formule nel sotto-contesto del sequente racchiuso tra parentesi quadre. Questa ipotesi è stata investigata da Demaille in [12];

2. solo particolari gruppi di esponenziali commutano tra loro;
3. gli esponenziali sono *centrali*, cioè, commutano con tutte le occorrenze di formule di un sequente.

Noi seguiremo la terza via, che consente di preservare un maggior numero di isomorfismi.

Calcolo dei Sequenti — Ci sono due modi equivalenti di formulare un calcolo dei sequenti per NL:

- considerando gli ordini seriali-paralleli;
- considerando le varietà d'ordine seriali-parallele.

Noi seguiremo la formulazione del Calcolo dei sequenti basato sulla varietà d'ordini. Tale calcolo ha il vantaggio di avere una regola di entropia molto semplice.

Un frammento notevole di NL è quello puramente moltiplicativo MNL. Discuteremo una particolare formulazione di MNL usata in [3], che non fa uso

della regola esplicita di entropia. Questo calcolo è importante perchè risulta strettamente connesso alle reti dimostrative.

1.2 Varietà d'ordine

Definizione 1.1 (Varietà d'ordine) *Sia X un insieme. Una varietà d'ordine su X è una relazione ternaria α che risulta essere*

- **ciclica:** $\forall x, y, z \in X, \alpha(x, y, z) \Rightarrow \alpha(y, z, x)$
- **antiriflessiva:** $\forall x, y \in X, \neg \alpha(x, x, y)$
- **transitiva:** $\forall x, y, z, t \in X, \alpha(x, y, z) \wedge \alpha(z, t, x) \Rightarrow \alpha(y, z, t)$
- **ripartita:** $\forall x, y, z, t \in X, \alpha(x, y, z) \Rightarrow \alpha(t, y, z) \vee \alpha(x, t, z) \vee \alpha(x, y, t)$.

Osservazione 1.1 .

1. Una varietà d'ordine α è totale quando $\forall x, y, z \in X, x \neq y \neq z \neq x \Rightarrow \alpha(x, y, z)$ or $\alpha(z, y, x)$.
Se α è una varietà d'ordine totale, allora $\alpha(x, y, z)$ può essere letta come "y è tra x e z"
2. Una varietà d'ordine α induce una relazione binaria \rightarrow_α su X , e diremo $x \rightarrow_\alpha y$ se e solo se $\forall z \in X, z \neq x$ and $z \neq y \Rightarrow \alpha(x, y, z)$.
Si osservi come se α è totale allora \rightarrow_α induce un ciclo orientato.
3. La varietà d'ordine vuota su X è indicata con \emptyset_X
4. La chiusura ciclica di $\{a, b, c\}$ non è una varietà d'ordine su $\{a, b, c, d\}$, perchè non è ripartita (Definizione 1.1, condizione 4).

Data una varietà d'ordine α su X si ha sempre la possibilità di "isolare" un punto $x \in X$. Ciò implica il passaggio da un ordine ternario ad uno binario, col vantaggio di fare le solite operazioni binarie, per poi tornare all'ordine ternario, modificato. La prossima definizione formalizza quanto appena detto.

Definizione 1.2 (isolamento) . *Data una varietà d'ordine α su X e $x \in X$, possiamo definire un ordine parziale α_x su $X \setminus \{x\}$ come $\alpha_x(y, z)$ se e solo se $\alpha(x, y, z)$.*

Viceversa, dato un ordine stretto (X, ω) e $z \in X$, sia $\overset{z}{<}_\omega$ la seguente relazione binaria: $x \overset{z}{<}_\omega y$ se e solo se $x <_\omega y$ e z non è confrontabile con x nè con y . Allora, possiamo definire la varietà d'ordine $\overline{\omega}$ su X nel modo seguente: $\overline{\omega}(x, y, z)$ se e solo se

$$\begin{array}{l} x <_\omega y <_\omega z \quad \vee \quad y <_\omega z <_\omega x \quad \vee \quad z <_\omega x <_\omega y \quad \vee \\ x \overset{z}{<}_\omega y \quad \vee \quad y \overset{x}{<}_\omega z \quad \vee \quad z \overset{y}{<}_\omega x. \end{array}$$

In [45], si mostra immediatamente che se α è una varietà d'ordine su X e $x \in X$ allora α_x è un ordine parziale su $X \setminus \{x\}$ che è detto l'*ordine indotto da α e x* .

Viceversa, se $(X, <)$ è un ordine parziale e $z \in X$ allora $\overline{<}$ è la varietà d'ordine su X .

Il processo di isolamento di un punto del supporto di una varietà d'ordine, è *reversibile*, nel senso che: se ω è uno dei seguenti ordini su X :

$$(\alpha_a \parallel a) \vee (\alpha_a < a) \vee (a < \alpha_a)$$

allora $\overline{\omega} = \alpha$.

Il processo di isolamento di un punto del supporto di una varietà d'ordine ha il suo contrario nell'*operazione di incollatura* di un punto al supporto considerato. In generale, però, potremmo trovarci nella situazione più generale di poter incollare strutture invece di punti isolati con delle strutture.

Definizione 1.3 (incollatura) *La varietà d'ordine associata ad un ordine parziale soddisfa la seguente proprietà: se (X_1, ω_1) e (X_2, ω_2) sono due ordini su insiemi disgiunti X_1 e X_2 , allora $\overline{\omega_1 < \omega_2} = \omega_1 \parallel \omega_2 = \overline{\omega_2 < \omega_1}$. Definiamo l'incollatura $*$ di due ordini ω, τ nel modo seguente:*

$$\omega * \tau = \overline{\omega < \tau} = \overline{\overline{\omega} \parallel \tau} = \overline{\tau < \omega}$$

L'operazione di incollatura ci permette di definire una varietà d'ordine α come l'incollatura dell'ordine indotto su α dall'isolamento di un punto x del suo supporto $|\alpha| = X$, con il punto stesso.

Questi processi di isolamento (scollatura) ed incollatura di strutture ordinate gioca un ruolo centrale quando studieremo più avanti le proprietà di localizzazione e focalizzazione delle formule in un sequente.

1.2.1 Caratterizzazione delle varietà di ordini seriali-parallele

Ordini seriali-paralleli

La classe degli ordini seriali-paralleli è definita da Mohring ([39], 1989) come la più piccola classe degli ordini finiti che contengono il vuoto e i singoletti e chiusa sotto composizioni seriali e parallele così definite.

Dati due ordini ω, σ su insiemi disgiunti, X, Y , chiameremo, *seriale* la composizione $\omega < \sigma$ e *parallela* la composizione $\omega \parallel \sigma$. Queste composizioni inducono rispettivamente sull'insieme $X \uplus Y$ ordini tali che:

- $(\omega < \sigma)(x, y) \Leftrightarrow x <_{\omega} y \vee x <_{\sigma} y \vee (x \in X \wedge y \in Y)$
- $(\omega \parallel \sigma)(x, y) \Leftrightarrow x <_{\omega} y \vee x <_{\sigma} y$

Varietà di ordini seriali-parallele

Come per gli ordini stretti definiamo la classe delle varietà d'ordine seriali-paralleli, su cui è basato il calcolo dei sequenti della l'ultima sezione del presente Capitolo.

Consideriamo due prodotti sulle varietà d'ordine che corrispondono nel calcolo dei sequenti ai due modi, commutativo e non-commutativo, di combinare i contesti mediante il prodotto tensoriale.

Definizione 1.4 (prodotti seriali-paralleli) *Date due varietà d'ordine α e β sugli insiemi X ed Y rispettivamente, con $X \cap Y = \{x\}$, allora:*

$$\alpha \odot_x \beta = \overline{\alpha_x < x < \beta_x} = (\beta_x < \alpha_x) * x$$

$$\alpha \otimes_x \beta = \overline{\alpha_x \parallel x \parallel \beta_x} = (\beta_x \parallel \alpha_x) * x$$

Come esempio, si considerino le varietà d'ordine \emptyset_X, \emptyset_Y sugli insiemi disgiunti, rispettivamente X, Y con $X \cap Y = \{x\}$, allora

$$\emptyset_X \otimes_x \emptyset_Y = \emptyset_{X \cup Y} \quad \text{mentre} \quad \emptyset_X \odot_x \emptyset_Y \neq \emptyset_{X \cup Y}$$

Fatti 1.1 *Siano α e β varietà d'ordine sugli insiemi X ed Y , con $X \cap Y = \{x\}$, e sia $y \in X \setminus \{x\}$, $z \in Y \setminus \{x\}$, allora*

$$\begin{aligned} (\alpha \odot_x \beta)_x &= \beta_x < \alpha_x & (\alpha \otimes_x \beta)_x &= \beta_x \parallel \alpha_x \\ (\alpha \odot_x \beta)_y &= \alpha_y[x/(x < \beta_x)] & (\alpha \otimes_x \beta)_y &= \alpha_y[x/(x \parallel \beta_x)] \\ (\alpha \odot_x \beta)_z &= \beta_z[x/(\alpha_x < x)] & (\alpha \otimes_x \beta)_z &= \beta_z[x/(\alpha_x \parallel x)] \end{aligned}$$

Definizione 1.5 . Dato un insieme X , la più piccola classe di varietà d'ordine che contiene le varietà d'ordine $\emptyset_{\{a\}}$ e $\emptyset_{\{a,b\}}$ su singoletti e coppie, ($a, b \in X$), e chiusa sotto $\odot_x \otimes_x$, è detta la classe delle varietà d'ordini seriale-parallela su X .

Proposizione 1.1 .

- (i) - Se α è una varietà d'ordine seriale-parallela su un insieme non vuoto X e $x \in X$, allora α_x è seriale parallela su $X \setminus \{x\}$
- (ii) - Una varietà d'ordine α su un insieme non vuoto X , è seriale-parallela se e solo se esiste un ordine seriale-parallelo ω tale che $\alpha = \overline{\omega}$.

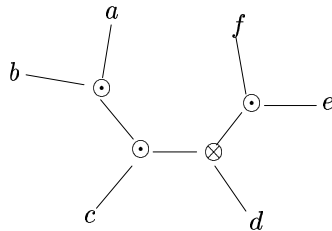
Una dimostrazione della Proprietà 1.1 è data in [45].

Osservazione 1.2 . In generale, presa una varietà d'ordine seriale-parallela α allora non è detto che per ogni ordine ω tale che $\alpha = \overline{\omega}$, ω sia seriale parallelo. Infatti, basta considerare:

$$\alpha = \overline{a < (b|c) < d} = \overline{N(a, b, c, d)}$$

Esempio 1.1 . La proprietà 1.1 su menzionata, assieme alla proprietà di incollatura 1.3, consente di visualizzare varietà di ordini seriali-paralleli su un insieme X come alberi privi di radice (detti anche alghe) le cui foglie sono rappresentate dagli elementi di X e i cui nodi sono etichettati da \otimes oppure \odot .

L'ordine seriale parallelo $\overline{(c < b < a) || d(f < e)}$ può essere rappresentato come il seguente albero senza radice

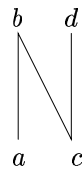


Tre punti, ad esempio (a, b, c) sono nella varietà di ordini considerata se e solo se:

- i tre cammini ab, bc, ca hanno intersezione in uno stesso nodo etichettato con \odot ;
- i cammini $a\bullet, b\bullet, c\bullet$ sono in questo esatto ordine ciclico dato dal movimento in senso orario attorno al fissato nodo \odot ;

In generale la rappresentazione ad albero (senza radice) dell'ordine ω che corrisponde ad una varietà di ordini seriale parallela fissata $\alpha = \bar{\omega}$, in generale non è unica. Ciò dipende dalla associatività parziale \odot e dalla associatività e commutatività di \otimes . Vedremo, più avanti, parlando della rappresentazione di un ordine seriale-parallelo come sia possibile "quoziante" l'insieme di tali rappresentazioni-alberi, in maniera tale da avere un risultato che sia unico, indipendente dalla rappresentazione fatta: per fare ciò, ci servirà definire una relazione di equivalenza su ordini seriali-paralleli, in modo da poter definire classi di equivalenze.

E' possibile caratterizzare gli ordini seriale-paralleli come ordini su insiemi finiti X le cui restrizioni¹ a sottoinsiemi qualunque di 4 elementi $\{a, b, c, d\}$ sono sempre differenti dall'ordine $N(a, b, c, d) = \{(a, b), (c, b), (c, d)\}$



E' possibile, altresì, dare una caratterizzazione analoga delle varietà di ordini seriali-parallele.

Definizione 1.6 . $G(a, b, c, d, e)$ denota la relazione ternaria $(a, b, d) \cup (a, c, d) \cup (c, b, e) \cup (c, d, e) \cup (a, b, e)$. $G(a, b, c, d, e)$ è una varietà d'ordine tale che $G(a, b, c, d, e)_e = N(a, b, c, d)$ non è seriale parallela (per la proprietà 1.1). Diremo, allora, che $G(a, b, c, d, e)$ non è una varietà di ordini seriale parallela.

Proposizione 1.2 . Sia α una varietà d'ordine su un insieme finito non vuoto X . Allora le seguenti espressioni sono equivalenti:

- (i) - α è seriale-parallela;
- (ii) - esiste un ordine seriale parallelo ω su X tale che $\bar{\omega} = \alpha$;
- (iii) - la restrizione di α ad un qualsiasi sottoinsieme di 5 elementi $\{a, b, c, d, e\}$ di X è differente da $G(a, b, c, d, e)$.

Fatti 1.2 (Fatti sulle restrizioni) .

- (i) - Se ω è un ordine su X e $X \subseteq Y$, allora, $(\bar{\omega}) \upharpoonright_Y = \overline{\omega \upharpoonright_Y}$;

¹Se α è una varietà d'ordine su un insieme X ed $Y \subseteq X$, allora la restrizione $\alpha \upharpoonright_Y$ di α ad Y è la varietà d'ordine (come insieme di triple) su Y .

(ii) - α è una varietà di ordini su un insieme X e $Y \subseteq X$, allora la restrizione $\alpha|_Y$ è una varietà di ordini su Y . Se $Y \neq \emptyset$ e α è seriale-parallela allora anche $\alpha|_Y$ è seriale-parallela.

(iii) - se α è una varietà di ordini su $X \uplus \{x\}$ con $x \notin X$ allora $\alpha|_X = \overline{\alpha_x}$.

Per una dimostrazione della Proposizione 1.2 e dei Fatti 1.2 si veda [45].

1.2.2 Altalena ed Entropia

In questa sezione cercheremo di rispondere alla questione "quando due ordini seriali-paralleli sono equivalenti". Mostreremo che l'equivalenza di due ordini seriali-paralleli si ha quando le rispettive varietà seriali-parallele sono anch'esse equivalenti. L'equivalenza tra ordini è dovuta alla regola che chiameremo dell'altalena ("seesaw").

Definizione 1.7 (Altalena) \sim è la relazione di equivalenza tra ordini parziali sullo stesso insieme definita da

$$\omega \sim \sigma \text{ se e solo se } \overline{\omega} = \overline{\sigma}$$

La restrizione di \sim agli ordini seriali-paralleli è la minima relazione di equivalenza tra ordini seriali-paralleli sullo stesso insieme tale che

$$(\omega_1 \parallel \omega_2) \sim (\omega_1 < \omega_2)$$

Definizione 1.8 (Entropia) \trianglelefteq è la relazione sull'insieme di tutti gli ordini parziali, per un fissato insieme, definita da

$$\omega \trianglelefteq \sigma \text{ se e solo se } \omega \subseteq \sigma \wedge \overline{\omega} \subseteq \overline{\sigma}$$

Per la relazione \trianglelefteq valgono i seguenti fatti.

Fatti 1.3 (sull'entropia) . La relazione di entropia \trianglelefteq è tale che

- (i) - \trianglelefteq è un ordine parziale;
- (ii) - è compatibile con le restrizioni di ordini;
- (iii) - è compatibile con le composizioni \parallel e $<$ di ordini parziali;
- (iv) - è compatibile con l'incollatura di ordini, cioè, se $\omega \trianglelefteq \omega'$ e $\sigma \trianglelefteq \sigma'$, allora $\omega * \sigma \subseteq \omega' * \sigma'$.

Più in generale, l'inclusione di varietà di ordini sullo stesso insieme, equivale all'entropia tra gli ordini indotti dall'operazione di isolamento fatta su per entrambe le varietà sullo stesso punto. In altre parole, l'entropia tra varietà di

ordini equivale all'entropia tra due ordini stretti indotti per isolamento dalle rispettive varietà: questi ordini stretti esistono sempre, anche se in generale la loro esistenza non è unica. In più, si mostra che l'entropia, se ristretta ai soli ordini seriali-paralleli è la più piccola relazione transitiva e riflessiva tale che fa passare da un ordine all'altro togliendo rigidità alla struttura del primo. Intuitivamente potremmo dire che mentre la regola dell'altalena permette di passare di aumentare la rigidità di un ordine aumentare il grado di congelamento o rigidità di un ordine, l'entropia, viceversa, ne provoca il discioglimento.

Proprietà 1.1 (dell'entropia) *Siano α, β due varietà di ordini, entrambe su X , con $x \in X$, allora:*

1. $\alpha \subseteq \beta$ se e solo se $\alpha_x \trianglelefteq \beta_x$
2. $\omega[\omega_1 \parallel \omega_2] \trianglelefteq \omega[\omega_1 < \omega_2]$
3. esistono ordini parziali ω e σ su X , tali che $\alpha = \bar{\omega}$ e $\beta = \bar{\sigma}$
4. la restrizione dell'entropia \trianglelefteq agli ordini seriali-paralleli è la più piccola relazione riflessiva e transitiva tra ordini seriali-paralleli definiti sullo stesso insieme, tale che la 2 vale.
5. gli ordini parziali ω tali che $\omega \trianglelefteq N(a, b, c, d)$ sono

$$N(a, b, c, d) \quad a < c < b < d \quad c < d < a < b < c$$

Per una dimostrazione della Proprietà 1.1, si veda [45].

1.3 Calcolo dei Sequenti

Ci sono essenzialmente due modi (dimostrati equivalenti da Ruet in [45]) di presentare un calcolo dei sequenti per la logica non-commutativa: si può ricorrere direttamente agli ordini oppure alle varietà d'ordine seriali-parallele. Di seguito noi presentiamo il calcolo dei sequenti basato su quest'ultime. Il nostro intento è quello di studiare la costruzione focalizzata delle dimostrazioni di NL, e le varietà d'ordine sembrano meglio rendere conto delle proprietà di focalizzazione. Lavorando con la varietà d'ordine seriali-parallele è possibile esprimere la focalizzazione sulle prove sfruttando la focalizzazione (isolamento) su una formula (il focus) del sequente interpretato da una varietà d'ordine.

Definizione 1.9 (Sequenti di NL) . Un sequente $\vdash \Theta : \alpha$ è composto da una varietà d'ordine α di occorrenze di formule e da un insieme (privo di struttura) Θ di formule interrogate (con prefisso $?$). E' necessario che Θ sia disgiunto dal supporto della varietà, $|\alpha|$.

Intuitivamente, possiamo pensare ad un sequente della logica non commutativa come composto di due parti, separate dal simbolo ":",. Chiameremo un sequenti così composti, "diadici", seguendo la terminologia introdotta da Jean-Mrac Andreoli ([4, 5]). L'idea di separare una parte (insieme) di formule interrogate con $?$ rispetto al resto del contesto caratterizzato da una varietà d'ordine, viene dall'idea, così detta, della "centralità degli esponenziali", e cioè, l'idea che le formule interrogate $?F$ commutano con tutto il resto, lasciando il contesto (ordine) residuo inalterato.

In altre parole, dato un contesto α su X , posso sempre pensare di estendere tale contesto α , introducendo una nuova formula interrogata $?A$; tale estensione corrisponderà a considerare α' su l'insieme così esteso, in maniera tale che $\alpha = \alpha' \upharpoonright_X$.

Le regole del calcolo dei sequenti sono date nella Tavola 1.1. Tutte le varietà d'ordine considerate dal calcolo sono seriali-parallele; in particolare, nella regola per del \perp ("bottom") l'ordine ω sottostante $\bar{\omega}$ è seriale-parallela; nella regola dell'entropia, α è una varietà d'ordine seriale-parallela.

Esempi 1.1 (Dimostrazioni di NL) .

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\overline{\vdash : A^\perp * A}}{\vdash A^\perp : A} \text{ centro}}{\vdash A^\perp, B^\perp : A} \text{ indebolimento} \quad \frac{\frac{\overline{\vdash : B^\perp * B}}{\vdash B^\perp : B} \text{ centro}}{\vdash B^\perp, A^\perp : B} \text{ indebolimento}}{\vdash A^\perp, B^\perp : A \& B} \& \\
\frac{\frac{\vdash A^\perp, B^\perp : A \& B}{\vdash A^\perp, B^\perp : !(A \& B)} !}{\vdash : !(A \& B) * (!A^\perp < !B^\perp)} \text{ abbandono} \\
\frac{\vdash : !(A \& B) * !A^\perp \nabla !B^\perp}{\vdash : !(A \& B) * !A^\perp \nabla !B^\perp} \nabla \\
\\
\frac{\frac{\overline{\vdash : A * A^\perp}}{\vdash : A * B^\perp \oplus A^\perp} \oplus}{\vdash ?(B^\perp \oplus A^\perp) : A} \text{ centro} \quad \frac{\frac{\overline{\vdash : B * B^\perp}}{\vdash : B * B^\perp \oplus A^\perp} \oplus}{\vdash ?(B^\perp \oplus A^\perp) : B} \text{ centro}}{\vdash ?(B^\perp \oplus A^\perp) : !A} ! \quad \frac{\vdash ?(B^\perp \oplus A^\perp) : !B}{\vdash ?(B^\perp \oplus A^\perp) : !B} ! \\
\frac{\vdash ?(B^\perp \oplus A^\perp), ?(B^\perp \oplus A^\perp) : !A \odot !B}{\vdash ?(B^\perp \oplus A^\perp) : !A \odot !B} \text{ contrazione} \odot
\end{array}$$

Identità

$$\frac{}{\vdash A^\perp * A} \text{Identità}$$

Taglio

$$\frac{\frac{\vdash \Theta : \omega * A \quad \vdash \Theta' : \omega' * A^\perp}{\vdash \Theta, \Theta' : \omega * \omega'}}{\vdash \Theta, \Theta' : \omega * \omega'} \quad \frac{\frac{\vdash \Theta, A : \alpha \quad \vdash \Theta' : !A^\perp}{\vdash \Theta, \Theta' : \alpha}}{\vdash \Theta, \Theta' : \alpha}}$$

Strutturali

$$\frac{\frac{\vdash \Theta : \omega * A}{\vdash \Theta, A : \bar{\omega}} \text{centro}}{\vdash \Theta, A : \bar{\omega}} \quad \frac{\frac{\vdash \Theta : \beta}{\vdash \Theta : \alpha} \text{entropia } \alpha \subseteq \beta}{\vdash \Theta : \alpha}}$$

Moltiplicativi

$$\frac{\frac{\frac{\vdash \Theta : \omega * A \quad \vdash \Theta' : \omega' * B}{\vdash \Theta, \Theta' : (\omega < \omega') * A \odot B} \odot}{\vdash \Theta, \Theta' : (\omega < \omega') * A \odot B} \odot}{\vdash \Theta : \omega * (A < B)} \nabla \quad \frac{\frac{\frac{\vdash \Theta : \omega * A \quad \vdash \Theta' : \omega' * B}{\vdash \Theta, \Theta' : (\omega \parallel \omega') * A \otimes B} \otimes}{\vdash \Theta, \Theta' : (\omega \parallel \omega') * A \otimes B} \otimes}{\vdash \Theta : \omega * (A \parallel B)} \wp$$

Additivi:

$$\frac{\frac{\frac{\vdash \Theta : \omega * A \quad \vdash \Theta : \omega * B}{\vdash \Theta : \omega * A \& B} \&}{\vdash \Theta : \omega * A \& B} \&}{\vdash \Theta : \omega * A \oplus B} \oplus_1 \quad \frac{\frac{\vdash \Theta : \omega * B}{\vdash \Theta : \omega * A \oplus B} \oplus_2}{\vdash \Theta : \omega * A \oplus B} \oplus_2$$

Esponenziali

$$\frac{\frac{\frac{\vdash \Theta : A}{\vdash \Theta : !A} !}{\vdash \Theta : !A} !}{\vdash \Theta : !A} ! \quad \frac{\frac{\frac{\vdash \Theta, A, A : \alpha}{\vdash \Theta, A : \alpha} \text{contrazione}}{\vdash \Theta, A : \alpha} \text{contrazione}}{\vdash \Theta, A : \alpha} \text{contrazione}$$

$$\frac{\frac{\frac{\vdash \Theta : \alpha}{\vdash \Theta, A : \alpha} \text{indebolimento}}{\vdash \Theta, A : \alpha} \text{indebolimento}}{\vdash \Theta, A : \alpha} \text{indebolimento} \quad \frac{\frac{\frac{\vdash \Theta, A : \bar{\omega}}{\vdash \Theta : \omega * ?A} \text{abbandono}}{\vdash \Theta, A : \bar{\omega}} \text{abbandono}}{\vdash \Theta : \omega * ?A} \text{abbandono}$$

Costanti

$$\frac{}{\vdash \Theta : \omega * \perp} \mathbf{1} \quad \frac{\frac{\vdash \Theta : \bar{\omega}}{\vdash \Theta : \omega * \perp} \text{nessuna regola per } \mathbf{0}}{\vdash \Theta : \omega * \perp} \text{nessuna regola per } \mathbf{0} \quad \frac{}{\vdash \Theta : \omega * \top}$$

Tabella 1.1: Calcolo dei sequenti non-commutativo Σ

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{}{\vdash: A^\perp * A}{} \quad \frac{}{\vdash: B^\perp * B}{} \odot}{\vdash: (B^\perp < A^\perp) * A \odot B} \text{entropia}}{\vdash: (B^\perp \parallel A^\perp) * A \odot B} \mathfrak{A}}{\vdash: A \odot B * B^\perp \mathfrak{A} A^\perp} \\
\frac{\frac{\frac{}{\vdash: A^\perp * A}{} \quad \frac{}{\vdash: B^\perp * B}{} \odot}{\vdash: (B^\perp < A^\perp) * A \odot B} \text{entropia}}{\vdash: A \odot B * B^\perp \nabla A^\perp} \nabla
\end{array}$$

1.3.1 Il frammento moliplicativo

Un frammento molto importante sul quale lavoreremo abbondantemente in seguito, è quello rappresentato dal frammento puramente moltiplicativo Σ_{mnl} (Tavola 1.2), studiato in [3]. Si tratta di un calcolo privo di regole per le costanti moltiplicative e della regola esplicita dell'entropia. L'assenza di queste regole permette l'interpretazione del calcolo dei sequenti Σ_{mnl} direttamente nelle Reti Dimostrative (si veda il Capitolo 3).

La logica non-commutativa rappresenta un raffinamento della logica (commutativa classica), e questo raffinamento coinvolge essenzialmente i connettivi moltiplicativi $d\otimes$ e par \mathfrak{A} . Il frammento moltiplicativo rappresenta in un certo senso il cuore della logica non-commutativa e in particolare esso coincide essenzialmente con la classe delle varietà d'ordine seriali-parallele. Prima di introdurre il calcolo dei sequenti Σ_{mnl} , introduciamo alcune operazioni, come quello dell'*identificazione i due punti* in una varietà d'ordine, che consente di mostrare l'equivalenza di Σ_{mnl} rispetto a Σ .

Definizione 1.10 (inf di ordini e varietà di ordini) .

1. Se \wedge un'operazione commutativa e associativa su varietà d'ordine α_i definiamo la più grande varietà d'ordine inclusa in tutte le varietà α_i come

$$\bigwedge \alpha_i$$

2. Se \wedge è un'operazione commutativa e associativa su ordini parziali ω_i per $i \in I$ ordini parziali su X . Definiamo

$$\bigwedge \omega_i = (\bigwedge \omega_i * x)_x$$

per $x \notin X$; come il più grande ordine ω rispetto alla relazione di entropia \trianglelefteq tale che $\omega \trianglelefteq \omega_i$ per tutti gli $i \in I$

Osservazione 1.3 Date due varietà d'ordine (due ordini parziali) non è detto che esista sempre il **sup**, cioè la varietà (l'ordine) più piccola che include (risp., \trianglelefteq) le due date varietà (risp., i due ordini parziali). Si considerino, infatti, le varietà $\alpha = (a < b) \parallel c$ e $\beta = (b < a) \parallel c$, per le quali non esiste,

ovvianete alcuna varietà d'ordine che le includa entrambe. Analogamente non esiste un ordine ω più grande per entropia \trianglelefteq di α_c e β_c .

Fatti 1.4 (sull'inf) .

1. Se $Y \subseteq |\alpha_i|$ allora $(\bigwedge \alpha_i) \upharpoonright_Y \subseteq \bigwedge \alpha_i \upharpoonright_Y$;
2. Se $Y \subseteq |\omega_i|$ allora $(\bigwedge \omega_i) \upharpoonright_Y \trianglelefteq \bigwedge \omega_i \upharpoonright_Y$;
3. L'inf di commuta con l'isolamento, $(\bigwedge \alpha_i)_x = \bigwedge (\alpha_i)_x$ per ogni $x \in |\alpha_i|$;
4. L'inf commuta con l'incollatura, $(\bigwedge \omega_i) * x = \bigwedge (\omega_i * x)$;
5. $(\bigwedge \omega_i) * (\bigwedge \tau_j) = \bigwedge (\omega_i * \tau_j)$.

Osservazione 1.4 (sull'inf) .

1. α e β possono, in generale, essere seriali parallele, senza che $\alpha \wedge \beta$ lo sia. Esempio: si considerino le varietà d'ordine totali $\alpha = (a, c, b, d, e)$ e $\beta = (a, b, e, c, d)$. Allora $\alpha \wedge \beta = \alpha \cap \beta = G(a, b, c, d, e)$
2. Analogamente, in generale dati due ordini seriali-paralleli ω, σ allora $\omega \wedge \sigma$ può non essere seriale-parallelo. Esempio:
 $(c < d < a < b) \wedge (a < c < b < d < e)$ per definizione 1.10 è:
 $= ((c < d < a < b) * e \wedge (a < c < b < d < e) * e)$
 $= ((a, b, e, c, d) \wedge (a, c, b, d, e))_e$
 $= G(a, b, c, d, e)_e$
 $= N(a, b, c, d)$

Definizione 1.11 (Identificazione di due punti) . Sia α una varietà d'ordine sull'insieme $X \uplus \{x, y\}$, con $x, y \notin X$ e $z \notin X$. L'identificazione $\alpha[z/x, y]$ di x e y con z in α , è data da

$$\alpha[z/x, y] = \alpha \upharpoonright_{X \uplus \{x\}} [z/x] \wedge \alpha \upharpoonright_{X \uplus \{y\}} [z/y]$$

Lemma 1.1 .

1. $\alpha[z/x, y]_z = (\overline{\alpha_x})_y \wedge (\overline{\alpha_y})_x$;
2. $\alpha[z/x, y]_z * (x \parallel y) \subseteq \alpha$;
3. se ω è un ordine seriale-parallelo su X tale che $\omega * (x \parallel y) \subseteq \alpha$, allora $\omega * (x \parallel y) \subseteq \alpha[z/x, y]_z * (x \parallel y)$, o equivalentemente, per la Proprietà 1.1, $\omega \trianglelefteq \alpha[z/x, y]_z$;

Identità e Taglio

$$\frac{}{\vdash A^\perp * A} \text{identità} \qquad \frac{\vdash \alpha_A * A \quad \vdash \alpha_A^\perp * A^\perp}{\vdash \alpha_A * \alpha_{A^\perp}} \text{taglio}$$

Regole Moltiplicative

$$\frac{\vdash \alpha_A * A \quad \vdash \alpha_B * B}{\vdash (\alpha_B < \alpha_A) * A \odot B} \odot \qquad \frac{\vdash \alpha_A * A \quad \vdash \alpha_B * B}{\vdash (\alpha_A \parallel \alpha_B) * A \otimes B} \otimes$$

$$\frac{\vdash \alpha[A, B]}{\vdash \alpha[A \nabla B / A, B]} \nabla, A \rightarrow_\alpha B \qquad \frac{\vdash \alpha[A, B]}{\vdash \alpha[A \wp B / A, B]} \wp^*$$

Tabella 1.2: Frammento moltiplicativo non-commutativo Σ_{mnl}

4. *L'inclusione è compatibile con l'identificazione di varietà d'ordine;*
5. *se α è seriale-parallela, allora o sarà anche $\alpha[z/x, y]$.*

Una dimostrazione del lemma precedente si trova in [45].

L'identificazione gioca un ruolo fondamentale nel porcesso di incollatura di due punti del supporto di una varietà d'ordine. Tipicamente, questo è ciò che avviene con l'uso delle due regole binarie \wp, ∇ del calcolo dei sequenti presentato nella Tavola 1.2. In tale calcolo usiamo le definizioni di composizioni o prodotti tensoriali seriali-paralleli dati nella definizione 1.4. Si osservi come non venga richiesta alcuna specifica condizione d'ordine sulle premesse della disgiunzione commutativa (lineare) \wp .

Seguedno [3], si può sempre associare ad una dimostrazione π in Σ_{mnl} con tagli, una dimostrazione equivalente dello stesso sequente di π "cut-free".

Si può sempre trasformare una dimostrazione π di un sequente con una varietà d'ordine α in Σ_{mnl} in una dimostrazione equivalente dello stesso sequente di Σ . Ciò può essere fatto per induzione sulla data dimostrazione di Σ_{mnl} . La dimostrazione non presenta nessuna difficoltà e la omettiamo. L'unico caso degno di nota è quando la dimostrazione π di Σ_{mnl} termina con una istanza della regola \wp^*

$$\pi \frac{\frac{\pi'}{\vdash \alpha[A, B]}}{\vdash \alpha[A \wp B/A, B]} \wp \star$$

Per ipotesi di induzione applicata alla dimostrazione π' , esiste una dimostrazione in Σ della stessa varietà $\alpha[A, B]$. Inoltre, per la proprietà 1.11, sappiamo che

$$\alpha[A \wp B/A, B]_{A \wp B} * (A \parallel B) \subseteq \alpha$$

Sarà così sufficiente della semplice entropia pr concludere con una dimostrazione di π in Σ , come segue:

$$\pi \frac{\frac{\frac{\pi'}{\vdash \alpha[A, B]}}{\vdash \alpha[A \wp B/A, B]_{A \wp B} * (A \parallel B)} \text{entropy } (\subseteq)}{\vdash (\alpha[A \wp B/A, B]_{A \wp B} * (A \wp B)) = \alpha} \wp$$

Viceversa, trasformare una prova di moltiplicativa di Σ in una equivalente di Σ_{mnl} pone qualche question. In generale, non sembra a prima vista possibile mappare uan dimostrazione di un sequente con varietà d'ordine α in una dimostrazione "equivalente" in Σ_{mnl} . Cruciale è il senso di questa equivalenza. In effetti dato l'uso di entropia nel calcolo Σ , in generale non sembra possibile ricostruire la medesima varietà d'ordine di partenza nel cacolo corrispondente Σ_{mnl} . In effetti, quello che si dimostra è che si può proiettare una dimostrazione del sequente Γ di Σ in una dimostrazione dello stesso sequente Γ di Σ_{mnl} , ma la cui varietà d'ordine in generale può essere più grande.

In questo modo si riesce per induzione sull'albero della prova a proiettare π di Σ in una dimostrazione dello stesso sequente nel calcolo moltiplicativo Σ_{mnl} .

L'unico caso degno di nota è quando l'ultima regola di π è una \wp -rule. Vorremmo infatti, in tal caso, applicare la corrispondente $\wp \star$ -rule. Via identificazione, usando la proprietà 1.11, è possibile farlo. Vediamo i dettagli. Consideriamo π di Σ con ultima regola una \wp

$$\pi \frac{\frac{\pi'}{\vdash \omega * (A \parallel B)}}{\vdash \omega * A \wp B} \wp$$

per ipotesi di induzione applicata a π' esiste una prova π di Σ_{MNL} tale che $\omega * (A \parallel B) \subseteq \alpha[A, B]$. E' poi sufficiente applicare una istanza della corrispondente regola $\wp \star$ -rule.

La formulazione Σ ha il vantaggio di presentare una regola per la disgiunzione \mathfrak{A} priva di non-determinismo. Cio' sembra coerente con la nostra idea di focalizzazione (vederemo nel prossimo Capitolo) secondo la quale le disgiunzioni lineari o non-commutative sono deterministiche, nel senso che le istanze logiche che le introducono sono completamente determinate.

Questo non-determinismo è, però, pagato in Σ col prezzo della regola di entropia. Quest'ultima è a sua volta causa di indeterminismo nella ricerca della prova.

La soluzione ottimale sarebbe un calcolo dei sequenti che presentasse i vantaggi della formulazione delle regole moltiplicative come appaiono in Σ , senza regola di entropia, ma con regole più raffinate, che permettano di localizzare chiaramente l'indeterminismo delle regole logiche limitandone quanto più possibile gli inconvenienti.

Capitolo 2

Focalizzazione delle prove nel calcolo dei sequenti

2.1 Introduzione

In questo Capitolo discutiamo gli aspetti tecnici del paradigma di costruzione focalizzata delle prove non commutative, di cui abbiamo dato una ampia presentazione nella sezione preliminare del presente lavoro.

Il punto di partenza è l'algoritmo generale di costruzione riprodotto nella Figura 2 della parte introduttiva. L'unica assunzione che faremo è che le dimostrazioni possono essere *incomplete*, aperte, nel senso che possono “terminare” con foglie etichettate con assiomi propri. In pratica, i rami di una dimostrazione identificano i cammini delle esecuzioni mentre le loro foglie aperte (gli assiomi propri) identificano gli stati dei cammini attivi nel processo di costruzione della prova. Come abbiamo già avuto modo di dire, il “più naturale” genere di transizione possibile che può essere effettuata su tali dimostrazioni incomplete è quella dell'espansione di tali rami, che intuitivamente non è altro che un processo che consente di sostituire (innestare) un nuovo sotto-albero al posto di una foglia aperta. Questi nuovi rami a loro volta possono indurre ulteriori *infiorescenze* dell'albero qualora risultino etichettati da nuovi assiomi propri.

Il numero di rami aggiunti al nodo espanso può essere zero¹ oppure uno o più, nel qual caso nuovi cammini vengono creati.

Il processo di costruzione appena menzionato si applica a qualsiasi genere di

¹Ciò corrisponde ad una sorta di abbandono del processo, o di terminazione con successo se rovesciamo il punto di vista in una ottica di costruzione interattiva di una prova.

albero, possibilmente dimostrativo. Il ruolo di un sistema di derivazione, come il calcolo dei sequenti, è proprio quello di definire il criterio di correttezza per quegli alberi che pretendono essere dimostrazioni, riducendo in maniera tale la classe delle costruzioni corrette. Il criterio di correttezza sembra così caratterizzare una forma di “coerenza intrinseca” dei i cammini attivi nel processo di costruzione di una prova.

Il punto, però, cruciale è che sebbene il processo di costruzione delle prove sia essenzialmente basato su passi che hanno “significato logico” (le regole logiche), esso comporta altresì un notevole *non determinismo* “privo di senso”.

Si deve a Jean-Marc Andreoli, nel 1990 ([4, 5]) lo studio di questa forma di non-determinismo limitatamente al frammento commutativo, cioè lineare, della logica. Nella Logica Lineare, così come è stata formulata da Jean-Yves Girard nel 1987, il non determinismo, *sincrono*, è stato introdotto dai connettivi di *polarità positiva* $\mathbf{1}, \otimes, \mathbf{0}, \oplus, \exists$. Viceversa i connettivi *negativi* $\perp, \wp, \top, \forall$, non comportano alcuna forma di indeterminismo e sono pertanto *asincroni*.

Il tentativo di focalizzare l'intero frammento (proposizionale) non-commutativo pone la questione se la proprietà stessa di focalizzazione sia ulteriormente raffinata mediante l'introduzione di nuove polarità, in seguito alla presenza nelle prove di nuove forme di non-determinismo dovute ai nuovi connettivi strettamente non-commutativi (\odot, ∇ ed entropia). Vedremo più avanti (Capitolo 3) che la proprietà di focalizzazione è una proprietà logica stabile, che dipende solo da profonde ragioni di simmetria (geometriche dunque) della logica, e che pertanto deve essere soddisfatta da qualsiasi raffinamento della logica classica. Queste ragioni impediscono il ricorso ad altre polarità oltre quella positiva e negativa.

Le polarità sono estendibili al caso delle formule atomiche, mediante la scelta di una partizione arbitraria di queste ultime. In generale, però, non viene data alcuna operazione di composizione tra le polarità, in altre parole date due occorrenze di formule negative M, N la loro composizione tensoriale $M \otimes N$ è sempre positiva. Sola la dualità inverte la polarità di una data formula anche atomica, cioè, la formula duale di $M \otimes N$ data dalla disgiunzione $M^\perp \wp N^\perp$ sarà negativa anche se le formule che la compongono sono positive. La distinzione di polarità, estesa anche agli atomi gioca un ruolo cruciale, come vedremo, nel trattamento del non-determinismo, che finisce così per avere un trattamento omogeneo o uniforme sia nel caso che si tratti di regole di inferenza logica sia nel caso di regole di identità (assiomi).

Il Calcolo dei Sequenti Focalizzato punta essenzialmente a ridurre quanto più

possibile ogni forma di non determinismo assicurando che da una parte i *passi negativi* vengono effettuati quanto prima possibile, e dall'altro lato, *sequenze di passi positivi*, (blocchi sincroni), vengono eseguiti in una sola volta. Questa alternanza risulta però compromessa dalla presenza delle regole strutturali, in particolare le regole strutturali di indebolimento, contrazione, abbandono ed entropia.

Il porcesso di focalizzazione si articola essenzialmente in tre principali passi di normalizzazione delle prove:

1. normalizzazione delle regole strutturali esponenziali;
2. normalizzazione delle regole logiche;
3. normalizzazione dell'entropia.

Nel presente Capitolo, per ragioni di chiarezza ci limiteremo a mostrare il primo passo di normalizzazione sugli esponenziali (sistema diadico Σ_2 della Tavola 2.1) ed il secondo passo di normalizzazione limitatamente al frammento lineare (sistema Σ_3^c , Tavola 2.2). Il secondo passo è compiuto (nel Capitolo 3) mostrando le rispettive polarità dei nuovi connettivi non-commutativi \odot , ∇ ; infine l'ultimo passo è realizzato (nel Capitolo 4) mediante il trattamento ottimale dell'entropia.

2.1.1 Il Paradigma di costruzione delle prove

Dato un sequente iniziale σ_0 , la procedura **construct** costruisce incrementalmente una dimostrazione π di σ_0 nel seguente modo: inizialmente a π è assegnato un singolo nodo aperto etichettato con un assioma proprio σ_0 , e la procedura **construct**(π, σ_0) è invocata:

Procedura 2.1 (**construct**(π, σ)) . Sia σ un nodo aperto di π :

1. seleziona una istanza di una figura di inferenza del sistema dei sequenti con sequente finale σ e sequenti superiori $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ (con $n \geq 0$);
2. espandi la dimostrazione π al nodo σ con n rami di nuovi nodi aperti etichettati rispettivamente con $\sigma_1, \dots, \sigma_n$;
3. per ciascun $k = 1, \dots, n$, invoca **construct**(π_K, σ_k);

Al passo 3 della procedura **construct**, i nuovi nodi aperti $\{\sigma_k\}_{1 \leq k \leq n}$ possono essere costruiti *simultaneamente*. Questa è una forma di *parallelismo globale*, poichè coinvolge nello stesso tempo, ma separatamente, tutti i rami della

dimostrazione, ed è opposto a al *parallelismo locale* che concerne le *scelte* dentro ogni singolo ramo.

Al passo 1 della procedura, il criterio per la *selezione* di una *figura di inferenza* non è specificato. Possiamo immaginare di esplorare tutte le possibili scelte e di generare tutte le dimostrazioni del sequente iniziale. Sintatticamente tutte queste dimostrazioni sono differenti, dato che provengono da differenti sequenze di applicazioni di figure di inferenza. Ciò nonostante, potrebbe accadere che molte di queste sequenze siano *ridondanti*, perchè l'ordine secondo il quale queste figure di inferenza sono applicate, potrebbe risultare *irrilevante* o potrebbe essere *semplificato*.

In altre parole, le dimostrazioni costruite con la precedente procedura potrebbero essere *equivalenti* nel senso seguente.

Definizione 2.1 (equivalenza delle dimostrazioni) .

Due dimostrazioni sono equivalenti se ciascuna di esse può essere ottenuta dall'altra mediante semplice permutazione delle figure di inferenza o eliminazione/introduzione di cicli inutili. Scriveremo $\pi_1 \Leftrightarrow \pi_2$ per indicare che π_1, π_2 sono equivalenti.

Un punto molto importante che merita un approfondimento è quello dell'equivalenza delle prove non-commutative.

A differenza del semplice caso moltiplicativo lineare, i sequenti non-commutativi, sono delle strutture che oltre a contenere occorrenze di formule del sequente, presentano una struttura data dalla varietà d'ordine associata al sequente. Questo fa sì che non basta solo guardare alle occorrenze di formule di un sequente, ma si deve tenere in notevole considerazione la struttura soggiacente.

- **Uso incontrollato dell'entropia** – In generale, a causa dell'entropia, dato un sequente $\vdash \alpha$ si può sempre considerare il sequente che si ottiene indebolendo per entropia la varietà di partenza, cioè, $\vdash \alpha'$ dove $\alpha' \subseteq \alpha$. Se si guarda adesso all'occorrenza delle formule nulla è cambiato, ma le corrispondenti varietà d'ordine non sono equivalenti.

L'uso "incontrollato" dell'entropia può compromettere il senso stesso dell'equivalenza tra dimostrazioni. Occorre distinguere già a questo livello un uso sensato dell'entropia da un uso per così dire privo di senso computazionale. Consideriamo il caso precedente in cui via entropia si sia passati da una prova di $\vdash \alpha$ and una prova di $\vdash \alpha'$ con $\alpha' \subseteq \alpha$. Con l'entropia ho perso delle informazioni; tale dimenticanza ha senso solo qualora si volesse effettivamente continuare la dimostrazione con

operazioni logiche che richiedono un ordine indebolito: ad esempio non è possibile inferire da $\vdash \omega*(A < B)$ il sequente $\vdash \omega*A\wp B$ senza fare uso di entropia altrimenti tale perdita di informazione non è per così dire rilevante, anzi complica il processo di costruzione della dimostrazione, introducendo notevole non-determinismo. Viceversa ci possono essere lungo l'albero dimostrativo di una prova di NL occorrenze di entropia che indeboliscono una struttura per ragioni non necessarie. Occorrenze del genere possono essere eliminate dalla dimostrazione. Il risultato può indurre dimostrazioni non strettamente equivalenti, le rispettive varietà d'ordine potrebbero essere diverse, senza che il significato logico delle prove sia diverso.

L'equivalenza appare così strettamente connessa all'idea di avere un processo che che dati due oggetti π di $\vdash \alpha$ e π' di $\vdash \alpha'$ dica se i due oggetti hanno lo stesso significato logico anche se diversa complessità. Non sempre, infatti, ad una differenza di complessità corrisponde una differenza di significato logico. Siamo interessati a cercare la più piccola classe di oggetti non-commutativi semplici (normali).

- **Permutazioni di inferenze in una dimostrazione** – Dal punto di vista della procedura di costruzione, le due regole di sotto R_1 ed R_2 potrebbero essere selezionate *simultaneamente* al passo 1 della procedura su esposta, invece che *sequenzialmente*. Ciò comporta una forma di *parallelismo locale*.

$$[R_1] \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \sigma_1 \dots \sigma_n \\ [R_2] \frac{\sigma}{\sigma'} \end{array}}{\sigma'} \Leftrightarrow \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ [R_2] \frac{\sigma_1}{\sigma'_1} \dots [R_2] \frac{\sigma_n}{\sigma'_n} \\ [R_1] \frac{\sigma}{\sigma'} \end{array}}{\sigma'}$$

- **Cicli** – Una sotto-dimostrazione radicata in un “sequente interno” di una dimostrazione potrebbe sostituire l'intera dimostrazione

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \sigma \end{array}}{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \sigma \end{array}} \Rightarrow \begin{array}{c} \vdots \\ \sigma \end{array}$$

Le dimostrazioni focalizzate rappresentano esattamente un sottoinsieme completo di dimostrazioni (del frammento logico di LL o NL considerato) tale che

1. questo sottoinsieme non poggia su alcuna restrizione sintattica del frammento logico considerato
2. le dimostrazioni in questo sottoinsieme possono essere viste come rappresentanti “normali” della classe di dimostrazioni equivalenti del frammento considerato.

Le dimostrazioni focalizzate rappresentano un’ottima soluzione al problema delle dimostrazioni ridondanti e permettono di modificare la procedura di costruzione, su descritta, in maniera tale che solo queste dimostrazioni normali divengono oggetto della ricerca.

La classe delle dimostrazioni focalizzate è caratterizzata dalla seguente procedura.

Procedura 2.2 (Focalizzazione) . *Assumiamo il calcolo dei sequenti diadico standard Σ esposto nella Tabella 1.1*

1. *il primo passo di normalizzazione consiste nel trasformare Σ in un successivo sistema diadico Σ_2 (Tavola 2.1) in maniera tale che se due dimostrazioni di Σ sono trasformate (mappate) nella medesima dimostrazione di Σ_1 allora le due dimostrazioni di partenza sono “equivalenti”. In altre parole, ciascuna dimostrazione diadica π in Σ_1 rappresenta un sottoinsieme di una classe di equivalenza di dimostrazioni di Σ , modulo la nozione di equivalenza data nella Definizione 2.1.*

Questo passo riguarda la normalizzazione rispetto alle ridondanze implicite con le regole strutturali esponenziali di contrazione e indebolimento.

2. *Il secondo passo di normalizzazione è dato via la definizione di un sistema Triadico Σ_3 (Tavola 5.2) — rispettivamente Σ_3^c (Tavola 2.2) per il caso lineare — mediante una trasformazione da Σ_2 a Σ_3 tale che: se due dimostrazioni diadiche sono mappate nella stessa dimostrazione triadica allora queste dimostrazioni iniziali sono equivalenti.*

Ciascuna dimostrazione triadica rappresenta un sottoinsieme di una classe di equivalenza di dimostrazioni diadiche, modulo la relazione di equivalenza sulle dimostrazioni (Definizione 2.1).

Il sistema triadico ha la proprietà notevole che quando si applica la procedura *construct* alle dimostrazioni π di Σ_3 si evita di generare tutte le dimostrazioni diadiche di Σ che risultano essere equivalenti alle dimostrazioni triadiche π in Σ_3 .

2.2 Gli esponenziali

Le regole strutturali di *contrazione* ed *indebolimento* sono sorgenti immediate di dimostrazioni equivalenti, nel calcolo Σ (Tavola 1.1).

- Un esempio tipico di cicli ridondanti, due applicazioni, indebolimento e contrazione si “cancellano” in modo reciproco

$$\frac{\pi' \frac{\vdots}{\Theta, ? F : \alpha}}{\Theta, ? F, ? F : \alpha} \text{indebolimento} \Leftrightarrow \frac{\pi' \frac{\vdots}{\Theta, ? F : \alpha}}{\Theta, ? : \alpha} \text{contrazione}$$

- Analogamente, contrazione ed indebolimento portano alle permutazioni di certe figure di inferenza

$$\frac{\frac{\Theta : \omega * (G \parallel H)}{\Theta, ? F : \omega * (G \parallel H)} \text{indebolimento}}{\Theta, ? F : \omega * G \wp H} \wp \Leftrightarrow \frac{\frac{\Theta : \omega * (G \parallel H)}{\Theta : \omega * G \wp H} \wp}{\Theta, ? F : \omega * G \wp H} w$$

Il primo passo di normalizzazione consiste nel ritardare “quanto più possibile” le applicazioni di contrazione ed indebolimento, e applicarle solo quando sono necessarie, nel processo di costruzione di una prova di NL. In generale durante il processo di costruzione di una prova, è *sempre* possibile permutare le istanze di indebolimento quanto più possibile verso le foglie; diversamente, la contrazione non può essere permutata con le istanze di \otimes , *taglio*, *centro*, $?$.

Questa idea è catturata dal sistema diadico Σ_2 della Tavola 2.1. La definizione di sequente e di albero-dimostrativo rimane immutata rispetto a quelle di Σ (Tavola 1.1).

Tutti gli ordini e le varietà d'ordine maneggiate dalle regole del calcolo Σ_2 , come per Σ , sono seriali-parallele.

Contrazione ed indebolimento, per definizione, possono essere applicate liberamente sul contesto rappresentato dall'insieme delle occorrenze di formule Θ , ma nelle dimostrazioni normali di Σ_2 l'indebolimento è ammesso solo a livello delle foglie dell'albero dimostrativo, mentre la contrazione è permessa immediatamente prima delle figure di inferenza con le quali non permuta (tipicamente la regola della congiunzione additiva $\&$).

Identità

$$\frac{}{\vdash : \Theta : A^\perp * A} \mathbf{I}$$

Taglio

$$\frac{\frac{\vdash \Theta : \omega * A \quad \vdash \Theta' : \omega' * A^\perp}{\vdash \Theta, \Theta' : \omega, \omega'}}{\vdash \Theta, A : \alpha} \quad \frac{\vdash \Theta, A : \alpha \quad \vdash \Theta' : !A^\perp}{\vdash \Theta, \Theta' : \alpha}$$

Assorbimento, Entropia

$$\frac{\vdash \Theta, A : \omega * A}{\vdash \Theta, A : \bar{\omega}} \text{ assorbimento} \quad \frac{\vdash \Theta : \alpha}{\vdash \Theta : \beta} \text{ entropia, se } \beta \subseteq \alpha$$

Moltiplicativi

$$\frac{\frac{\vdash \Theta : \omega * A \quad \vdash \Theta : \omega' * B}{\vdash \Theta : (\omega < \omega') * A \odot B} \odot}{\vdash \Theta : \omega * (A < B)} \nabla \quad \frac{\frac{\vdash \Theta : \omega * A \quad \vdash \Theta : \omega' * B}{\vdash \Theta : (\omega \parallel \omega') * A \otimes B} \otimes}{\vdash \Theta : \omega * (A \parallel B)} \wp$$

Additivi

$$\frac{\frac{\vdash \Theta : \omega * A \quad \vdash \Theta : \omega * B}{\vdash \Theta : \omega * A \& B} \&}{\vdash \Theta : \omega * A \oplus B} \oplus_1 \quad \frac{\vdash \Theta : \omega * B}{\vdash \Theta : \omega * A \oplus B} \oplus_2$$

Esponenziali

$$\frac{\vdash \Theta, A : \bar{\omega}}{\vdash \Theta : \omega * ?A} ? \quad \frac{\vdash \Theta : A}{\vdash \Theta : !A} !$$

Constanti

$$\frac{}{\vdash \Theta : 1} \quad \frac{\vdash \Theta : \bar{\omega}}{\vdash \Theta : \omega * \perp} \quad \text{nessuna regola per } \mathbf{0} \quad \frac{}{\vdash \Theta : \omega * \top}$$

Tabella 2.1: Calcolo diadico non-commutativo Σ_2

Proprietà 2.1 (\sqsubseteq) . Se $\Theta \sqsubseteq \Theta'$ e $\vdash \Theta : \alpha$ è dimostrabile in Σ_2 , allora anche $\vdash \Theta' : \alpha$ sarà dimostrabile in Σ_2

DIMOSTRAZIONE — Per mostrare questa proprietà basta semplicemente sostituire nella dimostrazione di $\vdash \Theta : \alpha$ le occorrenze dell'insieme (non strutturato) Θ con Θ' \square

Teorema 2.1 ($\Sigma_2 \Leftrightarrow \Sigma$) . I due calcoli Σ e Σ_2 sono equivalenti.

DIMOSTRAZIONE —

- ($\Sigma_2 \Rightarrow \Sigma$).

La dimostrazione è data in maniera costruttiva. Una trasformazione da Σ_2 a Σ è data mediante semplici regole di riscrittura, come sotto.

$$\frac{}{\vdash \Theta : F * F^\perp} id \mapsto \frac{\frac{}{\vdash F * F^\perp} id}{\vdash \Theta : F * F^\perp} indebolimento^n$$

Il caso dell'assioma 1 è analogo

$$\frac{\vdash \Theta, F : \omega * F}{\vdash \Theta, F : \bar{\omega}} assorbimento \mapsto \frac{\frac{\vdash \Theta, F : \omega * F}{\vdash \Theta, F, F : \bar{\omega}} centro}{\vdash \Theta, F : \bar{\omega}} contrazione$$

$$\frac{\vdash \Theta : \omega * F \quad \vdash \Theta : \omega' * G}{\vdash \Theta : (\omega \parallel \omega') * F \otimes G} \otimes \mapsto \frac{\frac{\vdash \Theta : \omega * F \quad \vdash \Theta : \omega' * G}{\vdash \Theta, \Theta : (\omega \parallel \omega') * F \otimes G} \otimes}{\vdash \Theta : (\omega \parallel \omega') * F \otimes G} contrazione$$

I casi taglio e \odot si comportano in maniera analoga. In tutti i restanti casi le regole rimangono identiche.

- ($\Sigma_2 \Leftarrow \Sigma_1$). La dimostrazione è data per induzione sull'altezza di una prova π . La dimostrazione non presenta alcuna particolare difficoltà; ci serviamo della proprietà 2.1. Riportiamo solo alcuni casi, che illustrano come lavora la Proprietà 2.1 di sopra nella dimostrazione.

1. L'ultima regola di π è una istanza della regola \otimes

$$\frac{\frac{}{\vdash \Theta' : \omega' * F} \pi' \quad \frac{}{\vdash \Theta'' : \omega * G} \pi''}{\vdash \Theta' \Theta'' : (\omega' \parallel \omega) * F \otimes G} \otimes$$

Per ipotesi di induzione applicata a π', π'' , abbiamo $\vdash \Theta' : \omega' * F$ and $\vdash \Theta'' : \omega * G$; e sia per ipotesi $\Theta' \sqsubseteq \Theta$ e $\Theta'' \sqsubseteq \Theta$, allora per la Proprietà 2.1, deriviamo il seguente $\vdash \Theta : \omega' * F$ and $\vdash \Theta : \omega * G$, da cui, infine, mediante la regola \otimes concludiamo $\vdash \Theta : (\omega \parallel \omega') * F \otimes G$.

Analogamente nel caso in cui l'ultima regola di π è uno dei *cut* o un \odot .

2. L'ultima regola di π è un *centro* (si veda la figura di sinistra)

$$\pi: \frac{\pi'}{\frac{\vdash \Theta : \omega * F}{\vdash \Theta, F : \bar{\omega}}} \text{ centro} \qquad \frac{\pi'}{\frac{\vdash \Theta, F : \omega * F}{\vdash \Theta, F : \bar{\omega}}} \text{ assorbimento}$$

Per ipotesi di induzione applicata a π' si ha che $\vdash \Theta : \omega * F$ è derivabile in Σ_2 , e per la Proprietà 2.1 anche $\vdash \Theta, F : \omega * F$ è derivabile. Infine, per *assorbimento* concludiamo $\vdash \Theta, F : \bar{\omega}$ (come nella figura sopra a destra).

□

2.3 Identità e taglio

E' possibile raffinare ulteriormente il calcolo Σ_2 in maniera tale da considerare solo dimostrazioni che non fanno uso delle regole del taglio e che usano identità atomiche.

Le regole del cut sono causa di cicli ridondanti nelle prove di NL.

$$\frac{\frac{\pi'}{\vdash \Theta : \omega * F \wp G} \quad \frac{\frac{\vdash F^\perp * F}{\vdash (G \parallel F) * G^\perp \otimes F^\perp} \otimes}{\frac{\Theta : \omega * (G \parallel F)}{\vdash \Theta : \omega * F \wp G}} \text{ taglio}}{\vdash \Theta : \omega * F \wp G} \Leftrightarrow \frac{\pi'}{\vdash \Theta : \omega * F \wp G}$$

E' sempre possibile, data una dimostrazione π con tagli, produrre una equivalente dimostrazione della stessa varietà d'ordine di π che sia priva di tagli ("cut-free"). Questa proprietà è mostrata in [45] seguendo l'approccio basato sulla Semantica delle Fasi di Okada [41]. Di seguito assumeremo sempre dimostrazioni cut-free di NL.

Per le regole di identità, possiamo assumere di considerare dimostrazioni con sole Identità di formule atomiche. In particolare dato un assima di Σ , possiamo sempre costruire (dal basso verso l'alto) una *dimostrazione canonica*, (o *η -espansione*), a partire da identità atomiche, come segue:

$$\frac{}{\vdash F^\perp \otimes G^\perp * F\wp G} \text{id} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\frac{\vdash F * F^\perp \quad \vdash G * G^\perp}{\vdash (F \parallel G) * F^\perp \otimes G^\perp} \otimes}{\vdash F^\perp \otimes G^\perp * F\wp G} \wp$$

2.4 Il problema della formula principale: il caso lineare

Le regole lineari (commutative) inducono molteplici casi di permutazione tra le figure di inferenza applicate in una prova.

In generale una regola R_1 è in *posizione di permutabilità* con una la sottostante regola R_2 se la formula principale di R_1 non è usata come premessa principale dalla regola R_2 . La regola R_1 è detta *non permutabile* con la sottostante R_2 se R_1 è in posizione di permutabilità con R_2 ed esiste un contesto Γ tale che $\vdash \Gamma$ è unicamente dimostrabile con R_2 sotto R_1 . Altrimenti R_1 è detta *permutabile* con R_2 .

Nell'esempio seguente la regola \wp è permutabile con la sottostante regola \oplus .

$$\frac{\frac{\vdots}{\vdash \Gamma, H, F, G} \wp}{\vdash \Gamma, H, F\wp G} \oplus \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{\vdots}{\vdash \Gamma, H, F, G} \oplus}{\vdash \Gamma, H \oplus K, F, G} \oplus}{\vdash \Gamma, H \oplus K, F\wp G} \wp$$

In termini di procedura di costruzione delle prove, quando ci si trova a dover applicare delle inferenze logiche (dal basso verso l'alto) ad un dato nodo della dimostrazione, ci si trova dinnanzi ad una duplice scelta:

1. la scelta della *formula principale* (non-atomica) nel sequente ad un fissato nodo;
2. la scelta della corrispondente *inferenza logica*.

Queste scelte comportano un notevole non-determinismo, che sebbene non può essere del tutto rimosso, fa pensare che alcune tra le scelte possibili ai punti (1)-(2) non siano *significantive*, se conducono allo stesso risultato.

Nell'esempio precedente, infatti, si mostra come partendo da identiche premesse, delle scelte diverse conducano alla medesima conclusione. Tali scelte possano trattate deterministicamente.

Più formalmente, nella procedura di costruzione si possono rintracciare due forme di "non-determinismo":

1. un non-determinismo della forma *non so* ("don't know non-determinism"),
2. e un non-determinismo della forma *non importa* ("don't care non-determinism").

La differenza sostanziale è che uno dei due (il secondo) può essere trattato deterministicamente.

Sembra, così, naturale organizzare in due differenti gruppi tutti i connettivi lienari rispetto alla scelta della formula principale. Questo è quanto la tavola di sotto dice:

$$\begin{array}{l} \textit{asincroni} \left\{ \begin{array}{l} \textit{additivi} : \top, \& \\ \textit{moltiplicativi} : \perp, \wp, ? \end{array} \right\} \\ \textit{sincroni} \left\{ \begin{array}{l} \textit{additivi} : 0, \oplus \\ \textit{moltiplicativi} : 1, \otimes, ! \end{array} \right\} \end{array}$$

Ogni formula non atomica il cui connettivo principale è asincrono (sincrono) è detta sincrona (risp., asincrona), con la proprietà che il duale di una formula sincrona (risp., asincrona) è asincrona (risp., sincrona).

Rispetto al processo di costruzione delle prove, il loro diverso significato può essere espresso nel seguente modo:

se si seleziona nel sequente una formula principale che è asincrona, allora esiste un solo modo di applicare la sua regola corrispondente, mentre se la formula principale del sequente è sincrona allora potremmo trovarci nella situazione di dover scegliere tra diverse istanze della stessa figura di inferenza.

Per spiegare questo fatto, si osservi, ad esempio, come nella derivazione di sopra, due diverse istanze della stessa regola additiva per la disgiunzione \oplus sono possibili. In altre parole, quando una formula asincrona è selezionata in un sequente esiste una sola istanza della corrispondente figura di inferenza che sia applicabile, così che possiamo dire che la sua applicazione è deterministica, mentre per le formule relate ai connettivi sincroni, le scelte non sono deterministiche.

L'idea della focalizzazione è quella di limitare quanto più possibile le "perturbazioni" di una prova dovute alle permutazioni delle figure di inferenza nel processo di costruzione, per mezzo di condizioni sul modo in cui la formula principale è selezionata nel sequente.

Il passo di normalizzazione lineare corrisponde, così, ad imporre le seguenti condizioni sulla procedura di costruzione:

1. se il sequente contiene delle formule asincrone, allora una qualsiasi di esse può essere immediatamente selezionata come principale.

Si tratta della forma di non-determinismo che può essere trascurata (“don’t care non-determinism”) e trattata come strettamente deterministica. Fino a quando il sequente contiene almeno una formula asincrona il processo di costruzione della prova è completamente determinato, cioè, l’istanza della figura di inferenza da applicare è determinata.

2. quando tutte le formule asincrone sono state decomposte allora una formula principale deve essere selezionata (“don’t know non-determinism”) in maniera non-deterministica. Ma, non appena questa scelta viene effettuata allora la ricerca può *focalizzare* la formula scelta, cioè, il processo di costruzione continua a selezionare in maniera sequenziale come formula principale, per ogni ramo, la sottoformula che risulta dalla decomposizione precedente (in una sequenza dal basso verso l’alto). Questa focalizzazione continua fino a quando le sottoformule continuano ad essere sincrone.

I passi 1 e 2 appena esposti indicano che in una dimostrazione normale lineare ciascuna formula può essere vista come una successione di differenti ‘strati’ sincroni e asincroni, con la caratteristica che gli strati sincroni possono essere decomposti ininterrottamente, Tale sequenza di decomposizione prende il nome di *sezione critica di focalizzazione*.

Sotto riportiamo alcuni esempi di dimostrazioni lineari. La dimostrazione superiore è “normale”, in particolare rappresenta una sezione critica focalizzata:

$$\frac{\frac{\vdots}{\vdash B, D, G} \oplus \frac{\vdots}{\vdash C, H}}{\vdash B, D \oplus E, G} \oplus \frac{\vdots}{\vdash A, F}}{\vdash B \otimes C, D \oplus E, G, H} \otimes \frac{\vdots}{\vdash A \otimes (B \otimes C), D \oplus E, F, G, H} \otimes$$

$$\frac{\frac{\vdots}{\vdash B, D, G} \otimes \frac{\vdots}{\vdash C, H}}{\vdash B \otimes C, D, G, H} \otimes \frac{\vdots}{\vdash A, F}}{\vdash B \otimes C, D \oplus E, G, H} \oplus \frac{\vdots}{\vdash A \otimes (B \otimes C), D \oplus E, F, G, H} \otimes$$

Si può ridurre ulteriormente il non-determinismo implicito nelle in ogni sezione critica focalizzata, partizionando, in maniera arbitraria, le formule atomiche in due classi disgiunte: *atomi positivi* X ed *atomi negativi* X^\perp . In particolare il maggior controllo è dato dalla condizione che quando una tomo positivo è raggiunto allora può essere applicata solo la regola l'identità.

Il contenuto formale di quanto detto fino adesso è espresso dal Calcolo dei Sequenti Triadici (lineari) Σ_3^c . Si tratta di una semplificazione del Sistema originale dato da Andreoli nel 1990 del sistema originario. Quest'ultimo può essere ottenuto dal Calcolo Σ_3^c mediante l'aggiunta di regole puramente strutturali ("trasduzione") che non aggiungono niente in più (dal punto di vista logico). La versione che presentiamo è molto più semplice e tiene conto di alcuni suggerimenti e modifiche comunicati da Girard e riportati nel lavoro *The Unity of Logic* del 1993 ([19]).

Definizione 2.2 (Sequenti Triadici Lineari. Andreoli, 1990) . *Un sequente triadico lineare ha una delle seguenti forme:*

- $\vdash \Theta : \Gamma$
- $\vdash \Theta : \Delta | F$

dove Γ è un multinsieme di formule lineari, Δ un multinsieme di formule non asincrone, e Θ un insieme di formule interrogate con $!$. La formula isolata F è detta *stoup* o *focus*.

Le regole del calcolo triadico sono date nella Tavola 2.2.

Osservazione 2.1 .

- *Si osservi come nella definizione di sequente triadico lo stoup è il singoletto di una sola formula, inoltre, se esiste è dato sempre in un contesto Δ privo di formule asincrone.*
- *Un sequente $\vdash \Theta : \Gamma$ maneggia gli strati asincroni dei connettivi, e corrisponde al caso in cui esiste almeno una formula asincrona in Γ*
- *Un sequente $\vdash \Theta : \Delta | F$ indica lo stato della dimostrazione in cui può esserci al massimo un'occorrenza di formula asincrona, e in tal caso essa si trova nel focus. La presenza di una formula asincrona (o atomo negativo) nel focus indica la fine di una sezione di focalizzazione critica. In tal caso la costruzione reagisce (con la corrispondente regola di Reazione) ripristinando lo stato asincrono della dimostrazione.*

Qualora anche il focus non contenga come Δ alcuna formula asincrona, allora se non è un atomo negativo, possiamo trovarci dinnanzi a

F, G sono formule lineari, X sta per un generico atomo positivo, Θ sta per un insieme di formule lineari, $\Gamma, \Gamma' \dots$ per multiinsiemi di occorrenze di formule, $\Delta, \Delta' \dots$ per multiinsiemi di formule non asincrone.

Identità: se $X > 0$

$$\frac{}{\vdash \Theta : X^\perp, X} I_1 \quad \frac{}{\vdash \Theta, X^\perp : X} I_2$$

Regole Sincrone

$$\frac{\frac{\vdash \Theta : \Delta | F \quad \vdash \Theta : \Delta' | G}{\vdash \Theta : \Delta, \Delta' | F \otimes G} \otimes \quad \frac{}{\vdash \Theta : \mathbf{1}} \quad \frac{\vdash \Theta : F}{\vdash \Theta : !F}}{\frac{\vdash \Theta : \Delta | F}{\vdash \Theta : \Delta | F \oplus G} \oplus_1 \quad \frac{\vdash \Theta : \Delta | G}{\vdash \Theta : \Delta | F \oplus G} \oplus_2}$$

Regole Asincrone

$$\frac{\frac{\vdash \Theta : \Gamma}{\vdash \Theta : \Gamma, \perp} \quad \frac{\vdash \Theta : \Gamma, F, G}{\vdash \Theta : \Gamma, F \wp G} \wp \quad \frac{\vdash \Theta, F : \Gamma}{\vdash \Theta : \Gamma, ?F} ?}{\frac{}{\vdash \Theta : \Gamma, \top} \quad \frac{\vdash \Theta : \Gamma, F \quad \vdash \Theta : \Gamma, G}{\vdash \Theta : \Gamma, F \& G} \&}$$

Reazione: se F non è una formula sincrona e non è un atomo positivo

$$\frac{\vdash \Theta : \Delta, F}{\vdash \Theta : \Delta | F}$$

Decisioni: se F non è un atomo negativo

$$\frac{\vdash \Theta : \Gamma' | F}{\vdash \Theta : \Delta', F} D_1 \quad \frac{\vdash \Theta, F : \Delta | F}{\vdash \Theta, F : \Delta} D_2$$

Tabella 2.2: Sistema Triadico Lineare Σ_3^c

due soli casi. Che sia un atomo positivo X , ed in tal caso la condizione dice che il processo finisce e Δ deve essere ridotto al singoletto dell'atomo duale negativo X^\perp . Nel caso in cui lo stoup sia una formula sincrona allora siamo nel caso in cui tutte le formule asincrone sono state decomposte e una formula sincrona è stata selezionata come principale. Una volta selezionata la formula la formula principale, le sue sottoformule provenienti dal processo di decomposizione, non possono essere abbandonate, se esse risultano sincrone.

La completezza di Σ_3^c è stabilita da Andreoli in [4] rispetto al calcolo standard lineare Σ (Tabella 1). Nel Capitolo 5 (Osservazione 5.3) daremo una diversa interessante dimostrazione della completezza lineare di Σ , un semplice corollario della procedura di sequenzializzazione per le reti dimostrative di lineari. Questa prova di completezza si basa su di un più fine approccio geometrico alle dimostrazioni di lineari e non-commutative che verrà presentato nel prossimo Capitolo.

2.5 Dal caso lineare a quello non-commutativo

I connettivi logici strettamente non-commutativi ∇, \odot provengono dal raffinamento dei rispettivi connettivi moltiplicativi lineari \wp, \otimes . La questione, che si pone adesso in maniera naturale è quella di comprendere se il raffinamento della logica lineare comporti un corrispondente raffinamento della proprietà di focalizzazione lineare. In altri termini la questione è di comprendere se l'aggiunta di nuovi connettivi strettamente non-commutativi alteri le proprietà di permutabilità delle regole di introduzione di tali connettivi e se ad una eventuale alterazione corrisponda un aumento delle polarità per il frammento focalizzato completo di NL.

Tipicamente in NL si perde il vincolo di permutabilità che esiste in LL tra una istanza di una regola \otimes ed una ∇ . Per ogni posizione di permutabilità in NL una istanza di \otimes (resp., ∇) *permuta sempre* con una istanza di ∇ (Figura 5). Questo sembra contraddire il principio della focalizzazione lineare secondo la quale esiste sempre una posizione di permutabilità per la quale una istanza positiva (\otimes) non è non-permutabile con una istanza negativa.

Una soluzione potrebbe essere quella di introdurre delle polarità neutre (0);. La proliferazione di polarità ha però l'inconveniente che oltre a far perdere la simmetria della proprietà di focalizzazione non riflette al tempo stesso le ragioni di simmetria (geometriche) della logica stessa.

Per evitare gli inconvenienti conseguenti al proliferare di nuove polarità occorre dimostrare che la focalizzazione è una *proprietà logica* (come ad esempio

la proprietà della sottoformula o dell'eliminazione dei tagli) *stabile* per qualsiasi raffinamento della logica classica che preservi poche semplici condizioni geometriche.

Per dimostrare che la focalizzazione è una proprietà logica stabile dobbiamo, però, astrarre da tutte le particolari condizioni strutturali del calcolo dei sequenti, in particolare dall'entropia, e studiare così le proprietà di permutabilità delle regole logiche non-commutative solo da un punto di vista geometrico: ciò che faremo nel prossimo Capitolo.

Capitolo 3

Focalizzazione delle reti dimostrative

3.1 Introduzione

Il presente capitolo mostra i principali risultati ottenuti, concernenti l'interpretazione geometrica della proprietà di focalizzazione, studiata nel Capitolo precedente, esclusivamente attraverso le dimostrazioni del calcolo dei sequenti. Questo punto di vista più *astratto* permette un più fine approccio al problema della focalizzazione non-commutativa. Il punto di vista geometrico è assicurato dalla interpretazione delle dimostrazioni come particolari grafi dette Reti Dimostrative o "Proof-nets".

Le reti dimostrative offrono una rappresentazione *desequenzializzata* delle dimostrazioni; le reti sono, pertanto, uno strumento indispensabile per comprendere la Focalizzazione, dato che quest'ultima consiste principalmente nella caratterizzazione di una classe di dimostrazioni normali; queste differiscono solo rispetto alla sequenzializzazione.

E' comunque, difficile escogitare un algoritmo di costruzione di una prova efficiente come quello del precedente capitolo, in grado di generare incrementalmente reti dimostrative, che sia diverso da quello che permette di costruire tali dimostrazioni del calcolo dei sequenti.

L'approccio basato sul calcolo permette di considerare sequenti che hanno una diretta ed intuitiva interpretazione computazionale che associa sequenti a stati. D'altro canto, il ricorso alle reti dimostrative consente un'analisi della proprietà di focalizzazione più compatta ed immediata rispetto a quella condotta mediante prove del calcolo E' possibile, però, restituire la proprietà

di focalizzazione direttamente alle dimostrazioni del calcolo. Il modo più naturale di iniettare una proprietà geometrica dalle reti dimostrative al calcolo dei sequenti è per mezzo della *Procedura di Sequenzializzazione*. Il punto cruciale di tale procedura è mostrare che l'insieme delle conclusioni di una rete dimostrativa priva di conclusioni asincrone e con almeno una conclusione sincrona che sia sincrona, contiene un sottoinsieme non vuoto (se la rete non è ridotta ad un semplice assioma) di formule che sono conclusioni di *legami scindenti* ("splitting links"). Si tratta di legami che se rimossi da un grafo corretto (rete) inducono due sottografi corretti (sotto-reti). Mostreremo che esiste sempre un sottoinsieme non vuoto di tali legami scindenti per una rete che chiameremo focalizzanti. Un legame focalizzante è un legame *ereditariamente scindente*. L'insieme dei legami focalizzanti di una rete consente di modificare la procedura di sequenzializzazione delle reti di MNL, mediante la seguente strategia: se la rete contiene almeno un legame focalizzante allora tale legame viene ereditariamente selezionato per essere iniettato nella corrispondente prova del calcolo dei sequenti.

Per definire l'insieme delle conclusioni focalizzanti di una rete è necessario assumere che tutte le formule siano divisi nei due gruppi:

- asincrone (compresi gli atomi negativi);
 - sincrone (compresi gli atomi positivi);
- e che una proprietà di scissione per le rete valga.

Il presente capitolo è organizzato secondo le seguenti sezioni principali: la prima sezione introduce la teoria dei proof-nets per il frammento moltiplicativo non-commutativo (MNL), con le relative proprietà, principalmente quella di splitting verrà discussa. Segue poi una sezione che mostra come la proprietà di focalizzazione è, almeno nel caso moltiplicativo, un raffinamento della proprietà di splitting per i proof-nets, ed inoltre essa fornisce una ottimale strategia di sequenzializzazione.

Questo nuovo approccio è stato proposto per la prima volta da Andreoli-Maieli in [6]. In generale, il cambio di prospettiva (da sequenziale al parallelo) permette di generalizzare il risultato di focalizzazione al frammento moltiplicativo di qualsiasi raffinamento della logica classica per cui valga una proprietà di splitting. Questo è il caso particolare della Logica Non-commutativa¹.

¹Non è, invece il caso di altre logiche, come ad esempio la Pomset (si veda Retorè [43]), in cui non vale una proprietà di splitting per connettivi come \triangleleft ("before").

3.2 Reti dimostrative di MNL

Esponiamo la teoria delle reti dimostrative per il frammento puramente moltiplicativo della logica non-commutativa. Il principale riferimento è [3].

Definizione 3.1 (Strutture dimostrative) — I legami ("links") di MNL sono i seguenti grafi i cui vertici sono etichettati con formule di MNL

- legami identità



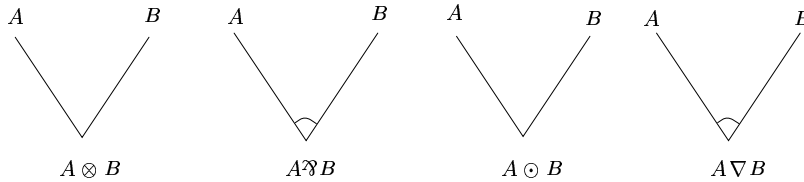
con due conclusioni A^\perp e A e nessuna premessa;

- legami cut



con due premesse A^\perp e A e nessuna conclusione;

- legami $\otimes, \wp, \odot, \nabla$:



dove la formula A è la prima premessa, la formula B è la seconda premessa e la terza formula è la conclusione del legame.

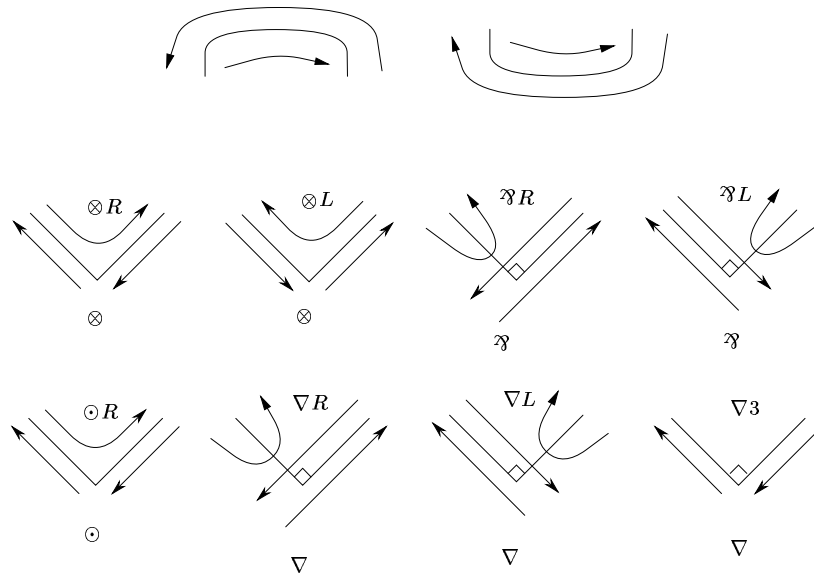
— Una struttura dimostrativa (di MNL) è un grafo costruito a partire dai legami di MNL e tale che ogni occorrenza di una formula è la conclusione di esattamente un solo legame e la premessa di al massimo un solo legame .
 Se π è una struttura dimostrativa di MNL, le conclusioni di π sono tutte le occorrenze delle formule in π che non sono premesse di alcun legame.

In generale, se π è una struttura di MNL allora la sua *traduzione commutativa* π° è la struttura che si ottiene da π sostituendo ogni occorrenza di un legame \odot con un legame \otimes e ogni legame ∇ con un legame \mathfrak{A} .

Le reti dimostrative non sono altro che strutture corrette. Per definire il criterio di correttezza useremo il concetto di *interruttore di un legame e cammino*.

Definizione 3.2 (Interruttori di legami ("switchings")) . Consideriamo come in [14] formule con decorazioni: \uparrow ("input") oppure \downarrow ("output").

- Una formula A di MNL si dice decorata se è della forma A^\uparrow oppure A^\downarrow .
- Definiamo $\bar{\uparrow} = \downarrow$, $\bar{\downarrow} = \uparrow$. Per ciascun legame l of MNL, consideriamo due insiemi di formule decorate:
 - l^{in} è l'insieme di tutte le formule decorate A^x , dove A è la premessa del legame l e x è \downarrow , oppure A è una conclusione di l e x è \uparrow ;
 - l^{out} è l'insieme di tutte le A^x , dove A è una premessa di l e x è \uparrow , oppure A è una conclusione di l e x è \downarrow .
- Per ciascun legame l di MNL definiamo un insieme $S(l)$ di funzioni (parziali) da l^{in} a l^{out} , chiamati posizioni degli interruttori di l , come segue:



- *Data una struttura dimostrativa π , un sistema di interruttori per π è una funzione s tale che per ogni legame l di π , $s(l) \in S(l)$.*
- *Un sistema di interruttori s per π è $\nabla 3$ -libero se e solo se per ogni ∇ -link l , $s(l) \neq \nabla 3$.*
- *Sia π una struttura dimostrativa ed s un sistema di interruttori per π , allora la struttura dimostrativa con interruttori $s(\pi)$ è il grafo orientato con vertici le formule decorate che etichettano π , e con un arco orientato A^x a B^y se e solo se $B^y = s(l)(A^x)$ per qualche legame l in π , oppure $A^x = C^\downarrow$ e $B^y = C^\uparrow$ per qualche conclusione C di π .*
- *Un viaggio in $s(\pi)$ è un ciclo o un cammino massimale in $s(\pi)$.*

Possiamo adesso definire le reti dimostrative (proof-nets) di MNL come la classe che contiene tutte le reti commutative (lineari) MLL e cicliche McyLL

Definizione 3.3 (Reti dimostrative (proof-nets)) . *Sia π una struttura dimostrativa di MNL ed s un sistema di interruttori per π .*

- *un viaggio v in $s(\pi)$ è un viaggio lungo se v è un ciclo e in v ogni occorrenza di una formula A in π appare due volte, una volta come A^\uparrow e la seconda come A^\downarrow .*
- *Un ciclo v in $s(\pi)$ è bilaterale² se v non è della forma*

$$A^x, \dots, B^y, \dots, A^{\bar{x}}, \dots, B^{\bar{y}}, \dots, A^x$$

dove A, B sono occorrenza di formule in π e $x, y \in \{\uparrow, \downarrow\}$

- *Una struttura dimostrativa π di MNL è una rete se e solo se per ogni sistema di interruttori s per π :*
 1. *c'è esattamente un ciclo σ in $s(\pi)$;*
 2. *σ contiene tutte le conclusioni;*
 3. *σ è bilaterale.*

Fatti 3.1 .

1. *π è un proof-net commutativo lineare (di MLL) se e solo se per ogni sistema di interruttori s per π c'è un viaggio lungo in $s(\pi)$.*

²Il criterio di bilateralità di un viaggio è stato introdotto da Danos-Regniere in [11].

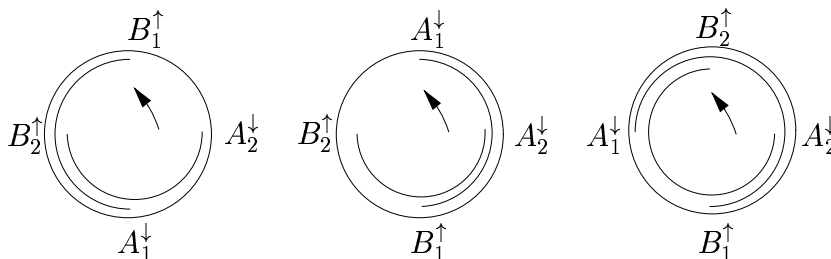
2. Se π è un *proof-net* di MNL ed s un sistema di interruttori per π , allora il grafo orientato con vertici le conclusioni di π e con un arco orientato dalla conclusione A alla conclusione B se e solo se non c'è alcuna conclusione da $B^\uparrow \dots A^\downarrow$ nell'unico ciclo in $s(\pi)$, è un ciclo orientato, detto il ciclo delle conclusioni in $s(\pi)$.

Definizione 3.4 (Una definizione equivalente di rete) .

- Siano A_1, B_1 rispettivamente, la prima e la seconda premessa di un legame ∇ , e A_2, B_2 , analogamente, la prima e la seconda premessa di un differente legame ∇ . Chiameremo i viaggi

$$B_1^\uparrow \dots A_1^\downarrow \text{ e } B_2^\uparrow \dots A_2^\downarrow$$

le parti più interne del legame ∇ del viaggio Diremo che le parti più interne di due legami ∇ in un viaggio, si sovrappongono se accade uno dei seguenti casi della rappresentati nella figura seguente

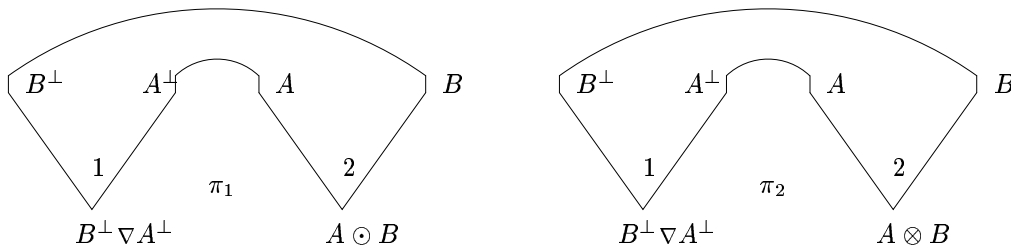


- Sia π una struttura dimostrativa non-commutativa. Diremo che π è una rete dimostrativa non commutativa se e solo se
 1. la traduzione commutativa π° di π è una rete commutativa;
 2. per ogni sistema di interruttori ∇ -libero per π , le parti più interne dei legami ∇ nel viaggio (ciclo) indotto non contengono conclusioni e non si sovrappongono.

La Definizione 3.4 di *proof-net* non-commutativo gioca un ruolo cruciale. Essa, infatti, consente di trasferire tutte le proprietà godute dalle reti commutative a quelle non-commutative.

L'equivalenza tra la due diverse Definizioni 3.4 e 3.3 di rete dimostrative di MNL è mostrata in Abrusci-Ruet in [3].

Esempi 3.1 (esempi di rete) . consideriamo le seguenti strutture π_1 con conclusioni $B^\perp \nabla A^\perp, A \odot B$, e π_2 con conclusioni $B^\perp \nabla A^\perp, A \otimes B$

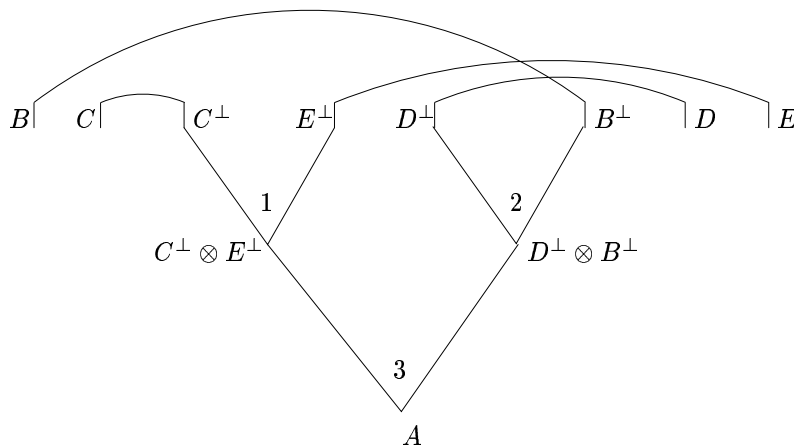


π_1 è una rete, mentre π_2 non lo è. In particolare, per π_2 esiste un sistema di interruttori $\nabla 3$ -libero, con interruttore del legame 2, \otimes -destro, tale che la parte interna $A^{\perp\uparrow}, \dots, B^{\perp\downarrow}$ che contiene la conclusione $A \otimes B$, violando la condizione (2) della Definizione 3.4.

Definizione 3.5 (varietà d'ordine di una rete) . Sia π è una rete di MNL con conclusioni Γ , e sia s un sistema di interruttori per π . Definiamo

- $\alpha_{\pi,s}$ l'ordine ciclico totale su Γ , corrispondente al ciclo delle conclusioni in $s(\pi)$;
- $\bigwedge \alpha_{\pi,s}$ la varietà d'ordine indotta dal sistema degli interruttori per la rete π . Tale varietà è la più grande varietà inclusa in ogni ciclo delle conclusioni Γ indotto da un sistema di interruttori per π .

Esempio 3.1 . Sia π_3 una rete con $A = (C^\perp \otimes E^\perp) \odot (D^\perp \otimes B^\perp)$.



Per ogni sistema di interruttori s assegnato alla struttura π_3 si hanno i seguenti cicli:

$A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow A$, con $s(l_1) = s(l_2) = \otimes_R$;

$A \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow A$, con $s(l_1) = \otimes_R$, $s(l_2) = \otimes_L$;

$A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow A$, con $s(l_1) = \otimes_L$, $s(l_2) = \otimes_R$;

$A \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow A$, con $s(l_1) = s(l_2) = \otimes_L$;

La varietà d'ordine associata a π , si calcola facilmente:

$$\alpha_\pi = (A, B, E) \cup (A, B, C) \cup (A, D, E) \cup (A, D, C)$$

In seguito faremo due assunzioni tecniche, giustificate dalla nostra ottica di costruzione della prova, e che, comunque, non comporta alcuna perdita di generalità:

- Il legame identità è limitato solo a formule atomiche. Qualsiasi legame con formule non atomiche può essere ridotto, senza difficoltà, alle identità atomiche: è sufficiente infatti costruire gli alberi di espansione per ogni conclusione del legame assioma e successivamente collegare tra di loro le occorrenze atomiche duali.
- I legami di taglio non vengono usati. In particolare, facciamo uso del risultato di riduzione dei tagli, dimostrato in Abrusci-Ruet [3]:

Teorema 3.1 (Riduzione dei tagli) . Una rete π con associata una varietà d'ordine α_π , si può sempre ridurre ad una rete π' senza legami di taglio, con associata una varietà d'ordine $\alpha_{\pi'} \supseteq \alpha_\pi$.

3.2.1 Sequenzializzazione

Si può stabilire una corrispondenza tra il calcolo dei sequenti Σ_{mnl} (Tavola 1.2) le reti dimostrative di MNL.

Proposizione 3.1 (Equivalenza tra Reti e Prove) .

1. **Adeguatezza** — Ad una dimostrazione \mathcal{D} di $\vdash \alpha$ nel calcolo dei sequenti Σ_{mnl} è associata la struttura dimostrativa \mathcal{D}^- con conclusioni $|\alpha|$ e tale che $\alpha = \alpha_{\mathcal{D}}$.
2. **Sequenzializzazione** — Sia π una rete senza tagli³ con conclusioni Γ , e sia α_π la varietà d'ordine indotta sulle conclusioni Γ (Definizione 3.5); allora esiste una dimostrazione \mathcal{D} nel calcolo dei sequenti Σ_{mnl} di $\vdash \alpha$ (con $\alpha = \alpha_\pi$).

³L'assunzione che π sia priva di tagli non è necessaria, ma semplifica le cose (si veda Abrusci-Ruet [3]).

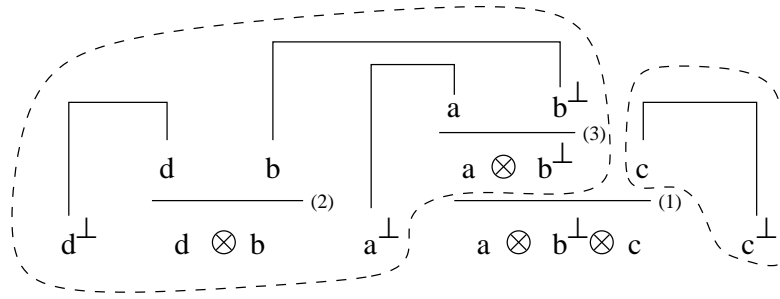


Figura 3.1: Un esempio di rete scidente

La dimostrazione che le reti sono adeguate ad esprimere le dimostrazioni del calcolo dei sequenti non pone alcun problema ed è disponibile in Abrusci-Ruet [3]. Viceversa, la parte della sequenzializzazione si basa essenzialmente sulla *proprietà della scissione* (o "splitting") discussa nella prossima sezione, ed intimamente connessa alla proprietà di focalizzazione.

Proprietà di Splitting

Definizione 3.6 (Splitting) *Sia π una rete ed $F = A \bullet B$, con $\bullet \in \{\otimes, \odot\}$, una delle sue conclusioni sincrone. F è splitting per π , e scriviamo $aF \in \text{split}(\pi)$ se e solo se π consiste di due reti π_1, π_2 più un legame sincro $\frac{A \bullet B}{A \bullet B}$ le cui premesse sono conclusioni di, rispettivamente, π_1 e π_2 , e la cui conclusione è etichettata F .*

Un esempio di rete che è "splitting" o scidente è dato nella Figura 3.1. La formula scidente in questo caso è $a \otimes b^\perp \otimes c$. Si noti che la conclusione $d \otimes b$ è anch'essa scidente.

La *proprietà di splitting* esprime il fatto che sotto certe condizioni una rete non-commutativa può sempre essere scissa nel senso della Definizione 3.6.

Lo splitting non-commutativo è una semplice conseguenza della proprietà di splitting commutativa, espressa dal Teorema 3.5 dimostrato nell'Appendice 3.4, e della Definizione 3.4 di rete non-commutativa.

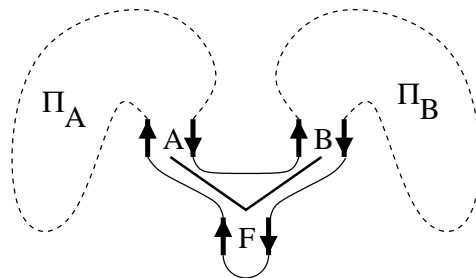
Teorema 3.2 (Splitting non-commutativo) . *Sia π una rete non commutativa priva di conclusioni asincrone e con almeno una conclusione sincrona; allora esiste una conclusione sincrona F tale che π risulta composto*

da due reti π_A, π_B più un legame sincrono le cui premesse sono conclusioni di π_A , rispettivamente π_B , e la cui conclusione è etichettata con F .

DIMOSTRAZIONE — Sia π una rete non commutativa priva di conclusioni asincrone e con almeno una conclusione sincrona. Ovviamente, π° è una rete commutativa priva di conclusioni asincrone e con almeno una conclusione sincrona che è così riconducibile al lemma dello splitting commutativo (Theorema 3.5). Quindi π° consiste di due reti π'_A, π'_B più un legame sincrono le cui premesse sono rispettivamente conclusioni di π'_A e π'_B , e la cui conclusione è etichettata con F° .

Per costruzione di π° abbiamo che π'_A (risp. π'_B) è della forma π_A° (risp. π_B°) e π consiste di π_A, π_B più un legame sincrono le cui premesse sono conclusioni rispettivamente di π_A and π_B e la cui conclusione è etichettata con F .

Rimane da verificare che π_A e π_B sono delle reti non commutative. Infatti abbiamo che π_A° e π_B° sono reti commutative e tutto ciò che rimane da verificare è che la condizione sui viaggi interni della Definizione 3.4 (condizione 2). Sia s_A (risp. s_B) un sistema di interruttori diversi da $\nabla 3$ per π_A (risp. π_B). Possiamo, allora, costruire un sistema di interruttori s diversi che non contengano $\nabla 3$ per π assemblando s_A, s_B e scegliendo come interruttore destro per F (cioè, $R\otimes$ oppure $R\odot$ a seconda del connettivo più esterno di F):



Sia l un legame ∇ di π_A e assumiamo che il suo viaggio interno in $s_A(\pi_A)$ contenga una conclusione C di π_A . Ci sono due casi da considerare:

- se C è differente da A , allora è una conclusione di π ; quindi il viaggio interno di l in $s(\pi)$ contiene anche una conclusione di π , questo contraddice la Definizione 3.4, essendo π una rete.
- se $C = A$ allora il viaggio interno di l in $s_A(\pi_A)$ va

$$\dots, A^\downarrow, A^\uparrow, \dots$$

In $s(\pi)$ il viaggio interno di l diventa

$$\dots, A^\downarrow, B^\uparrow, \dots, B^\downarrow, F^\downarrow, F^\uparrow, A^\uparrow, \dots$$

che contiene la conclusione F di π . Questo contraddice la Definizione 3.4, dato che π è una rete.

Quindi il viaggio interno di un legame ∇ di π_A in $s_A(\pi_A)$ è lo stesso che in $s(\pi)$ e non visita alcuna conclusione di π_A . Dato che i viaggi interni dei legami ∇ non si sovrappongono in $s(\pi)$, allora per la Definizione 3.4, non si sovrappongono neanche in $s_A(\pi_A)$. \square

Proposizione 3.2 (Proprietà di connessione) . *Siano π_A, π_B due reti non commutative. La struttura che si ottiene assemblando π_A, π_B più un legame sincrono le cui premesse sono conclusioni, rispettivamente di π_A e π_B , è una rete non commutativa.*

DIMOSTRAZIONE — Per la Definizione 3.4 sappiamo che π_A° e π_B° sono reti commutative e quindi lo è anche π° , altrimenti, per la proprietà della connessione commutativa, esisterebbe un viaggio breve.

Occorre, pertanto, provare \mathbb{L} che π soddisfa il criterio della Definizione 3.4 sui viaggi interni dei legami ∇ .

Sia s un sistema di interruttori diversi da $\nabla 3$ per π e sia l un legame ∇ di π . Possiamo assumere senza perdere generalità, che l è in π_A . Sia s_A un sistema di interruttori s ristretto a π_A . Per la Definizione 3.4 abbiamo che il viaggio interno di l in $s_A(\pi_A)$ non contiene conclusioni di π_A e dunque non visita A ; il viaggio interno di l in $s(\pi)$ è lo stesso che in $s_A(\pi_A)$. Pertanto, il viaggio interno di un legame ∇ di π in $s(\pi)$ coincide esattamente con il viaggio interno di quel dato legame nella rispettiva sotto-rete, π_A o π_B , dove esso occorre.

Di conseguenza la Definizione 3.4 è soddisfatta per queste sotto reti ed essa vale anche per tutta la rete π : la condizione di non sovrapposizione dei viaggi interni dei legami disgiunzione è ovvia se i due legami appartengono a due reti disgiunte. Dunque, π è na rete non commutativa. \square

3.3 Sequenzializzazione e Focalizzazione

Il punto centrale di questa sezione è quello di esprimere la proprietà di i focalizzazione come un raffinamento del Teorema di Splitting 3.5. Il raffinamento stabilisce che per ogni rete scindente esiste un legame che è ereditariamente

Questa dimostrazione non è focalizzata. Infatti, la figura di inferenza $[\otimes_1]$ scompone la formula sincorna $a \otimes b^\perp \otimes c$, ma la sua sotto formula sincrona $a \otimes b^\perp$ non è principale nella successiva figura di inferenza $[\otimes_2]$ violando, così, la proprietà delle "ininterrotte sezione critiche sincrone" che caratterizza le dimostrazioni focalizzate. Per ottenere una versione focalizzata della precedente dimostrazione è sufficiente:

- assumere che a, b, c, d siano atomi positivi;
- permutare le figure di inferenza $[\otimes_2]$ and $[\otimes_3]$.

si ottiene così la seguente dimostrazioni focalizzata nel sistema Σ_3^c (Tavola 2.2):

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\mathbf{I}] \frac{\overline{\vdash d^\perp | d} \quad [\mathbf{I}] \frac{\overline{\vdash b^\perp | b}}{\vdash d^\perp, b^\perp | d \otimes b}}{[\otimes_2] \frac{\overline{\vdash d^\perp, b^\perp | d \otimes b}}{\vdash d^\perp, d \otimes b | b^\perp}} \quad [\mathbf{I}] \frac{\overline{\vdash a^\perp | a}}{\vdash d^\perp, d \otimes b, a^\perp | a \otimes b^\perp}}{[\otimes_3] \frac{\overline{\vdash d^\perp, d \otimes b, a^\perp | a \otimes b^\perp}}{\vdash d^\perp, d \otimes b, a^\perp, c^\perp | a \otimes b^\perp \otimes c}} \quad [\mathbf{I}] \frac{\overline{\vdash c^\perp | c}}{\vdash d^\perp, d \otimes b, a^\perp, a \otimes b^\perp \otimes c, c^\perp}}{[\otimes_1] \frac{\overline{\vdash d^\perp, d \otimes b, a^\perp, c^\perp | a \otimes b^\perp \otimes c}}{\vdash d^\perp, d \otimes b, a^\perp, a \otimes b^\perp \otimes c, c^\perp}} \\
 [R, D] \frac{\overline{\vdash d^\perp, d \otimes b, a^\perp, a \otimes b^\perp \otimes c, c^\perp}}{\vdash d^\perp, d \otimes b, a^\perp, a \otimes b^\perp \otimes c, c^\perp}
 \end{array}$$

Questa dimostrazione focalizzata potrebbe anche essere stata ottenuta mediante una sequenzializzazione che usi un diverso ordine nella scelta delle conclusioni scidenti, specificatamente (1-3-2):

$$a \otimes b^\perp \otimes c \quad , \quad a \otimes b^\perp \quad , \quad d \otimes b$$

al posto di (1-2-3):

$$a \otimes b^\perp \otimes c \quad , \quad d \otimes b \quad , \quad a \otimes b^\perp$$

La focalizzazione costituisce essenzialmente una strategia nella scelta della formula scidente selezionata al passo 2-(a) della procedura di sequenzializzazione.

La sequenzializzazione costruisce una dimostrazione focalizzata se ad ogni scelta nella procedura di una conclusione scidente (passo 2-(a)) viene selezionata una conclusione focalizzante, cioè, "ereditariamente scidente".

3.3.1 Conclusioni focalizzanti

L'insieme delle conclusioni focalizzanti è definito induttivamente nel modo seguente modo:

Definizione 3.7 *Sia π una rete ed F una sua conclusione. F è focalizzante per π , e scriviamo $F \in \text{foc}(\pi)$ se e solo se una delle seguenti condizioni vale:*

1. F è un atomo positivo e π è ridotto ad un legame assioma;
2. $F \in \text{split}(\pi)$ e π è scindente in F (con sottoformule A e B) in due sotto reti π_A, π_B e
 - A è una fomula asincorna, un atomo negativo oppure $A \in \text{foc}(\pi_A)$
 - B è una fomula asincrona, un atomo negativo, oppure $B \in \text{foc}(\pi_B)$

Dalla Definizione 3.7 risulta evidente che se una rete non è ridotta ad un legame assioma, allora l'insieme delle formule focalizzanti è contenuto nell'insieme delle formule scendenti,

$$\text{foc}(\pi) \subseteq \text{split}(\pi)$$

Si noti, comunque, che a differenza di quanto avviene per lo splitting, la definizione di focalizzazione si applica anche a reti che sono ridotte ad legami assioma. Questo è un fatto essenziale che consente di catturare il ruolo cruciale giocato dalle polarità atomiche nella Focalizzazione. Le polarità atomiche consentono un notevole controllo sulla ricerca della dimostrazione, consentendo di ridurre la taglia (e quindi al complessità) delle dimostrazioni cercate.

3.3.2 Il Teorema di Focalizzazione

In questa sezione mostreremo che la Focalizzazione è un raffinamento della proprietà di splitting delle reti.

Seguiremo essenzialmente l'approccio di Andreoli-Maieli seguito in [6].

Per mostrare il Teorema 3.3 di Focalizzazione abbiamo bisogno di un Lemma 3.1 di Stabilità dell'insieme delle conclusioni focalizzanti di una rete.

Lemma 3.1 (Stabilità) *Sia π una rete priva di conclusioni sincrone e $S = A \bullet B$ sia una formula scindente di π . Siano π_A, π_B due reti ottenute mediante scissione di π in S . Se A non è un atomo negativo allora*

$$\text{foc}(\pi_A) \setminus \{A\} \subseteq \text{foc}(\pi)$$

(e analogamente per B)

DIMOSTRAZIONE — Procediamo per induzione sulla taglia di π . Sia $F \in \text{foc}(\pi_A) \setminus \{A\}$. Dato che F è focalizzante in π_A ci sono due casi da considerare:

1. F è un atomo positivo e π_A è una rete ridotta ad un legame assioma, con conclusioni F e F^\perp , una delle quali $\perp A$:

- per ipotesi, A non è un atomo negativo, quindi $A \neq F^\perp$.
- per ipotesi, $F \in \text{foc}(\pi_A) \setminus \{A\}$, quindi $A \neq F$

contraddizione.

2. F è una formula scindente di π_A della forma $C \bullet D$ e π_A è scindente in F in due sotto reti π_C, π_D tali che:

[P1]: C è asincrona o un atomo negativo oppure $C \in \text{foc}(\pi_C)$

[P2]: D è asincrona o un atomo negativo oppure $D \in \text{foc}(\pi_D)$

Poichè A è una conclusione di π_A differente da F e π_A è scindente in F nelle due sotto-reti π_C, π_D allora A deve essere nelle conclusioni di π_C o di π_D . Assumiamo, senza perdere generalizzazione che A sia una conclusione di π_D (oltre la conclusione D). Sia π' la struttura dimostrativa che consiste di π_D, π_B ed il legame scindente di π in S (si veda la Figura 3.2). Non è difficile verificare che:

[P3]: π' è una rete scindente in S in π_D e π_B

[P4]: π è scindente in F in π_C e π'

Dato che π' ha una taglia più piccola di π concludiamo, per ipotesi di induzione applicata alla [P3], che

$$\text{foc}(\pi_D) \setminus \{A\} \subseteq \text{foc}(\pi')$$

per questo, per la [P2] e per il fatto che $D \neq A$, consegue che

[P5]: D è asincrona o un atomo negativo oppure $D \in \text{foc}(\pi')$

Dalle proposizioni [P1], [P5], [P4], e per la Definizione 3.7, otteniamo che $F \in \text{foc}(\pi)$.

□

Teorema 3.3 (foc-esistenza) *Sia π una rete priva di conclusioni asincrone, allora $\text{foc}(\pi) \neq \emptyset$.*

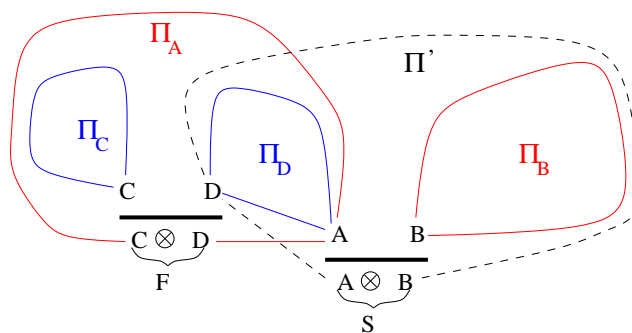


Figura 3.2: Differenti modi di assemblare sotto-reti

DIMOSTRAZIONE — Procediamo per contraddizione. Assumiamo che esista una rete π priva di conclusioni asincrone e tale che $\text{foc}(\pi) = \emptyset$. Scegliamo π *minimale* rispetto alla taglia. Ci sono due casi:

1. π non ha conclusioni sincrone, e siccome non contiene conclusioni asincrone, è ridotta ad un legame assioma. Ma allora una delle due conclusioni è un atomo positivo F , che per Definizione 3.7, è focalizzante per π . Contraddizione.
2. π contiene almeno una conclusione sincrona, e siccome non contiene conclusioni asincrone, per applicazione del Lemma 3.2 di splitting sappiamo che esiste una conclusione sincrona F di π , della forma $A \bullet B$, che scinde π in due sotto reti π_A e π_B .

Supponiamo che

[P1]: A non è asincrona, nè un atomo negativo.

- Per costruzione, le conclusioni di π_A inclusa A sono conclusioni di π quindi non sono asincrone. Dato che la stessa A non è asincrona, per la proposizione [P1], consegue che nessuna delle conclusioni π_A è asincrona. Siccome π_A è strettamente più piccola di π — per ipotesi è minimale e priva sia di conclusioni asincrone che di conclusioni focalizzanti — concludiamo

[P2]: $\text{foc}(\pi_A) \neq \emptyset$

- A non è un atomo negativo per la proposizione [P1], quindi, per applicazione del Lemma 3.1, abbiamo

$$[\mathcal{P}3]: \text{foc}(\pi_A) \setminus \{A\} \subseteq \text{foc}(\pi)$$

Dato che $\text{foc}(\pi) = \emptyset$, allora, per la proposizione $[\mathcal{P}3]$ concludiamo $\text{foc}(\pi_A) \subseteq \{A\}$, e per la proposizione $[\mathcal{P}2]$ concludiamo $\text{foc}(\pi_A) = \{A\}$. Quindi $A \in \text{foc}(\pi_A)$.

Infine, scaricando le ipotesi $[\mathcal{P}1]$, deriviamo

$$[\mathcal{P}4]: A \text{ è asincrona o un atomo negativo oppure } A \in \text{foc}(\pi_A)$$

In maniera simmetrica, possiamo provare che

$$[\mathcal{P}5]: B \text{ è asincrona o un atomo negativo oppure } B \in \text{foc}(\pi_B)$$

Dalle proposizioni $[\mathcal{P}4]$, $[\mathcal{P}5]$ e mediante la Definizione 3.7, concludiamo $F \in \text{foc}(\pi)$. Contraddizione.

□

Una attenta analisi mostra che il Teorema 3.3 riposa su due punti essenziali:

- (i) – il lemma di Splitting;
- (ii) – la partizione delle formule composte in asincrone e sincrone, completata con la partizione delle formule atomiche tra positive e negative.

Di conseguenza la focalizzazione si applica ad ogni raffinamento o estensione della logica classica per il quale (i) e (ii) valgano. Questo è il caso particolare del frammento moltiplicativo della logica non-commutativa.

Il legame tra le reti commutative e quelle non-commutative è catturato dalla Definizione 3.4, mentre la corrispondenza tra la focalizzazione commutativa e quello non-commutativo è sintetizzata dalla seguente proprietà:

Teorema 3.4 *Sia π una rete non-commutativa.*

$$\text{foc}(\pi^\circ) = (\text{foc}(\pi))^\circ$$

Questo vuol dire che la dualità sinronia/asincronia non può essere ulteriormente raffinata, comunque si raffini la logica classica.

3.3.3 Sequenzializzazione focalizzata

Rendiamo adesso più precisa l'interpretazione della focalizzazione come strategia di sequenzializzazione.

Il caso lineare

Assumiamo che ogni rete lineare sia equipaggiata con un *ordine totale* delle conclusioni che può essere direttamente estesa a tutti i suoi nodi della rete in maniera tale che

1. la più bassa tra le sottoformule di una conclusione è l'occorrenza "più a sinistra e più esterna" nella rappresentazione ad albero di quella conclusione⁴;
2. le sottoformule di conclusioni differenti sono nello stesso ordine in cui si trovano queste conclusioni. L'ordinamento delle conclusioni può essere completamente arbitrario; la sua estensione a tutti i nodi della rete è univocamente determinata ed induce un ordinamento delle conclusioni per tutte le sotto-reti di quella iniziale.

L'ordinamento è unicamente usato qui per catturare le scelte arbitrarie nella procedura di sequenzializzazione, e non ha nulla a che fare con l'ordinamento indotto dalla non-commutatività della rete.

Ecco nei dettagli la nuova strategia di sequenzializzazione focalizzata:

- ad ogni scelta di una conclusione asincrona per la decomposizione, la conclusione asincrona più alta (rispetto all'ordinamento dei nodi) viene selezionata;
- ad ogni scelta di una conclusione sincrona per la decomposizione (quando non ci sono più conclusioni asincrone) la più alta (rispetto all'ordinamento dei nodi) conclusione *focalizzante* è selezionata.

La seguente proprietà stabilisce la corrispondenza tra reti e prove del calcolo dei sequenti.

Sia π una rete lineare e Γ le sue conclusioni. Allora la sequenzializzazione di π è una dimostrazione focalizzata di $\vdash \Gamma$ in Σ_3^c (Tavola 2.2).

Questa proprietà può essere facilmente mostrata per induzione sulla taglia della rete data. L'induzione lavora assieme ad un'altra ipotesi:

⁴Per convenzione, una formula è "più esterna" delle sue sotto-formule; inoltre, data una formula $F \text{ c } G$ (dove c è un connettivo) le sottoformule di F sono "alla sinistra" di quelle di G .

Sia π una rete priva di conclusioni asincrone e con almeno una conclusione sincrona (quindi almeno una focalizzante). Allora la sequenzializzazione di π è una dimostrazione focalizzata del sequente della forma $\vdash \Delta \mid F$ dove F è la più alta conclusione focalizzante di π .

Il caso non-commutativo

Abbiamo mostrato che la proprietà di focalizzazione è stabile per il raffinamento non-commutativo di LL: cioè, ∇ ha un comportamento asincrono e \odot ha un comportamento sincrono. Questo implica che la strategia della sequenzializzazione focalizzata per il frammento moltiplicativo non-commutativo rimane la stessa di quella per l'analogo frammento lineare.

La questione che rimane aperta è come effettivamente sequenzializzare le reti non-commutative. In altre parole occorre trovare un corrispondente calcolo focalizzato per NL.

Il trattamento, in particolare, dell'entropia rende la ricerca di tale calcolo estremamente complesso. Questo problema verrà affrontato nel prossimo Capitolo.

3.4 Appendice: proprietà di splitting commutativo

Definizione 3.8 (Impero) *Assumiamo che $\frac{A}{A \otimes B}$ sia un dato legame \otimes in una rete β . Definiamo gli imperi eA and eB di A , e B come segue: eA consiste delle formule C tale che, per ogni interruttore si ha il viaggio*

$$A^\uparrow, \dots, C^x, \dots, C^{\bar{x}}, \dots, A^\downarrow$$

dove se $x = \uparrow$ (rispettivamente, \downarrow) allora $\bar{x} = \downarrow$ (rispettivamente \uparrow). L'impero eB è definito in maniera simmetrica.

Fatti 3.2 *Quelli che seguono sono alcuni fatti sugli imperi stabiliti in [14]:*

1. $A \in eA$
2. $eA \cap eB = \emptyset$.
3. se $C \in eA$ e C è connessa a C^\perp by $\frac{\quad}{C \quad C^\perp}$ allora $C^\perp \in eA$.
4. se $C \otimes D \in eA$ è la conclusione di un legame $\frac{C \quad D}{C \otimes D}$ allora $C, D \in eA$.
5. se $C \wp D \in eA$ è la conclusione di un legame $\frac{C \quad D}{C \wp D}$ allora $C, D \in eA$.

6. se $\frac{C}{C \otimes D}$ è un legame \otimes distinto dal legame $\frac{A}{A \otimes B}$ e se $C \in eA$ (rispettivamente $D \in eA$) allora $C \otimes D \in eA$.
7. se $\frac{C}{C \mathfrak{A} D}$ è un legame \mathfrak{A} e $C, D \in eA$ allora $C \mathfrak{A} D \in eA$.
8. esiste un sistema di interruttori tale per cui eA è esattamente l'intervallo $A^\uparrow, \dots, A^\downarrow$.
9. se la conclusione di un legame $\frac{C}{C \mathfrak{A} D}$ è una premessa ereditaria di A allora $eC \cup eD \subset eA$.

Teorema 3.5 (Splitting commutativo) *Sia β una rete commutativa con almeno un legame terminale \otimes e nessun legame terminale \mathfrak{A} . Allora è possibile trovare un nodo legame terminale $\otimes \frac{A}{A \otimes B}$ tale che $\beta = eA \cup eB \cup \{A \otimes B\}$.*

DIMOSTRAZIONE — Scegliamo $\frac{A}{A \otimes B}$ tale che $eA \cup eB$ è massimale rispetto all'inclusione. Se $A \otimes B$ non è massimale allora sotto $A \otimes B$ esiste un legame terminale che per ipotesi può essere solo della forma $\frac{C}{C \otimes D}$, ad esempio, $A \otimes B$ è sopra la premessa D . Allora per il Fatto 3.2.9, avremo che $eA \cup eB \subset eD$, così, $eA \cup eB$ non è massimale, contraddicendo l'assunzione. Ora, assumiamo, per assurdo, che

$$eA \cup eB \cup \{A \otimes B\} \neq \beta \quad (\text{a})$$

allora esiste un legame $\frac{C}{C \mathfrak{A} D}$ tale che

$$C \in eA \quad \text{e} \quad D \in eB; \quad \text{oppure} \quad C \in eB \quad \text{oppure} \quad D \in eA \quad (\text{b})$$

Tale legame esiste perchè altrimenti avremmo, per il fatto 3.2.8, che esiste un interruttore per il quale $eA = A^\uparrow, \dots, A^\downarrow$ e $eB = B^\uparrow, \dots, B^\downarrow$, da cui segue che $A^\uparrow, \dots, A^\downarrow, A \otimes B^\downarrow, A \otimes B^\uparrow, B^\uparrow, \dots, B^\downarrow$, i.e. $eA \cup eB \cup \{A \otimes B\} = \beta$, che contraddice l'assunzione (a).

Ora, la formula $C \mathfrak{A} D$ è sopra un legame terminale $\frac{E}{E \otimes F}$ e assumiamo che $C \mathfrak{A} D$ sia sopra F . Posizioniamo gli interruttori per un viaggio tale che $F^\uparrow, \dots, F^\downarrow = eF$, in maniera tale da andare immediatamente da F^\uparrow su fino a C^\uparrow (posizionando l'interruttore su $\mathfrak{A}L$). Il viaggio appare così (posizionando l'interruttore $\mathfrak{A}L$)

$$\dots, F^\uparrow, \dots, C \mathfrak{A} D^\uparrow, C^\uparrow, \dots, D^\downarrow, D^\uparrow, \dots, C^\downarrow, C \mathfrak{A} D^\downarrow, \dots, F^\downarrow, \dots \quad (\text{c})$$

Ora, per il fatto (b) $D \in eB$ segue

$$\dots, F^\uparrow, \dots, C \mathfrak{A} D^\uparrow, C^\uparrow, \dots, B^\uparrow, \dots, D^\downarrow, D^\uparrow, \dots, B^\downarrow, \dots, C^\downarrow, C \mathfrak{A} D^\downarrow, \dots, F^\downarrow, \dots \quad (\text{d})$$

cioè, $eB \subset eF$ (altrimenti $eA \subset eF$). Scambiando le posizioni di C e D (posizionando l'interruttore \mathfrak{R}) il vaiggio appare così,

$$\dots, F^\uparrow, \dots, C\mathfrak{R}D^\uparrow, D^\uparrow, \dots, C^\downarrow, C^\uparrow, \dots, D^\downarrow, C\mathfrak{R}D^\downarrow, \dots, F^\downarrow, \dots \quad (e)$$

ed ancora dal fatto (b) deriviamo

$$\dots, F^\uparrow, \dots, C\mathfrak{R}D^\uparrow, D^\uparrow, \dots, A^\uparrow, \dots, C^\downarrow, C^\uparrow, \dots, A^\downarrow, \dots, D^\downarrow, C\mathfrak{R}D^\downarrow, \dots, F^\downarrow, \dots \quad (f)$$

cioè, $eA \subset eF$ (altrimenti $eB \subset eF$). Ma allora $eA \cup eB \subset eF$, così, non è più massimale, contraddicendo l'assunzione (a). \square

Capitolo 4

Calcolo dei sequenti focalizzati per MNL

4.1 Introduzione

Il risultato principale del presente Capitolo è rappresentato dal Calcolo dei Sequenti Focalizzato, per il frammento moltiplicativo della logica non commutativa, basato sulle varietà d'ordine seriali-parallele: il sistema Σ_{mnl}^f della Tavola 4.1. Tale Calcolo risulta equivalente al frammento moltiplicativo del calcolo dei sequenti non-commutativo Σ_{mnl} (della Tavola 1.2), via la procedura di sequenzializzazione (Teorema 4.3). Tale procedura assicura l'iniezione delle proprietà di focalizzazione (Teoremi 3.3 e 3.4) nel Calcolo dei Sequenti Σ_{mnl}^f .

L'approccio geometrico offerto dalle reti non-commutative ha permesso una facile e naturale spiegazione del comportamento focalizzato dei connettivi logici di NL studiati secondo la dualità sincronia/asincronia, ma ha lasciato aperta la questione del trattamento dell'entropia.

Il punto centrale della procedura di focalizzazione non-commutativa è quello di ridurre il non determinismo implicito nell'uso dell'entropia. Nel Capitolo presente forniremo essenzialmente gli strumenti matematici che consentono di ridurre al minimo l'uso dell'Entropia nella procedura di costruzione delle prove (Lemma 4.6 and Teorema 4.1).

L'Entropia è coinvolta nello "splitting" (scissione) dei contesti che riguardano esclusivamente le applicazioni della regola \odot . E' pertanto necessario studiare il problema della partizione di un ordine seriale-parallelo ω , una volta che è stata fissata una bi-partizione X, Y del suo supporto $|\omega|$. In generale, non

tutte le partizioni sono adatte allo splitting non-commutativo di un ordine seriale-parallelo (contesto). Un risultato che mostreremo stabilisce il criterio dell'*ammissibilità* della partizione di un ordine seriale-parallelo.

Una partizione X, Y di un ordine ω è ammissibile quando è possibile ben ripartire (tecnicamente *pettinare*) l'ordine ω in maniera tale da avere tutti gli elementi di X separati dagli elementi di Y .

Se pensiamo alla rappresentazione di un ordine seriale-parallelo mediante alberi — possibilmente n -ari con nodi etichettati da somme seriali-parallele $<, \parallel$ — allora la condizione di ammissibilità di una partizione per un dato ordine ω equivale alla possibilità di rappresentare ω mediante un albero caratterizzato da un particolare cammino centrale *spina*.

In intuitivamente un ordine è rappresentato come una spina quando fissata una partizione del suo supporto l'ordine appare caratterizzato da un cammino principale centrale (detto spina dorsale) a cui sono attaccati gli elementi delle partizioni. Tutti i sotto-rami che compongono l'ordine sono distribuiti lungo quest'asse centrale. A sinistra gli elementi di X e a destra quelli di Y . I nodi lungo il cammino centrale etichettati dalla somma parallela \parallel sono quelli unicamente interessati a ricevere la co-entropia necessaria alla partizione dell'ordine

La condizione di ammissibilità è dimostrata equivalente alla condizione di spinabilità di un ordine seriale-parallelo ω per una fissata partizione.

Il risultato matematico centrale esibito nel presente Capitolo consiste nel mostrare che la co-entropia effettuata sui nodi paralleli del cammino dorsale è la più piccola quantità di co-entropia necessaria per la partizione dell'ordine dato (Lemma 4.6 e Teorema 4.1).

4.2 Partizioni di ordini seriali-paralleli

La presente sezione si ispira essenzialmente al lavoro di Maieli-Ruet [35]. Scegliamo un ordine seriale-parallelo ω ; fissiamo una partizione (X, Y) of $|\omega|$, e cerchiamo:

- le condizioni sotto le quali ω può essere partizionato modulo entropia in due ordini seriali-paralleli, rispettivamente sull'insieme X ed Y ,
- la soluzione minima — se esiste, in termini di entropia — per il problema della partizione di un ordine seriale-parallelo.

Ci sono due casi, che dipendono da come è fatto l'ordine seriale-parallelo che si vuole partizionare:

- la composizione (o somma) parallela \parallel , che corrisponde al connettivo \otimes ;
- la composizione (o somma) seriale $<$, che corrisponde al connettivo \odot .

4.2.1 Composizione parallela di un ordine

Lemma 4.1 *Le seguenti proposizioni sono equivalenti :*

1. $\omega = (\omega \upharpoonright_X \parallel \omega \upharpoonright_Y)$.
2. *esistono ordini seriali-paralleli ω_X, ω_Y , rispettivamente su X, Y tali che $\omega \triangleleft (\omega_X \parallel \omega_Y)$.*

DIMOSTRAZIONE —

1. \Rightarrow 2., è immediata.
2. \Rightarrow 1., se $\omega \triangleleft (\omega_X \parallel \omega_Y)$, allora $\omega \subseteq (\omega_X \parallel \omega_Y)$, pertanto presi due qualsiasi elementi in ω , uno in X ed uno in Y , questi sono incomparabili. Ciò implica $\omega = \omega \upharpoonright_X \parallel \omega \upharpoonright_Y$, poichè $\omega = (\omega_1 < \omega_2)$, con $|\omega_1| \neq \emptyset$ e $|\omega_2| \neq \emptyset$, implica $|X| = \emptyset$ oppure $|Y| = \emptyset$.

□

Lemma 4.2 *Per ogni coppia di ordini seriali-paralleli ω_X, ω_Y rispettivamente su X, Y tali che $\omega \triangleleft (\omega_X \parallel \omega_Y)$, abbiamo $\omega \upharpoonright_X \triangleleft \omega_X$ e $\omega \upharpoonright_Y \triangleleft \omega_Y$.*

DIMOSTRAZIONE — Ovvvia conseguenza dei Fatti 1.3.

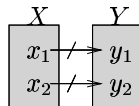
□

4.2.2 Composizione seriale di ordini

Partizioni ammissibili

Definizione 4.1 (partizione ammissibile) *Dato un ordine seriale-parallelo ω sull'insieme $X \uplus Y$, diremo che la partizione (X, Y) è ammissibile per ω se soddisfa le due seguenti proprietà:*

1. *per ogni $x \in X, y \in Y, y \not\prec x$.*
2. *per ogni coppia $\{x_1, x_2\}$ di elementi distinti di X e per ogni coppia $\{y_1, y_2\}$ di elementi distinti di Y , $\omega \upharpoonright_{x_1, x_2, y_1, y_2} \neq (x_1 < y_1) \parallel (x_2 < y_2)$*



Lemma 4.3 *Siano ω e σ due ordini seriali-paralleli entrambi sull'insieme $X \uplus Y$, con (X, Y) ammissibile per σ e sia $\omega \trianglelefteq \sigma$. Allora (X, Y) è ammissibile per ω .*

DIMOSTRAZIONE — $\omega \trianglelefteq \sigma$ implica $\omega \subseteq \sigma$, così:

1. se $\omega(y, x)$ per qualche $x \in X, y \in Y$, allora $\sigma(y, x)$, contraddizione.
2. se $\omega \upharpoonright_{x_1, x_2, y_1, y_2} = (x_1 < y_1) \parallel (x_2 < y_2)$, allora per la Proposizione 1.3, $\omega \upharpoonright_{x_1, x_2, y_1, y_2} \trianglelefteq \sigma \upharpoonright_{x_1, x_2, y_1, y_2}$, da cui $\sigma \upharpoonright_{x_1, x_2, y_1, y_2} = (x_1 < y_1) \parallel (x_2 < y_2)$ or $(x_1 < y_1 < x_2 < y_2)$.

Entrambi questi casi contraddicono l'assunzione che (X, Y) è ammissibile per σ . □

Ordini ben pettinati

Definizione 4.2 (pettinabilità) ω è detto essere ben pettinato da (X, Y) quando :

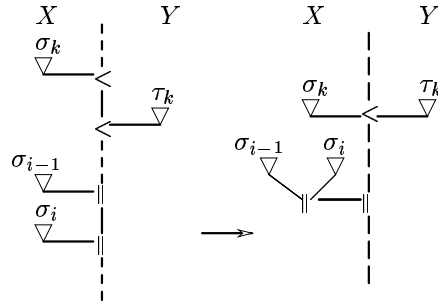
- $|\omega|$ è vuoto ed inoltre
- $\omega = (\omega_1 \parallel \omega_2)$ oppure $\omega = (\omega_1 < \omega_2)$, ed uno dei seguenti casi è soddisfatto:
 1. $|\omega_1| \subseteq X$ e ω_2 è ben pettinato da (X, Y) ,
 2. ω_1 è ben pettinato da (X, Y) e $|\omega_2| \subseteq Y$.

Esempio 4.1 *L'ordine parziale $\omega = (x_1 < y_1) \parallel (x_2 \parallel y_2)$ con $x_1, x_2 \in X$ e $y_1, y_2 \in Y$, è ben pettinato da X, Y : infatti $\omega = x_2 \parallel (x_1 < y_1) \parallel y_2$. Viceversa, l'ordine seriale-parallelo $(x_1 < y_1) \parallel (x_2 < y_2)$ non è ben pettinato da X, Y .*

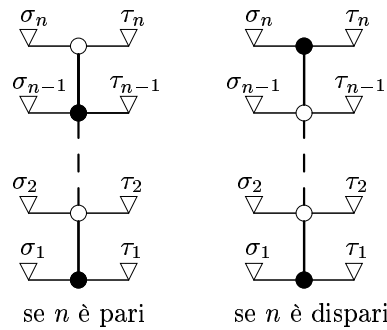
Spine

L'ordine seriale-parallelo ω è ben pettinato da (X, Y) se e solo se ω può essere rappresentato come un albero binario, i cui nodi sono etichettati da $<$ o \parallel e le cui foglie sinistre e destre sono tutte, rispettivamente in X e in Y .

Usando l'associatività, il cammino centrale dalla radice al punto di separazione tra X e Y può essere compresso in un *cammino alternato* (o spina dorsale), nel senso che due nodi consecutivi hanno sempre due etichette ($<$, \parallel) diverse

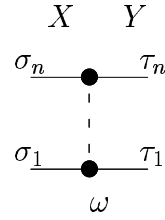


Questa compressione può creare nodi ternari nel cammino centrale, come. Le etichette \bullet , \circ sono usate nel modo seguente: se \bullet rappresenta un nodo $<$ (rispettivamente, \parallel) allora \circ rappresenta un nodo \parallel (rispettivamente, $<$). Il risultato di questa compressione è detta la *spina* di (ω, X, Y) .



Definizione 4.3 (Spine) *Assumiano che ω sia un ordine seriale-parallelo ben pettinato da (X, Y) . Denoteremo $[((\sigma_1, \tau_1), \dots, (\sigma_n, \tau_n)), \xi]$ la spina di (ω, X, Y) di altezza n , i cui aghi sinistri, (rispettivamente, aghi destri) sono ordini seriali-paralleli su i sottoinsiemi disgiunti X_i di X (rispettivamente, $Y_i \subseteq Y$) e $\xi \in \{<, \parallel\}$ è l'etichetta della radice. Le seguenti condizioni devono essere soddisfatte:*

1. *entrambi gli ordini $|\sigma_n|$ e $|\tau_n|$ (rispettivamente, il più alto ago sinistro e destro della spina), sono non vuoti;*
2. *$|\sigma_i| \uplus |\tau_i| \neq \emptyset$, per tutti gli i tali che $1 \leq i \leq n$.*



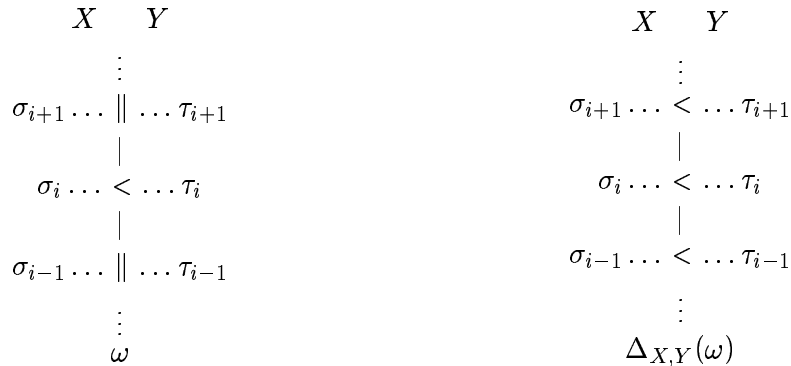
Entropia sulle spine

Questa sezione è dedicata alla definizione della Δ -entropia, cioè, l'entropia di una spina.

Definizione 4.4 (Δ -entropia) . *Assumiamo che ω sia ben pettinato da (X, Y) , e sia $[(\sigma_1, \tau_1), \dots, (\sigma_n, \tau_n), \xi]$ la spina di (ω, X, Y) . Allora definiamo:*

- $\Delta_X(\omega) = \sigma_1 < \dots < \sigma_n$
- $\Delta_Y(\omega) = \tau_n < \dots < \tau_1$
- $\Delta_{X,Y}(\omega) = \Delta_X(\omega) < \Delta_Y(\omega) = \sigma_1 < \dots < \sigma_n < \tau_n < \dots < \tau_1$

l'entropia sulla spina



Fatti 4.1 .

1. se ω è ben pettinato da (X, Y) , allora $\omega \trianglelefteq \Delta_{X,Y}(\omega)$.
2. $\Delta_X(\omega) = \Delta_{X,Y}(\omega) \upharpoonright_X$ e $\Delta_Y(\omega) = \Delta_{X,Y}(\omega) \upharpoonright_Y$.
3. se ω_X, ω_Y sono ordini seriali-paralleli, rispettivamente su X, Y , allora $(\omega_X < \omega_Y)$ è ben pettinato da (X, Y) e $\Delta_{X,Y}(\omega_X < \omega_Y) = (\omega_X < \omega_Y)$.

Lemma 4.4 (ammissibilità/peppinabilità) . *Le sequenti proposizioni sono equivalenti:*

1. (X, Y) è ammissibile per ω .
2. ω è ben peppinata da (X, Y) .
3. Esistono ordini seriali-paralleli ω_X, ω_Y , rispettivamente su X, Y , tali che $\omega \triangleleft (\omega_X < \omega_Y)$.

DIMOSTRAZIONE —

1. \Rightarrow 2. Per induzione su ω . Se ω è vuoto, qualsiasi partizione è ammissibile end anche ben peppinata. Altrimenti, $\omega = (\omega_1 < \omega_2)$ oppure $(\omega_1 \parallel \omega_2)$, con $|\omega_1|$ e $|\omega_2|$ entrambi non vuoti.

- $\omega = (\omega_1 < \omega_2)$. Poichè (X, Y) è ammissibile per ω abbiamo:

– $X \subseteq |\omega_1|$ e $Y = Y_1 \uplus Y_2$ con $Y_1 \subseteq |\omega_1|$;

– oppure $Y \subseteq |\omega_2|$ e $X = X_1 \uplus X_2$, con $X_1 = |\omega_1|$ e $X_2 \subseteq |\omega_2|$.

Nel primo caso (X, Y_1) è ammissibile per ω_1 , così per induzione ω_1 è ben peppinato da (X, Y_1) , cioè, può essere rappresentato da un albero ternario T con nodi etichettati da $\parallel, <$ e con foglie sinistre in X e foglie destre in Y . Così, $\omega = (\omega_1 < \omega_2)$ è dato dall'innesto di T con una qualche presentazione di ω_2 , che è ben peppinata, essendo $|\omega_2| \subseteq Y$. Il secondo caso è simmetrico.

- $\omega = (\omega_1 \parallel \omega_2)$. Se per qualche $x_1 \in X \cap |\omega_1|$ e $y_1 \in Y \cap |\omega_1|$ si ha $x_1 < y_1$, allora, per la Definizione 4.1 di ammissibilità (condizione 2) abbiamo $\omega_2 = (\omega_2 \upharpoonright_X \parallel \omega_2 \upharpoonright_Y)$. Per induzione, ω_1 è ben peppinato, così $\omega = (\omega_2 \upharpoonright_X \parallel \omega_1 \parallel \omega_2 \upharpoonright_Y)$ è anch'esso ben peppinato. Nel caso di $x_2 < y_2$, per qualche $x_2 \in X \cap |\omega_2|$ e $y_2 \in Y \cap |\omega_2|$, ragioniamo in maniera analoga.

2. \Rightarrow 3. Per il Fatto 4.1, $\omega \triangleleft \Delta_{X,Y}(\omega) = (\Delta_X(\omega) < \Delta_Y(\omega))$, *q.e.d.*

3. \Rightarrow 1. In $(\omega_X < \omega_Y)$, ogni elemento in X è inferiore ($<$) di ogni elemento in Y , così, $(\omega_X < \omega_Y)$ soddisfa le condizioni 1 e 2 della Definizione 4.1, e quindi (X, Y) è ammissibile per $(\omega_X < \omega_Y)$ e per il Lemma 4.3 (X, Y) è ammissibile anche per ω , quindi $\omega \triangleleft (\omega_X < \omega_Y)$.

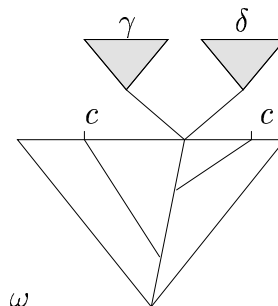
□

Minimalità dell'entropia in una partizione

Lemma 4.5 *Sia ω un ordine seriale-parallelo tale che $\omega[\gamma < \delta]$. Per ogni $c \in |\omega| \setminus |\gamma| \uplus |\delta|$ e per ogni coppia $a, b \in |\gamma| \uplus |\delta|$*

$$c \rightarrow_{\omega} a \Leftrightarrow c \rightarrow_{\omega} b \text{ and } c \leftarrow_{\omega} a \Leftrightarrow c \leftarrow_{\omega} b$$

DIMOSTRAZIONE — Informalmente, ragioniamo per assurdo. Come nella figura seguente tracciamo i cammini che vanno, rispettivamente, da a e b fino alla radice di ω . Questi cammini hanno una parte comune che va dal loro punto di incontro fino alla radice di ω . E' sufficiente mostrare che ogni cammino di un generico c che soddisfi le assunzioni di sopra, incontra il cammino comune ad a, b in un unico nodo etichettato con $<$ oppure \parallel . Il punto c risulterà dunque sempre nella medesima relazione sia rispetto ad a che b .



□

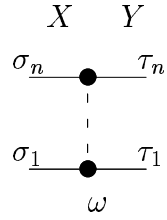
Lemma 4.6 (Principale) *Siano ω e ω' ordini seriali-paralleli su $X \uplus Y$, tali che (X, Y) è ammissibile per ω ed inoltre $\omega' \trianglelefteq \omega$. Allora, $\Delta_X(\omega') \trianglelefteq \Delta_X(\omega)$ e $\Delta_Y(\omega') \trianglelefteq \Delta_Y(\omega)$.*

DIMOSTRAZIONE — Per induzione sulla derivazione di $\omega' \trianglelefteq \omega$.

Il caso $\omega' = \omega$ è immediato. Altrimenti, è sufficiente assumere che un solo passo di entropia separi ω' da ω , cioè, $\omega' = (\omega[\gamma \parallel \delta]) \trianglelefteq (\omega[\gamma < \delta]) = \omega$, e dimostrare che se (X, Y) è ammissibile per $\omega[\gamma < \delta]$, allora $\Delta_{X,Y}(\omega'[\gamma \parallel \delta]) \trianglelefteq \Delta_{X,Y}(\omega[\gamma < \delta])$. Per i Fatti 1.3 sulle restrizioni ad X ed Y , segue, infine, il risultato.

Si osservi che se (X, Y) è ammissibile per ω e $\omega' \trianglelefteq \omega$ allora anche (X, Y) è ammissibile per ω' , (Lemma 4.3).

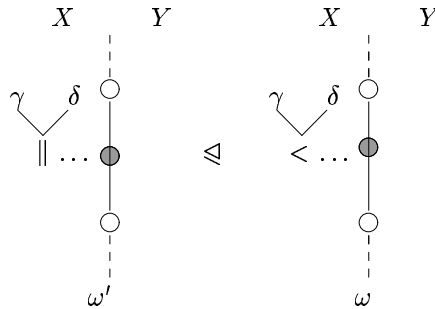
Sia (ω, X, Y) una spina come nella figura seguente.



Dato che (X, Y) è ammissibile per ω , dobbiamo considerare 4 casi.

1. $|\gamma| \subseteq X$ e $|\delta| \subseteq X$. Allora, $|\gamma| \uplus |\delta|$ deve essere incluso nel supporto di un unico ago σ_i . Altrimenti, sia x un elemento di $|\gamma| \uplus |\delta|$ tale che occorra in un ago σ_j per $j \neq i$. Senza perdita di generalità, assumiamo che $x \in \sigma_j$ per $j > i$ (il caso di $j < i$ è analogo). Inoltre, sia y un elemento minimale di Y , certamente esso occorre nel supporto dell'ago destro più alto della spina, cioè $y \in |\tau_n|$. Assumiamo x' tale che $y \neq x' \neq x$, $x' \in |\gamma| \uplus |\delta|$ e $x' \in |\sigma_i|$; ci sono due casi:
 - (a) σ_j ha la radice \bullet nella spina e σ_i ha la radice \circ (si osservi che se $\circ = <$ allora $\bullet = \parallel$, e viceversa) nella spina. Ne consegue che $x' \circ y$ e $x \bullet y$; e ciò contraddice il Lemma 4.5;
 - (b) σ_j e σ_i hanno entrambi le radici nella spina dello con etichetta dello stesso tipo \bullet . Per il Lemma 4.5, σ_{i+1} oppure τ_{i+1} deve essere non vuoto. Sia per esempio, $w \in |\sigma_{i+1}|$. Si ricordi che σ_{i+1} ha la radice \circ diversa da quella di σ_i , poichè i nodi della spina sono alternati. Allora,
 - i. se $w \notin |\gamma| \uplus |\delta|$, abbiamo trovato l'elemento w per il quale $x' \bullet w$ e $w \circ x$, contraddicendo il Lemma 4.5;
 - ii. se $w \in |\gamma| \uplus |\delta|$, ripetiamo l'argomentazione 1.(a), ed otteniamo $x' \bullet y$ e $w \circ y$: ciò contraddice ancora il Lemma 4.5.

Quindi $|\gamma| \uplus |\delta|$ deve essere incluso in un unico ago sinistro della spina, pertanto, l'unico possibile passo di entropia è il seguente



Ovviamente, $\Delta(\omega')_{X,Y} \trianglelefteq \Delta(\omega)_{X,Y}$.

2. Il caso $|\gamma| \subseteq Y$ e $|\delta| \subseteq Y$ è simmetrico al Caso 1.
3. $|\gamma| \subseteq X$ e $|\delta| \subseteq X \uplus Y$. Sia x minimale rispetto a $<_\gamma$ e $w \in |\tau_j|$ massimale rispetto a $<_\delta$, e sia $x \in |\sigma_i|$ e $w \in |\tau_j|$ per qualche $i, j \in \{1, \dots, n\}$; allora:
 - (a) $|\gamma|$ deve essere incluso in qualche ago sinistro della spina, cioè, $\sigma_i = (\gamma < \sigma'_i)$ oppure $\sigma_i = (\sigma'_i < \gamma)$. Le ragioni di ciò sono analoghe a quelle viste per il Caso 1.
 - (b) w non può occorrere al di sotto di x . Altrimenti, assumiamo che w appartenga a qualche ago radicato ad un livello $j < i$ della spina:
 - i. se w appartiene ad un ago radicato mediante un nodo \parallel alla spina, allora, otteniamo una contraddizione, perchè avremmo $x \parallel w$;
 - ii. se w appartiene ad un ago radicato mediante un nodo $<$ alla spina, allora, deve essere $j \leq \{i - 2\}$, dato che $x \in |\sigma_i|$ radicata alla spina con un nodo $<_i$. Per definizione di spina almeno un ago radicato al nodo \parallel_{i-1} è non vuoto e contiene dunque un elemento z . Ora,
 - $z \in |\delta|$ e siamo di nuovo al caso (i);
 - altrimenti, $z \notin |\delta|$ e così, abbiamo trovato un elemento $z \notin |\gamma| \uplus |\delta|$ tale che $x \parallel z$ and $w < z$. Ciò contraddice il Lemma 4.5.
 - (c) Ogni elemento c tra x e w appartiene a $|\gamma| \uplus |\delta|$. Altrimenti, due soli casi: 1) $x < c$ e $c \parallel w$; oppure 2) $x < k$ e $k < w$. Entrambi 1)-2) contraddicono il Lemma 4.5.
 - (d) w appartiene a $|\tau_i|$ oppure w appartiene all'ago destro (non vuoto) più vicino a σ_i .

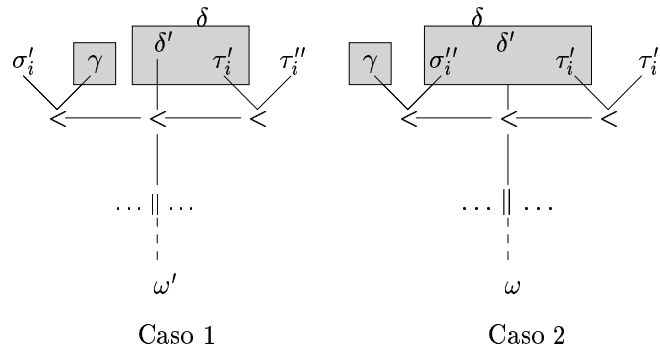
Per il punto (b), w non può occorrere al di sotto del livello i . Così, se w non occorre da qualche parte in τ_i , w appartiene a qualche ago τ_j per $j > i$. Assumiamo per assurdo, che esista un elemento $a \neq w$ che occorre nell'ago più vicino non vuoto τ_k for $k > 1$, e sia $a \notin |\gamma| \uplus |\delta|$ massimale rispetto alla confrontabilità con x .

Ci sono due casi,

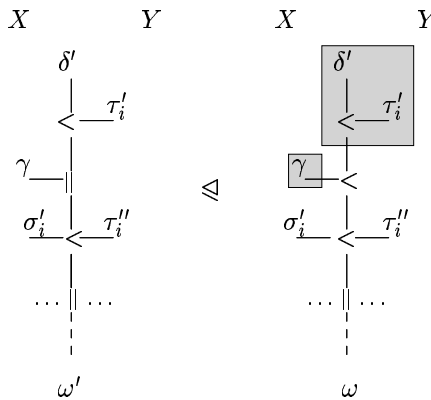
– se $w \parallel a$, allora dato che $x < a$ otteniamo una contraddizione con Lemma 4.5;

– se $w < a$, allora esisterà sempre (per la definizione di spina e per la massimalità di a) un elemento b compreso tra x e w appartenente ad un ago sopra o sotto τ_k . L'elemento b è tale che $w < a$ ed $a \parallel b$, contraddicendo il Lemma 4.5.

A causa di 4.(a)–(d), i soli possibili casi di entropia sono i seguenti:

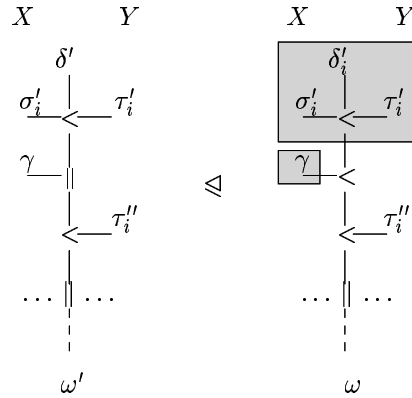


Caso 1: per l'associatività di $<$



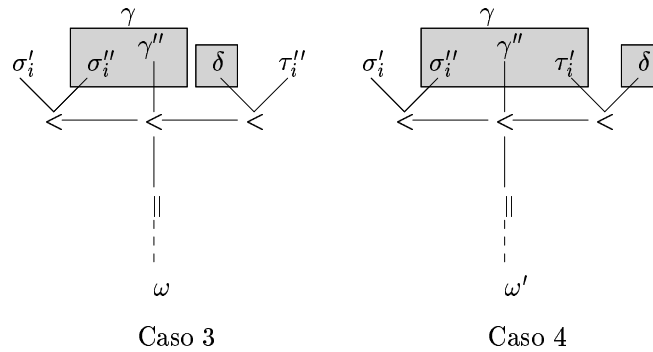
così, $\Delta(\omega')_{X,Y} < \Delta(\omega)_{X,Y}$.

Case 2. Per l'associatività di $<$



così, $\Delta(\omega')_{X,Y} \trianglelefteq \Delta(\omega)_{X,Y}$

4. $|\gamma| \subseteq X \uplus Y$ e $|\delta| \subseteq Y$. Seguiamo un'argomentazione analoga a quella del caso precedente. Gli unici possibili passi di entropia sono i seguenti



□

Teorema 4.1 (Minimalità) *Per ogni coppia di ordini seriali-paralleli ω_X, ω_Y , rispettivamente su X ed Y , tali che $\omega \trianglelefteq (\omega_X < \omega_Y)$, abbiamo i seguenti ordini seriali-paralleli*

$$\Delta_X(\omega) \trianglelefteq \omega_X \text{ e } \Delta_Y(\omega) \trianglelefteq \omega_Y$$

cioè, $\Delta_X(\omega), \Delta_Y(\omega)$ sono minimali rispetto all'entropia \trianglelefteq .

DIMOSTRAZIONE — Il Lemma 4.6, $\omega \trianglelefteq (\omega_X < \omega_Y)$ implica $\Delta_{X,Y}(\omega) \trianglelefteq \Delta_{X,Y}(\omega_X < \omega_Y)$, e i Fatti 4.1, $\Delta_{X,Y}(\omega_X < \omega_Y) = (\omega_X < \omega_Y)$, da cui, infine, segue il risultato per restrizione ad X e Y (Fatti sull'entropia 1.3). □

4.3 Sequenzializzazione

Definiamo il Calcolo dei Sequenti Focalizzato per il frammento MNL, Σ_{mnl}^f (Tavola 4.1) la cui completezza rispetto al Calcolo dei sequenti standard di MNL Σ_{mnl} (Tavola 1.2) è stabilita via procedura di sequenzializzazione (Teorema 4.3)

Definizione 4.5 (Sequenti di Σ_{mnl}^f) *I Sequenti focalizzati del frammento MNL hanno una delle sequenti forme:*

- $\vdash \alpha$, dove α è una varietà d'ordine seriale-parallela su un insieme di occorrenze di formule;
- $\vdash \omega | F$, dove F è una formula e ω è un ordine seriale-parallelo di occorrenze di formule non asincrone. A è detta il focus.

Intuitivamente la varietà d'ordine del sequente $\vdash \omega | A$ è la stessa di quella del sequente $\vdash \omega * A$, con la differenza che il focus nella prima varietà d'ordine è fissato.

Le regole del calcolo dei sequenti Σ_{mnl}^f sono date nella Tavola 4.1.

Esempio 4.2 *Esiste una sola dimostrazione focalizzata per il sequente $\vdash \alpha$ con varietà d'ordine*

$\alpha = \emptyset$ su $\{A^\perp, E^\perp, D^\perp, A \odot (B \odot C), (C^\perp \nabla B^\perp) \otimes (D \odot E)\}$ con $A, B, C, D, E > 0$

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\vdash A^\perp | A} \quad \frac{\frac{}{\vdash B^\perp | B} \quad \frac{}{\vdash C^\perp | C}}{\vdash (C^\perp < B^\perp) | B \odot C}}{\vdash (A^\perp \parallel (C^\perp < B^\perp)) | A \odot (B \odot C)} \\
 \frac{\vdash A^\perp \parallel A \odot (B \odot C) \parallel (C^\perp < B^\perp)}{\vdash A^\perp \parallel A \odot (B \odot C) \parallel (C^\perp \nabla B^\perp)} \quad \frac{\frac{}{\vdash D^\perp | D} \quad \frac{}{\vdash E^\perp | E}}{\vdash (E^\perp \parallel D^\perp) | D \odot E}}{\vdash (A^\perp \parallel E^\perp \parallel D^\perp \parallel A \odot (B \odot C)) | ((C^\perp \nabla B^\perp) \otimes (D \odot E))} \\
 \hline
 \vdash A^\perp, E^\perp, D^\perp, A \odot (B \odot C), (C^\perp \nabla B^\perp) \otimes (D \odot E)
 \end{array}$$

Teorema 4.2 (Adeguatezza) *Ad ogni dimostrazione senza tagli \mathcal{D} di $\vdash \alpha$ oppure $\vdash \alpha_F | F$ nel calcolo dei sequenti focalizzato Σ_{mnl}^f si può sempre associare una rete senza tagli \mathcal{D}^- di MNL con le stesse conclusioni e varietà d'ordine $\alpha_{\mathcal{D}^-} = \alpha$.*

Identità: se X è un atomo positivo

$$\frac{}{\vdash X^\perp | X} \text{Id}$$

Decisione: se F è sincrona o un atomo positivo

$$\frac{\vdash \alpha_F | F}{\vdash \alpha} \text{D}$$

Reazione: se F è sincrona o un atomo positivo

$$\frac{\vdash \alpha}{\vdash \alpha_F | F} \text{R}$$

Moltiplicativi

$$\frac{\vdash \Delta_Y(\omega) | F \quad \vdash \Delta_X(\omega) | G}{\vdash \omega | (F \odot G)} \odot, \text{ se } (X, Y) \text{ è una bipartizione ammissibile di } |\omega|$$

$$\frac{\vdash \omega' | F \quad \vdash \omega'' | G}{\vdash (\omega' \| \omega'') | F \otimes G} \otimes \quad \frac{\vdash \omega * (F < G)}{\vdash \omega * F \nabla G} \nabla \quad \frac{\vdash \omega * (F \| G)}{\vdash \omega * F \wp G} \wp$$

Tabella 4.1: Il Calcolo Focalizzato (moltiplicativo) Σ_{mul}^f .

DIMOSTRAZIONE — E' sufficiente mostrare che Σ_{mnl}^f è corretto rispetto a Σ_{mnl} , il quale è mostrato essere adeguato rispetto alle reti di MNL da Abrusci-Ruet in [3]. La correttezza di Σ_{mnl}^f rispetto a Σ_{mnl} è immediata. \square

Teorema 4.3 (Sequenzializzazione) *Sia π una rete senza cut di MNL con conclusioni Γ ed α sia una varietà d'ordine su Γ tale che $\alpha \subseteq \alpha_\pi$.*

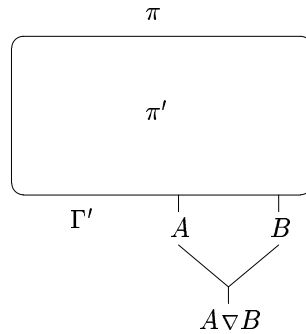
1. *Se Γ contiene formule asincrone, allora esiste una dimostrazione \mathcal{D} con conclusioni $\vdash \alpha$ nel calcolo dei sequenti focalizzato tale che $\mathcal{D}^- = \pi$.*
2. *Altrimenti, per qualche conclusione focalizzante $A \in \text{foc}(\pi) \subseteq \Gamma$, esiste una dimostrazione \mathcal{D} con conclusioni $\vdash \alpha_A | A$ nel calcolo dei sequenti focalizzato tale che $\mathcal{D}^- = \pi$.*

DIMOSTRAZIONE — Per induzione sulla taglia di π .

- Se π è un legame assioma, con conclusioni A, A^\perp , ed A un atomo positivo, allora possiamo facilmente sequenzializzare π con l'Identità:

$$\frac{}{\vdash A^\perp | A} \text{Id}$$

- Se Γ contiene almeno una conclusione asincrona, allora ci sono due sotto-casi
 1. Γ contiene una conclusione $A \nabla B$ e a varietà d'ordine della rete è $\alpha_\pi = \omega * A \nabla B$



Sia $\alpha = \omega' * A \nabla B$ una varietà d'ordine tale che $\omega' * A \nabla B \subseteq \omega * A \nabla B$, che per la Proposizione 1.1, è equivalente a $\omega' \trianglelefteq \omega$.

Siccome l'entropia è preservata dalla composizione seriale o parallela di ordini, si ha che $\omega' < (A < B) \leq \omega < (A < B)$, e quindi, per la definizione di entropia e per l'incollatura, $\omega' * (A < B) \subseteq \omega * (A < B) = \alpha_{\pi'}$

Ora, consideriamo la rete π' , con varietà d'ordine $\alpha_{\pi'} = \omega * (A < B)$ e facciamo le seguenti ipotesi:

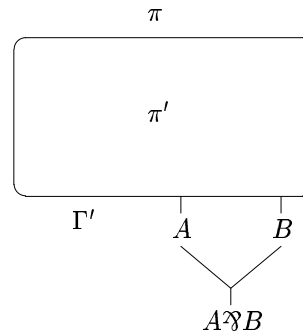
- (a) tra le conclusioni Γ', A, B di π' c'è ancora qualche formula asincrona; possiamo allora applicare l'ipotesi di induzione (1), dato che $\omega' * (A < B) \subseteq \omega * (A < B)$, ed otteniamo la prova focalizzata \mathcal{D}' di $\vdash \omega' * (A < B)$ tale che $\mathcal{D}'^- = \pi'$, da cui è facile concludere con una prova \mathcal{D} di $\vdash \omega' * A \nabla B$ con un'istanza di ∇

$$\frac{\mathcal{D}' \quad \vdash \omega' * (A < B)}{\vdash \omega' * A \nabla B} \nabla$$

- (b) altrimenti, π' non contiene nessun'altra formula asincrona, ma almeno una sincrona; allora per la Proprietà di Focalizzazione delle reti (Teoremi 3.3 e 3.4), esiste una conclusione che è focalizzante F . Per l'ipotesi di induzione (2) abbiamo una prova \mathcal{D}' di $\vdash (\omega' * A < B))_F | F$ tale che $\mathcal{D}'^- = \pi'$. È sufficiente aggiungere un passo di Decisione ed uno di \mathfrak{A} per ottenere una prova di $\vdash \omega' * A \nabla B$

$$\frac{\mathcal{D}' \quad \vdash (\omega' * (A < B))_F | F}{\frac{\vdash \omega' * (A < B)}{\vdash \omega' * A \nabla B} \mathfrak{A}} \text{Decisione}$$

2. Γ contiene una conclusione $A \mathfrak{A} B$.



Sia $\alpha_\pi = \omega * A \wp B$ la varietà d'ordine di π . Per definizione la varietà della sottorete π' è data dalla sostituzione $\alpha_\pi[A, B/A \wp B]$.

Sia $\alpha = \omega' * A \wp B$ una varietà d'ordine tale che $\alpha \subseteq \alpha_\pi$. Per il Lemma 1.1 sull'identificazione di due punti in una varietà d'ordine, sappiamo che $\omega' * (A \parallel B) \subseteq \alpha_\pi[A, B/A \wp B]$

Consideriamo adesso π' e facciamo le seguenti ipotesi:

- (a) Γ', A, B contiene qualche conclusione asincrona, e siccome and since $\omega' * (A \parallel B) \subseteq \alpha_{\pi'}$, allora per ipotesi di induzione (1) esiste una prova focalizzate \mathcal{D}' di $\vdash \omega' * (A \parallel B)$ tale che $\mathcal{D}'^- = \pi'$, da cui possiamo derivare la prova \mathcal{D} di $\vdash \omega' * A \wp B$ come segue

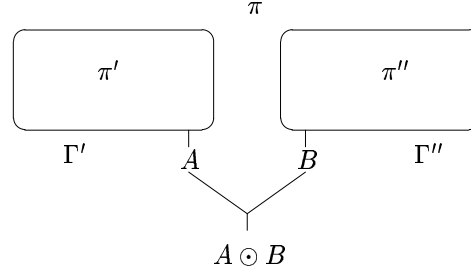
$$\frac{\mathcal{D}' \quad \vdash \omega' * (A \parallel B)}{\vdash \omega' * A \wp B} \wp$$

- (b) altrimenti, π' non contiene nessun'altra formula asincrona, ma almeno una sincrona; allora per la Proprietà di Focalizzazione delle reti (Teoremi 3.3 e 3.4), esiste una conclusione che è focalizzante F . Per l'ipotesid di induzione (2) abbiamo una prova \mathcal{D}' di $\vdash (\omega' * (A \parallel B))_F \mid F$ tale che $\mathcal{D}'^- = \pi'$. E' sufficiente aggiungere un passo di Decisione ed uno di \wp per ottenere una prova di $\vdash \omega' * A \nabla B$

$$\frac{\frac{\mathcal{D}' \quad \vdash (\omega' * (A \parallel B))_F \mid F}{\vdash \omega' * (A \parallel B)} \text{Decisione}}{\vdash \omega' * A \wp B} \wp$$

- Γ contiene delle conclusioni sincrone e nessuna conclusione asincrona. Per la proprietà di focalizzazione (Teoremi 3.3 e 3.4) $Foc(\pi) \neq \emptyset$

1. Sia $A \odot B \in Foc(\pi)$, e sia $\alpha_\pi = \overline{(\alpha_{\pi'})_A < A \odot B < (\alpha_{\pi''})_B}$ la varietà d'ordine della rete π , che per i Fatti 1.1 e per la proprietà dell'incollatura è uguale a $((\alpha_{\pi''})_B < (\alpha_{\pi'})_A) * A \odot B$, con $(\alpha_{\pi'})_A = \omega'$ e $(\alpha_{\pi''})_B = \omega''$ ordini seriali, rispettivamente sulle conclusioni Γ' e Γ'' .



Sia $\alpha = \omega * A \odot B$ una varietà d'ordine tale che $\alpha \subseteq \alpha_\pi$. Occorre considerare i seguenti casi:

- (a) entrambe le premesse del legame focalizzante sono a loro volta focalizzanti, cioè, $A \in \text{Foc}(\pi')$ and $B \in \text{Foc}(\pi'')$.

Per la Proposizione 1.1, $\omega \triangleleft (\omega'' < \omega')$, inoltre la bipartizione Γ'', Γ' è ovviamente ammissibile per $\omega'' < \omega'$ e quindi risulterà ammissibile anche per ω grazie al Lemma 4.3. Inoltre per il Teorema 4.1 sappiamo che $\Delta_{\Gamma''}(\omega)$ e $\Delta_{\Gamma'}(\omega)$ sono i più piccoli (rispetto all'entropia) ordini seriali-paralleli tali che $\omega \triangleleft \Delta_{\Gamma'', \Gamma'}(\omega) \triangleleft (\omega'' < \omega')$, il che implica, per la definizione di entropia, $\Delta_{\Gamma''}(\omega) * B \subseteq \omega'' * B = \alpha_{\pi''}$ e $\Delta_{\Gamma'}(\omega) * A \subseteq \omega' * A = \alpha_{\pi'}$

Possiamo, così, applicare l'ipotesi di induzione (2) alle sotto reti π', π'' ed ottenere due dimostrazioni focalizzate \mathcal{D}' di $\vdash \Delta_{\Gamma'}(\omega) | A$ e \mathcal{D}'' di $\vdash \Delta_{\Gamma''}(\omega) | B$ da cui infine concludere con una prova focalizzata di \mathcal{D} mediante una istanza della regola \odot

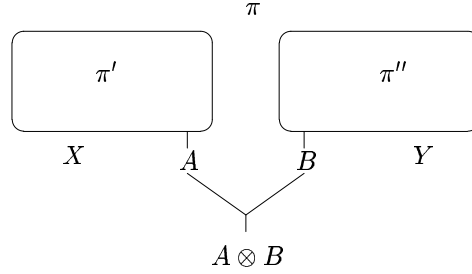
$$\frac{\frac{\mathcal{D}''}{\vdash \Delta_{\Gamma''}(\omega) | B} \quad \frac{\mathcal{D}'}{\vdash \Delta_{\Gamma'}(\omega) | A}}{\vdash \omega | A \odot B} \odot$$

- (b) Una premessa non è focalizzante; diciamo $B \notin \text{Foc}(\pi'')$ (il caso $A \notin \text{Foc}(\pi')$ è simmetrico). Usiamo allora l'ipotesi di induzione (1) e la regola di Reazione

$$\frac{\frac{\mathcal{D}''}{\vdash \Delta_{\Gamma''}(\omega) * B} \text{ Reaction} \quad \frac{\mathcal{D}'}{\vdash \Delta_{\Gamma'}(\omega) | A}}{\vdash \omega | A \odot B} \odot$$

2. Sia $A \otimes B \in \text{Foc}(\pi)$ e sia $\alpha_\pi = \overline{(\alpha_{\pi'})_A \parallel A \odot B < (\alpha_{\pi''})_B}$ la varietà d'ordine della rete π , che per i Fatti 1.1 e per la proprietà dell'in-

collatura è uguale a $((\alpha_{\pi'})_A \parallel (\alpha_{\pi''})_B) * A \otimes B$, con $(\alpha_{\pi'})_A = \omega'$ e $(\alpha_{\pi''})_B = \omega''$ ordini seriali, rispettivamente sulle conclusioni Γ' e Γ''



Sia $\alpha = \omega * A \otimes B$ una varietà d'ordine tale che $\alpha \subseteq \alpha_\pi$. Occorre considerare i seguenti casi:

- (a) entrambe le premesse del legame focalizzante sono a loro volta focalizzanti, cioè, $A \in Foc(\pi')$ and $B \in Foc(\pi'')$.

Per la Proposizione 1.1, abbiamo $\omega \triangleleft (\omega' \parallel \omega'')$, che implica per il Lemma 4.1 $\omega = \omega \upharpoonright_{\Gamma'} \parallel \omega \upharpoonright_{\Gamma''}$, da cui per restrizione si ha $\omega \upharpoonright_{\Gamma'} \triangleleft \omega'$ e $\omega \upharpoonright_{\Gamma''} \triangleleft \omega''$ ed infine per definizione di entropia $\omega \upharpoonright_{\Gamma'} * A \subseteq \omega' * A$ e $\omega \upharpoonright_{\Gamma''} * B \subseteq \omega'' * B$

Possiamo, così, applicare l'ipotesi di induzione (2) alle sotto reti π', π'' ed ottenere due dimostrazioni focalizzate \mathcal{D}' di $\vdash \omega \upharpoonright_{\Gamma'} \mid A$ e \mathcal{D}'' di $\vdash \omega \upharpoonright_{\Gamma''} \mid B$ da cui infine concludere con una prova focalizzata di \mathcal{D} mediante una istanza della regola del \otimes

$$\frac{\mathcal{D}' \quad \mathcal{D}''}{\frac{\vdash \omega \upharpoonright_{\Gamma'} \mid A \quad \vdash \omega \upharpoonright_{\Gamma''} \mid B}{\vdash \omega \mid A \otimes B} \odot} \odot$$

- (b) Una premessa non è focalizzante; diciamo $A \notin Foc(\pi')$ (il caso $B \notin Foc(\pi'')$ è simmetrico). Usiamo allora l'ipotesi di induzione (1) e la regola di Reazione

$$\frac{\frac{\mathcal{D}'}{\frac{\vdash \omega \upharpoonright_{\Gamma'} * A}{\vdash \omega \upharpoonright_{\Gamma'} \mid A} \text{Reaction}}{\vdash \omega \mid A \otimes B} \odot \quad \mathcal{D}''}{\vdash \omega \upharpoonright_{\Gamma''} \mid B} \odot$$

□

Capitolo 5

Focalizzazione dell'intero frammento non-commutativo

5.1 Introduzione

In questo capitolo affrontiamo la questione della Focalizzazione per l'intero frammento proposizionale della logica non-commutativa. Analogamente a quanto fatto precedentemente per il caso moltiplicativo, seguiremo due approcci paralleli: quello geometrico, basato sulle reti dimostrative, e quello orientato direttamente al calcolo dei sequenti. Questi due approcci confluiscono via il processo di sequenzializzazione.

Particolare attenzione va prestata all'approccio geometrico. Questo infatti non solo agevola il compito di studiare la proprietà di focalizzazione per l'intero frammento proposizionale di NL, ma getta nuova luce sulle varietà d'ordine della logica non-commutativa. Nello specifico lo studio di NL condotto sulle reti dimostrative consente di svincolarsi dalla rigida condizione seriale-parallela imposta alle dimostrazioni non commutative e di pensare più in generale a varietà d'ordine qualsiasi.

Per l'approccio geometrico ci serve, innanzitutto, una teoria per le reti dimostrative non commutative che comprenda legami additivi ed esponenziali. Scegliamo la via basata sulle *scatole* ("boxes"), introdotte da Girard 1987. Questa sintassi non può essere considerata un limite ai fini dello studio della proprietà di focalizzazione. Le scatole infatti ripristinano il senso sequenziale della prova del calcolo dei sequenti.

Intuitivamente, le *scatole dimostrative* rappresentano dei momenti di sincronizzazione in una rete, momenti, cioè, in cui viene restaurata una struttura

sequenziale. Il loro impiego, sebbene in generale, costituisca un ostacolo al parallelismo — per questa ragione è opportuno limitarne l'uso — risulta però compatibile con l'uso che ne faremo, nel presente lavoro, limitatamente alla sequenzializzazione.

Recenti sviluppi nella teoria delle reti dimostrative mostrano che alcune regole possono essere scritte senza scatole e sono tutt'oggi di notevole interesse. In ogni caso non sembra molto difficile pensare che i legami additivi & possano essere scritti senza far uso scatole (si veda Girard [20]).

A prescindere dalla sintassi più o meno raffinata, i legami additivi comportano delle nuove ed importanti questioni sulla natura della logica classica ed in particolare del suo raffinamento non commutativo. L'uso dei legami additivi & dissolve il regno seriale-parallelo che coincide sostanzialmente col frammento moltiplicativo di NL. L'introduzione di un legame & può, in generale, indurre una varietà d'ordine, sulle conclusioni della rete così ottenuta, che non è seriale-parallela.

Astrattamente, date delle premesse seriali-parallele $\omega' * A$ e $\omega'' * B$ non è detto che $\text{inf}, \omega' \wedge \omega''$, (Definizione 1.10) sia una varietà d'ordine seriale-parallela (si vedano le Osservazioni 1.3)

$$\frac{\omega' * A \quad \omega'' * B}{\omega' \wedge \omega'' * A \& B}$$

Ciò significa che più in generale deve essere possibile costruire una dimostrazione non commutativa che partendo da due premesse, date da due varietà d'ordine seriale-parallele sullo stesso insieme di occorrenze di formule (a meno delle occorrenze A, B), conduca ad una dimostrazione la cui conclusione è una varietà d'ordine che non è seriale-parallela (si veda l'Esempio 5.1).

Le reti dimostrative che introdurremo nel presente Capitolo sono definite come semplici strutture dimostrative corrette tali che inducono (tramite sistemi di interruttori) una varietà d'ordine (possibilmente seriali-parallele) sulle conclusioni.

Analogamente a quanto fatto per il caso puramente moltiplicativo, enunceremo la proprietà di focalizzazione direttamente sulle reti di NL senza costanti (Teorema 5.2); successivamente mostreremo il calcolo focalizzato triadico per il frammento proposizionale completo Σ_3 (Tavola 5.2), basato sulle varietà d'ordine seriali-parallele. La confluenza dei due risultati è mostrata via la Sequenzializzazione Focalizzata (Procedura 5.1). Tale procedura preserva la natura seriale-parallela delle immagini (dimostrazioni di Σ_3) della sequenzializzazione. Infatti si può sempre iniziare sequenzializzando una rete che abbia una sola conclusione, ottenuta mediante l'uso di legami \wp ; l'ordine,

delle conclusioni della rete è così vuoto e banalmente seriale-parallelo. Tutti i successivi passi della procedura di sequenzializzazione preservano la natura seriale-parallela delle varietà d'ordine implicate, eccetto il passo relativo alla iniezione dei legami $\&$, per i quali sono necessari opportuni accorgimenti che fanno uso della sola entropia.

Ecco di seguito riassunto l'obiettivo (Teorema 5.4) che raggiungeremo nel presente Capitolo:

[FOCALIZZAZIONE DI NL]: *Dato un sequente dimostrabile con una varietà d'ordine α , si può sempre associare una prova focalizzata dello stesso sequente con una varietà d'ordine seriale-parallela più piccola $\alpha' \subseteq \alpha$.*

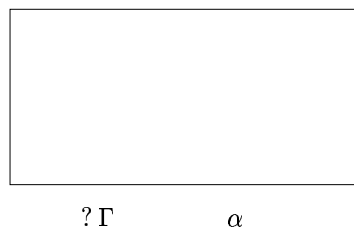
5.2 Reti dimostrative di NL

Estendiamo la sintassi delle reti moltiplicative non-commutative definite nella Sezione 3.2 del Capitolo 3, mediante l'aggiunta di nuovi legami ispirandoci alle idee contenute in [14].

5.2.1 Legami additivi ed esponenziali

Il concetto generale che introduciamo è quella di *scatola dimostrativa* ("proof-box"). Si tratta, intuitivamente, di strutture sequenziali. Il modo di costruire una scatola dipende dalle particolari regole che vogliamo esprimere, e non è di grande interesse. Noi siamo principalmente interessati a come usare tali scatole.

Una **Scatola dimostrativa** è essenzialmente una *scatola nera* come quella di sotto



con un certo numero (diverso da zero) di *formule del bordo* (porte, input/output) divise in due parti: una varietà d'ordine α assieme ad un insieme Γ di formule interrogate con "?". Ciò che si nasconde dentro la scatola è il

processo secondo il quale tale oggetto è costruito, che risulta essere, per il momento, irrilevante. Le scatole sono trattate essenzialmente come *moduli* ([2]), in altre parole, un modulo \mathcal{M} può essere usato in una rete β senza conoscere il suo contenuto. Questo vuol dire che un'altra scatola \mathcal{M}' con le stesse porte può rimpiazzare nella rete la scatola \mathcal{M} e funzionare ugualmente.

Al fine di controllare la correttezza di una rete che fa uso di scatole occorre controllare che la struttura sia una rete, senza fare assunzioni sulla scatole. L'idea, pertanto, è quella di trattare una scatola dimostrativa come una rete corretta le cui conclusioni sono le formule del bordo.

Interruttori — Ad ogni scatola è associato un interruttore ("switch"); una posizione per un interruttore consiste in una permutazione ciclica σ delle formule del bordo $|\alpha| \uplus \Gamma$, che estende α , cioè, $\alpha \subseteq \sigma \upharpoonright_{|\alpha|}$

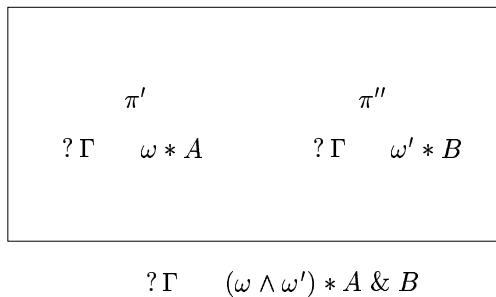
Legami unari — Si tratta di legami innocui: dato un legame unario $\frac{A}{B}$, esiste, infatti, un unico viaggio ovvio $A^\downarrow, B^\downarrow, B^\uparrow, A^\uparrow$.

$$\frac{A}{A \oplus B} \oplus_1 \quad \frac{B}{A \oplus B} \oplus_2 \quad \frac{A}{? A} \text{ abbandono}$$

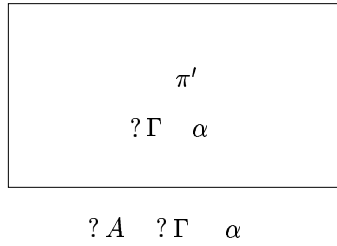
Legami binari: contrazione

$$\frac{? A \quad ? A}{? A} \mathbf{C}$$

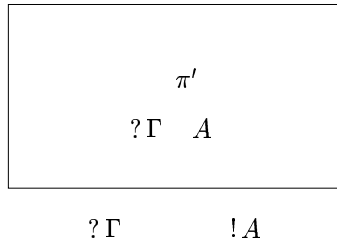
Inscatolamento — Date due reti π', π'' le cui rispettive conclusioni (la regola del taglio non è considerata) sono $? \Gamma \quad \omega * A$ and $? \Gamma \quad \omega' * B$, formiamo una scatola (chiamata anche *catena*) le cui conclusioni sono $? \Gamma \quad (\omega \wedge \omega') * A \& B$



Data una rete π' , con conclusioni qualunque (taglio escluso), possiamo sempre formare una scatola che introduce tra le sue conclusioni una nuova interrogata con $?$



Data una rete β le cui conclusioni (taglio escluso) sono $? \Gamma, A$, possiamo formare una scatola le cui conclusioni sono $? \Gamma, !A$.



Reti dimostrative — La definizione di struttura dimostrativa corretta, *rete*, di NL rimane immutata rispetto alle Definizioni 3.3 e 3.4 date nel Capitolo 3 per le reti moltiplicative.

Le reti di NL soddisfano il **Teorema dell'eliminazione dei tagli** (si veda il Teorema 3.1, Capitolo 3). Di conseguenza assumeremo di seguito sempre reti prive di tagli ("cut-free").

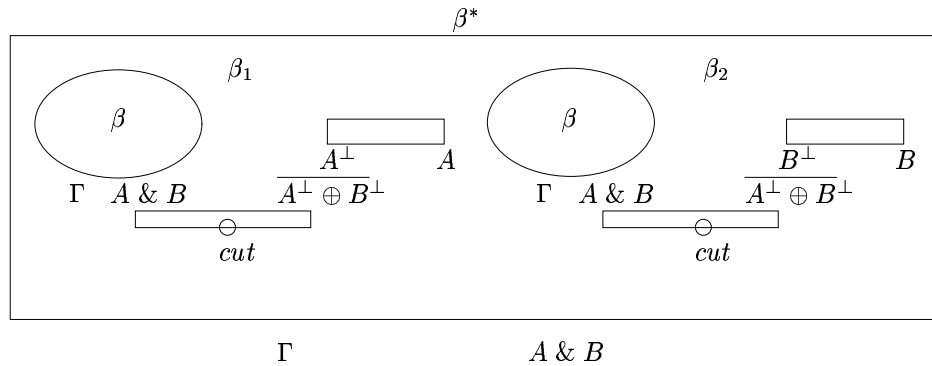
Assumiamo, inoltre, che gli atomi sono dati assieme alla polarità arbitraria positiva/negativa, inoltre assumiamo che le reti siano costruite a partire solo da legami assioma atomici polarizzati.

Nel modo solito, diremo che un legame è asincrono (risp. sincrono) se la sua conclusione è etichettata da una formula asincrona (risp., sincrona).

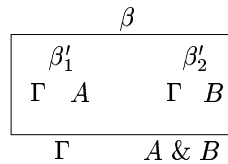
Lemma 5.1 (Permutabilità dei legami &) *Sia β una rete con conclusioni $A \& B, \Gamma$, allora si può sempre trasformare β in una rete equivalente con le stesse conclusioni tale che $A \& B$ etichetta un legame terminale (scatola) di tipo $\&$.*

DIMOSTRAZIONE — Sia β una rete che abbia almeno una conclusione $A \& B$ che non etichetti un legame-scatola di tipo $\&$. Consideriamo ora due reti β', β'' con conclusioni, rispettivamente, $A^\perp \oplus B^\perp, A$, e $A^\perp \oplus B^\perp, B$, ed

procediamo a due istanze di regola del taglio: una tra una copia della rete β e β' e l'altra tra una seconda copia di β e β'' . Entrambe le istanze hanno la medesima formula di taglio $A \& B$ (e la sua formula duale)



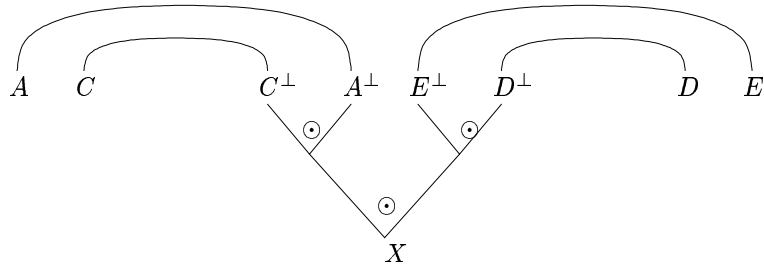
Per la proprietà dell'eliminazione delle regole di taglio per NL esistono due reti β'_1, β'_2 senza tagli, con, rispettivamente le stesse conclusioni di β_1, β_2 . Possiamo così formare una scatola come sotto, mediante un'istanza di $\&$, ed ottenere la rete β' con le stesse conclusioni di β



□

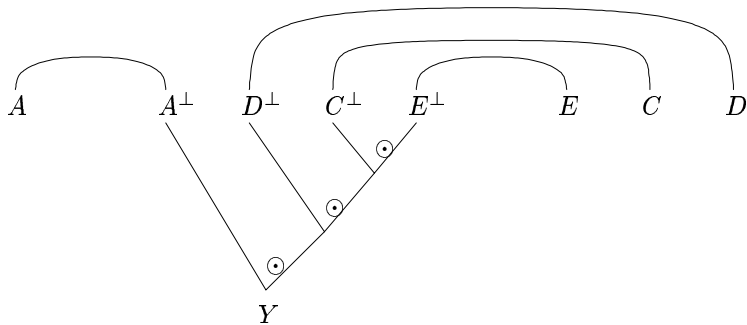
Grazie al Lemma 5.1 possiamo assumere che se una rete contiene una conclusione $F \& G$ questa etichetta sempre un legame terminale.

Osservazione 5.1 (Varietà d'ordine s/p e reti dimostrative) . *In generale la varietà d'ordine indotta dal sistema di interruttori sulle conclusioni di una rete del frammento proposizionale NL può non essere seriale-parallela. Si consideri la rete π_1*



la cui varietà d'ordine α (indotta dal sistema di interruttori) è l'ordine ciclico totale α_{π_1} sulle conclusioni (A, C, X, D, E) .

Si consideri poi la rete π_2



e sia α_{π_2} la varietà d'ordine indotta sulle conclusioni, data dall'ordine ciclico totale su (A, Y, E, C, D) .

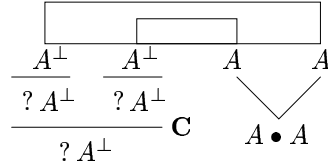
Le varietà d'ordine α_{π_1} e α_{π_2} sono entrambe seriali-parallele.

Si consideri poi l'inscatolamento delle due reti π_1, π_2 tramite il legame $\&$ che abbia come premesse X, Y . La struttura che ne risulta è ancora una rete non-commutativa la cui varietà d'ordine $(\alpha \wedge \beta) = (\alpha \cap \beta)$ indotta sulle conclusioni A, X & Y, E, C, D non è seriale parallela (si veda anche, l'Osservazione 1.4.1, del Capitolo 1).

5.2.2 Conclusioni scidenti e focalizzanti

Sia β una rete di NL e A una sua conclusione sincrona, etichetta di un legame $l : \frac{A' A''}{A} \bullet$ (con $\bullet \in \{\otimes, \odot\}$). Diremo che β è *scidente* (o "splitting") in A quando la rimozione del legame l da β porta a due sotto-reti disgiunte $\beta_{A'}$ e $\beta_{A''}$.

Analogamente al caso puramente moltiplicativo non è sempre possibile scindere una rete in due sotto-reti in un legame terminal \bullet . Si osservi infatti il seguente esempio, dove il legame \bullet non è scindente a causa della contrazione:

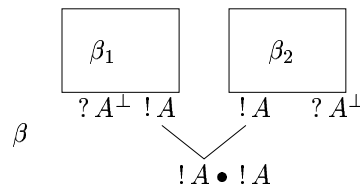


Definizione 5.1 (Rete asincrona libera) *Data una rete β con conclusioni Γ , diremo che β è asincrona libera se Δ non contiene legami terminali asincroni (contrazione, indebolimento, abbandono, $\&$ e \wp)*

Teorema 5.1 (Proprietà di "splitting") *Sia β una rete asincrona libera contenente solo (almeno una) legami terminali \bullet ; allora è sempre possibile trovare un legame terminale $l : \frac{A \ B}{A \bullet B}$, tale che β può essere scisso $A \bullet B$ in due sotto-reti disgiunte β_A e β_B . Diremo che $A \bullet B$ è una conclusione scindente di β , e scriveremo $A \bullet B \in \text{split}(\beta)$.*

DIMOSTRAZIONE — La dimostrazione è un semplice adattamento di quella data per il caso puramente moltiplicativo (Lemma 3.2, Capitolo 3). Ricordiamo solamente che il legame di contrazione \mathbf{C} svolge nella dimostrazione lo stesso ruolo svolto dal legame \wp , ∇ nel caso puramente moltiplicativo. \square

Osservazione 5.2 *Si osservi che una rete asincrona libera può contenere conclusioni asincrone interrogate con $?$. Nella condizione di scindibilità di un legame per una rete non è necessario richiedere l'assenza di conclusioni interrogate. Infatti, si veda il seguente esempio di rete dimostrativa per la quale esiste un unico legame che può essere rimosso (dunque sequenzializzato), e che risulta scindente, sebbene nel contesto ci siano altre conclusioni interrogate (dunque asincrone).*



5.2.3 Poprietà di Focalizzazione

Definizione 5.2 (Conclusioni Focalizzanti) *Sia β una rete asincrona libera, sia F una delle sue conclusioni. Diremo che F è focalizzante, e scriveremo $F \in \text{foc}(\beta)$, se e solo se vale una delle seguenti condizioni:*

1. F è un atomo positivo e β è un legame assioma $\frac{}{F \ F^\perp}$;
2. $F \in \text{split}(\beta)$ e β è scindente in $F = A \bullet B$ in due sotto-reti β'_A, β''_B

$$\beta: \frac{\frac{\beta'}{A} \quad \frac{\beta''}{B}}{A \bullet B}$$

ed inoltre

- A è asincrona, un atomo negativo oppure $A \in \text{foc}(\beta_A)$,
 - B è asincrona, un atomo negativo oppure $B \in \text{foc}(\beta_B)$;
3. $F = !G$ e
 - F etichetta un legame-scatola $!$ conclusione di una rete β'_G ; oppure
 4. $F = G \oplus H$, β_G (oppure β_H) è una rete e
 - G (risp., H) è asincrona o un atomo negativo oppure $G \in \text{foc}(\beta_G)$, (risp., $H \in \text{foc}(\beta_H)$).

Lemma 5.2 (Stabilità) *Sia $F \in \text{foc}(\beta)$ con F non atomica e $F \neq !G$, e sia A una conclusione di β tale che $A \neq F$ e A non è un atomo negativo. Sia β_l la rete che si ottiene da β in uno dei seguenti modi:*

- aggiungendo un legame terminale $l: \frac{A}{A \oplus B}$
- attaccando β_A ad una rete asincrona libera π_B mediante un legame $l: \frac{A \ B}{A \bullet B}$ (con $\bullet \in \{\odot, \otimes\}$)

Allora, $F \in \text{foc}(\beta_l)$.

DIMOSTRAZIONE — Per induzione sulla complessità¹ di β .

Se β è un legame assioma $\frac{}{F \ F^\perp}$, la dimostrazione è immediata. Altrimenti, dobbiamo considerare due casi principali:

Caso 1: $F = G \oplus H$ è una conclusione focalizzante di β

¹Il numero dei nodi.

$$\beta: \frac{\beta'}{G \oplus H}$$

allora per la Definizione 5.2,

(i) G è un atomo negativo o una formula asincrona, oppure $G \in \text{foc}(\beta')$; ed allora

1. l è un legame \oplus , $\frac{A}{A \oplus B}$, ed A una conclusione della sotto-rete β'_A , che è sia differente da G che da qualsiasi atomo negativo. Chiaramente, se estendiamo β'_A mediante un legame l otteniamo la rete β'_l

$$\beta'_l: \frac{\beta'}{A \oplus B} l$$

Ora, consideriamo la rete β'_l che ha G tra le sue conclusioni, ed estendiamo β'_l mediante il legame $\frac{G}{G \oplus H}$, otteniamo β_l . E' facile verificare che $F \in \text{foc}(\beta_l)$, infatti per (i),

- G è un atomo negativo o una formula sincrona, ed in entrambi i casi, per la Definizione 5.2, $G \oplus H$ è una conclusione focalizzante di β_l ,
 - oppure $G \in \text{foc}(\beta')$. Allora, siccome β'_l è più piccolo di β_l possiamo applicare l'ipotesi di induzione a β'_l , che contiene G , ed otteniamo $G \in \text{foc}(\beta'_l)$. Infine, per la Definizione 5.2, G è anche una conclusione focalizzante di β_l ;
2. l è un legame \bullet , $\frac{A \cdot B}{A \bullet B}$, e A è per ipotesi conclusione di β' che è differente sia da G che da ogni atomo negativo; e sia B una conclusione di una rete π asincrona libera disgiunta (da β). Consideriamo la struttura β'_l ottenuta attaccando β' e π_B per mezzo del legame l

$$\beta'_l: \frac{\beta' \quad \pi}{A \bullet B} l$$

β'_l è, chiaramente, una rete, così come la rete β_l ottenuta da β'_l aggiungendo l al livello G . Per (i)

- G è un atomo negativo o una formula asincrona, ed in entrambi i casi $G \oplus H$ è per Definizione 5.2, una conclusione focalizzante di β_l ;
- oppure $G \in \text{foc}(\beta')$. Allora, siccome la rete β'_l , è più piccola di β_l , possiamo applicare l'ipotesi di induzione su, $(\beta', G \in \text{foc}(\beta'), l, \pi_B)$, e concludere $G \in \text{foc}(\beta'_l)$. Infine per Definizione 5.2, $G \oplus H \in \text{foc}(\beta_l)$.

Caso 2: $F = G \bullet H$ è una conclusione focalizzante di β)

$$\beta: \frac{\beta' \quad \beta''}{G \bullet H}$$

e per Definizione 5.2,

- (i) G è un atomo negativo, una formula asincrona oppure $G \in \text{foc}(\beta')$;
- (ii) H è un atomo negativo, una formula asincrona oppure $H \in \text{foc}(\beta'')$.

Ci sono due sottocasi:

1. l è un legame \oplus , $\frac{A}{A \oplus B}$, e per ipotesi A è una conclusione di β' , differente da un qualsiasi atomo negativo e da G ; banalmente, A non può essere premessa di due legami diversi. Allora, β'_l è la rete che si ottiene estendendo β' mediante l'aggiunta del legame l a livello A . G è ancora una conclusione di β'_l e per la proposizione (i)
 - G è un atomo negativo o una formula asincrona; ed in entrambi i casi concludiamo, usando (ii) e per la Definizione 5.2, $G \bullet H \in \text{foc}(\beta_l)$, dove β_l è ottenuta concatenando le due reti β'_l, β'' come segue

$$\beta_l \frac{\beta'_l \quad \beta''}{G \bullet H}$$

- oppure $G \in \text{foc}(\beta')$, e allora per ipotesi di induzione, applicata a $(\beta', G \ l)$, concludiamo $G \in \text{foc}(\beta'_l)$. Infine, per la Definizione 5.2, usando la proposizione (ii), deriviamo $G \bullet H \in \text{foc}(\beta_l)$, dove β_l è ottenuta concatenando β'_l, β'' come prima.

Nel caso che A sia una conclusione β'' , A è differente, per ipotesi, da qualsiasi atomo negativo e da H , dato che A non può essere premessa di due legami differenti. Procediamo come prima, usando la proposizione (ii) al posto della (i).

2. l è un legame \bullet , $\frac{A \cdot B}{A \bullet B}$, e per ipotesi A è una conclusione di β' (il caso di A conclusione di β'' , è analogo), e sia B una conclusione della rete asincrona libera π , disgiunta da β . Sia β'_l la rete ottenuta concatenando π_B e β'_A per mezzo del legame l come segue

$$\beta'_l \frac{\beta' \quad \pi}{A \bullet B} l$$

Per la proposizione (i)

- G è un atomo negativo o una formula asincrona, così, consideriamo la rete β_l ottenuta per concatenazione di β'_l, β'' come nella figura di prima; per Definizione 5.2, usando la proposizione (ii), concludiamo $G \bullet H \in \text{foc}(\beta_l)$; ora,
- $G \in \text{foc}(\beta')$, e allora applichiamo l'ipotesi di induzione a (β', G, l) , dato che β' è più piccolo di β_l e banalmente, G non è nè premessa l nè un atomo negativo, e deriviamo $G \in \text{foc}(\beta'_l)$. Infine, per la Definizione 5.2, $F \in \text{foc}(\beta_l)$, dato che:
 - $G \in \text{foc}(\beta'_l)$;
 - per la proposizione (ii), H è un atomo negativo, una formula asincrona oppure $H \in \text{foc}(\beta'')$,
 - $G \bullet H \in \text{split}(\beta_l)$,

Nel caso che A sia una conclusione di β'' (risp., β') ragioniamo come sopra, usando la proposizione (ii), al posto della (i).

□

Teorema 5.2 (esistenza) *Sia β una rete asincrona libera, allora $\text{foc}(\beta) \neq \emptyset$.*

DIMOSTRAZIONE — Per induzione sulla complessità di β .

Caso 1: β è un legame assioma, con conclusioni atomiche F, F^\perp , allora F oppure F^\perp è un atomo positivo; ad esempio, sia $F > 0$, allora $F \in \text{foc}(\beta)$, per la Definizione 5.2.

Caso 2: β ha le conclusioni $? \Delta, !F$. Per ipotesi, non esiste alcun legame terminale asincrono, dunque il legame terminale deve essere una scatola $!$ applicata alla rete β' con conclusioni $? \Delta, F$

$$\beta' \\ ? \Delta, F$$

Per la Definizione 5.2, $!F \in \text{foc}(\beta)$.

Caso 3: β ha almeno una conclusione $A \oplus B$

$$\frac{\beta'}{A \oplus B}$$

Se A è asincrona, un atomo negativo oppure $A \in \text{foc}(\beta')$, allora per la Definizione 5.2, $A \oplus B \in \text{foc}(\beta)$. Altrimenti A è

- una conclusioni non focalizzante;
- oppure un atomo positivo e β' non è un legame assioma.

Possiamo applicare l'ipotesi di induzione a β' , così esiste una conclusione focalizzante $C \in \text{foc}(\beta')$. Consideriamo la rete asincrona libera β' che contiene A tra le sue conclusioni. Sia l un legame $\frac{A}{A \oplus B}$, dato che A non è un atomo negativo, e $A \neq C$, possiamo applicare il lemma principale 5.2 e dedurre $C \in \text{foc}(\beta)$.

Caso 4: β ha una conclusione $A \bullet B$. β è per ipotesi una rete asincrona libera, contenente solo legami terminali \bullet , così, per il Teorema 5.1 esiste almeno un legame terminale l che è scidente; supponiamo che β sia scidente nella formula $A \bullet B$

$$\beta: \frac{\frac{\beta'}{A} \quad \frac{\beta''}{B}}{A \bullet B} l$$

Ci sono due casi:

1. valgono entrambe le seguenti proposizioni
 - (i) A è un atomo negativo, una formula asincrona oppure $A \in \text{foc}(\beta')$;
 - (ii) B è un atomo negativo, una formula asincrona oppure $B \in \text{foc}(\beta'')$
 allora per Definizione 5.2 deriviamo $A \bullet B \in \text{foc}(\beta)$
2. altrimenti, (una delle due (i), (ii) è falsa). Ad esempio, assumiamo:
 - (a) A sia una conclusione sincrona non focalizzante, o un atomo positivo e β' non è un legame assioma.
 Per ipotesi di induzione, applicata a β' , esiste una conclusione F tale che $F \in \text{foc}(\beta')$; inoltre, per la proposizione (a) sappiamo che:

- F non è atomica, altrimenti β' sarebbe un legame assioma, con conclusioni $F, F^\perp = A$ e A un atomo negativo; contraddizione con (a);
- $F \neq !G$, altrimenti A sarebbe una formula interrogata con $?$;
- banalmente, $A \neq F$ e A non è un atomo negativo;

Per il Lemma di Stabilità 5.2, applicato alle reti asincrone libere β', β'' e al legame $l = \frac{A \bullet B}{A \bullet B}$, concludiamo $F \in \text{foc}(\beta)$.

□

Corollario 5.1 (focalizzazione moltiplicativa) *Se ci limitiamo al caso puramente moltiplicativo e assumiamo che β sia scindente, allora $\text{foc}(\beta) \subseteq \text{split}(\beta)$.*

5.2.4 Sequenzializzazione

Procedura 5.1 (Sequenzializzazione Focalizzata per NL) . *Data una rete β con conclusioni $?\Theta, \Gamma$ e che induce la varietà d'ordine α'_π sulle conclusioni, tale che $\alpha'_\pi \upharpoonright_\Gamma = \alpha_\pi$, allora esiste sempre una prova sequenzializzata di $\vdash \Theta : \alpha$ con α una varietà d'ordine seriale-parallela sull'insieme delle conclusioni Γ tale che $\alpha \subseteq \alpha_\pi$*

1. *La rete β induce sulle conclusioni una varietà d'ordine seriale-parallela. Procediamo per induzione sulla taglia della rete. Ad ogni passo di induzione ci sono tre casi da considerare:*

(a) *l'ultimo legame della rete è un legame $!$, oppure un legame asincrono non strutturale, allora*

- i. si rimuovono i legami corrispondenti;*
- ii. ricorsivamente si applica la sequenzializzazione alla rete restante;*
- iii. si completa la dimostrazione del calcolo dei sequenti ottenuta fino a quel momento con l'aggiunta della corrispondente figura di inferenza asincrona lineare o non commutativa*

(b) *l'ultimo legame della rete è un legame strutturale diverso dall'abbandono, allora*

- i. si rimuovono i legami corrispondenti;*
- ii. ricorsivamente si applica la sequenzializzazione alla rete restante;*

- iii. si sostituisce nella dimostrazione del calcolo dei sequenti ottenuta fino a quel momento l'insieme delle formule interrogate Θ' con l'insieme Θ tale che $\Theta' \sqsubseteq \Theta$, grazie alla Proprietà 2.1 (Capitolo 2).
- (c) la rete contiene eventualmente solo legami terminali strutturali abbandono $\frac{F}{\overline{F}}$, allora
- i. si rimuovono i legami corrispondenti;
 - ii. ricorsivamente si applica la sequenzializzazione alla rete restante β' ;
 - iii. mediante la Proprietà 2.1, si sostituisce nella prova Θ al posto dell'insieme Θ' , con $\Theta' \sqsubseteq \Theta$, poi
 - A. se la premessa dell'abbandono è focalizzante in β' (rispettivamente, una formula asincrona), allora:
 - si rimuove il legame di abbandono,
 - ricorsivamente si applica la procedura di sequenzializzazione alla rete risultante,
 - si completa la dimostrazione mediante l'aggiunta di un di un passo di Decisione (preceduto da un passo di Reazione nel caso che F sia asincrona) che ha come formula principale la conclusione dell'abbandono;
 - B. se $F \notin \text{foc}(\beta')$, dato che β' è sincrona libera, per il Teorema di focalizzazione esiste un $G \in \text{foc}(\beta')$
 - ▷ G non è atomico, allora:
 - si rimuove il legame focalizzante corrispondente, e si ottiene una rete (eventualmente, due sotto reti se il legame è binario β'_1, β'_2);
 - si aggiunge il legame dell'abbandono alla sotto rete che contiene tra le conclusioni, la formula F , e ricorsivamente si applica la procedura di sequenzializzazione alla sotto rete così ottenuta (eventualmente, alle due sotto reti ottenute per rimozione del legame focalizzante binario);
 - si combina(no) la(e) risultante(i) sotto dimostrazioni focalizzate con la corrispondente figura di inferenza (eventualmente binaria) del calcolo focalizzato.
 - ▷ G è atomico, allora, β' è un legame assioma e tutta la rete β è sequenzializzata con la figura di identità

$$\overline{\vdash \Theta', F: F^\perp}$$

- (d) *la rete non contiene alcun legame terminale asincrono, ed almeno una conclusione sincrona;*
- i. mediante il Teorema 3.5 si sceglie una conclusione sincrona che sia focalizzante, si rimuove il legame corrispondente dalla rete considerata;*
 - ii. ricorsivamente si applica la sequenzializzazione a(lle) sotto-rete(i) così ottenuta(e);*
 - iii. si combina(no) la(e) dimostrazione(i) del calcolo dei sequenti risultante(i) con la corrispondente figura di inferenza sincrona;*
- (e) *se la rete non contiene conclusioni sincrone nè asincrone allora deve essere un legame assioma, e la sua sequenzializzazione si riduce banalmente al seguente Identità [I].*

2. *Altrimenti, si trasforma la rete in una rete con un solo legame, grazie all'aggiunta di un legame generalizzato di tipo \mathfrak{A} . La varietà d'ordine su un punto è ovviamente seriale parallela, e procediamo come in 1.*

Osservazione 5.3 .

1. **Completezza di Σ_3^c** — *La precedente procedura di sequenzializzazione limitatamente al caso lineare fornisce una dimostrazione alternativa a quella data da Andreoli della completezza del Calcolo focalizzato lineare Σ_3^c , presentato nella Tavola 2.2 del Capitolo 2.*
2. **NL** — *Data una rete non-commutativa asincrona libera non ridotta ad un legame assioma, allora per la proprietà di focalizzazione sappiamo che esiste sempre una conclusione che etichetta un blocco (sotto struttura) di legami consecutivi che sono ereditariamente sequenzializzabili, cioè, il legame focalizzante è tale che i suoi sotto legami (premesse) se sono sincroni (o atomo positivi) sono al loro volta immediatamente sequenzializzabili.*

In particolare, se la rete asincrona libera è puramente moltiplicativa allora esisterà sempre un legame ereditariamente scindente (sequenzializzabile).

La procedura di sequenzializzazione focalizzata descritta sopra ci guiderà verso la ricerca del calcolo focalizzato per il frammento completo della logica non-commutativa. Questo obiettivo verrà raggiunto nella prossima sezione.

5.3 Calcolo dei sequenti focalizzato per l'intero frammento di NL

La procedura di focalizzazione per l'intero frammento proposizionale della logica non-commutativa si articola nei seguenti tre principali passi :

1. normalizzazione delle regole strutturali;
2. normalizzazione delle regole logiche;
3. normalizzazione dell'entropia

Il primo passo di normalizzazione è stato già affrontato nel Capitolo 2, dove è stato presentato il Calcolo Diadico Σ_2 , nella Tavola 2.1. Ricordiamo brevemente che ale passo consiste nel ritardare quanto più possibile tutte le istanze delle regole di contrazione ed indebolimento durante il processo (dal basso verso l'alto) di costruzione di una prova, in maniera tale che queste regole vengono applicate solo quando sono realmente necessarie nella prova. E', infatti, sempre possibile permutare l'indebolimento con le altre regole verso le foglie della dimostrazione. Diversamente, la contrazione non non permuta con le istanze di $\otimes, \odot, (cut), centro, ?$. La soluzione consiste nell'applicare l'indebolimento solamente a livello delle foglie della prova, mentre la contrazione è consentita immediatamente prima di ogni inferenza con la quale essa non permuta.

Il secondo passo di normalizzazione, concernente le regole logiche è stato solo parzialmente affrontato nel Capitolo 2, limitatamente al frammento puramente commutativo lineare (si veda il Calcolo focalizzato lineare Σ_3^c nella Tavola 5.1). Infine il puro frammento moltiplicativo misto ad entropia è stato normalizzato nel Capitolo precedente (Sistema Σ_{mnl}^f).

Occorre infine sincronizzare in un unico Calcolo dei sequenti focalizzati i risultati sui singoli frammenti ottenuti fino adesso. Questo obiettivo verrà raggiunto in due passi:

- Sistema Triadico Σ_3' (con entropia, Tavola 5.1);
- Sistema Triadico Σ_3 (senza entropia, Tavola 5.2).

5.3.1 Focalizzazione delle regole logiche

Il punto di partenza è il Calcolo dei Sequenti diadici Σ_2 della Tavola 2.1.

Lemma 5.3 (Permutabilità asincrona) *Sia π una prova in Σ_2 di $\Theta : \omega * A$ in Σ_2 . Se A è asincrona, allora è principale, cioè, conclusione dell'ultima regola di inferenza.*

DIMOSTRAZIONE — Assumiamo solo la proprietà dell'eliminazione dei tagli per Σ_2 (la proprietà vale, infatti, già per Σ ; si veda [45]).

1. $A = B \vee C$, allora basta tagliare π con la η -espansione di $\Theta : (B \parallel C) * C^\perp \otimes B^\perp$, ed otteniamo la dimostrazione π' di $\Theta : \omega * (B \parallel C)$. Per la proprietà dell'eliminazione dei tagli possiamo sempre ottenere una prova senza tagli di π' , dalla quale deriviamo, per mezzo di una istanza di regola- \wp , una prova $\Theta : \omega * B \wp C$.

Il caso $A = B \wp C$ è analogo

2. $A = B \& C$ è analogo ai precedenti. con l'unica differenza che devono essere applicate due istanze di regola del taglio: una tra una copia di π e la η -espansione di $\Theta : B * B^\perp \oplus C^\perp$ ed una seconda istanza di taglio tra un'altra copia di π e la η -espansione $\Theta : C * B^\perp \oplus C^\perp$. Per l'eliminazione dei tagli, esistono due dimostrazioni equivalenti di π' e π'' , con, rispettivamente, le stesse conclusioni. Infine da π' e π'' , mediante una istanza di regola del $\&$ deriviamo una prova di $\Theta : \omega * B \& C$.

3. $A = ?B$. Per la Proprietà 2.1 è possibile sempre sostituire nella prova π l'insieme delle formule interrogate Θ con l'insieme Θ, B . Possiamo poi tagliare la prova di $\Theta, B : \omega * ?B$ con la η -espansione di $\Theta, B : !B^\perp$, ed ottenere una prova di $\Theta, B : \omega$. Infine, dalla prova senza tagli di π' deriviamo una prova di $\Theta, B : \omega * ?B$ mediante una istanza di regola di $?$.

4. Il caso in cui A è una costante \perp oppure \top è banale.

□

5.3.2 Sincronizzazione delle regole positive

Questa sezione completa il secondo passo di normalizzazione, rappresentato dal Calcolo dei Sequenti Triadico con entropia Σ'_3 , dove tutte le regole, eccetto l'entropia, sono state focalizzate.

Definizione 5.3 (sequenti di Σ'_3) *Un sequente di Σ'_3 ha una delle seguenti forme:*

- $\vdash \Theta : \omega * F$; dove $\omega * F$ è una varietà d'ordine seriale-parallela e Θ è un insieme di formule interrogate;

- $\vdash \Theta : \omega \mid F$, dove ω è un ordine seriale-parallelo su occorrenze di formule non asincrone ed F è una formula; $\omega \mid F$ induce la varietà d'ordine seriale-parallela $\omega * F$.

Le regole del calcolo dei sequenti Σ'_3 sono date nella Tavola 5.1. Gli ordini e le varietà d'ordine maneggiate dalle regole del calcolo sono seriali-parallele.

La dimostrazione della correttezza del Sistema Σ'_3 non presenta particolari problemi: ogni sequente $\vdash \Theta : \omega \mid F$ viene *transdotto* in un sequente $\vdash \Theta : \omega * F$. Costruttivamente si mostra che le figure di inferenza di Σ'_3 sono semplicemente ottenute da quelle del Sistema Σ_2 aggiungendo opportunamente (per trasduzione), la barra di focalizzazione \mid nei sequenti che sono, rispettivamente, premesse o conclusioni dell'inferenza scelta. Il Sistema Triadico Σ'_3 contiene inoltre delle specifiche regole strutturali (Decisione e Reazione) che divengono banali non appena vengono transdotte nel Sistema Σ_2 .

Mostriamo di seguito solo alcuni casi principali della procedura di trasformazione $\Sigma'_3 \rightsquigarrow \Sigma_2$:

$$\frac{\vdash \Theta : \omega * F}{\vdash \Theta : \omega \mid F} \text{Reazione} \quad \rightsquigarrow \quad \vdash \Theta : \omega * F$$

$$\frac{}{\vdash \Theta', X : X^\perp} I_2 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\vdash \Theta', X : X, X^\perp}{\vdash \Theta, X : X^\perp} \text{Assorbimento}$$

$$\frac{\vdash \Theta : \omega \mid F}{\vdash \Theta : \omega * F} \text{Decisione}_1 \quad \rightsquigarrow \quad \vdash \Theta : \omega * F$$

$$\frac{\vdash \Theta', F : \omega \mid F}{\vdash \Theta', F : \omega} \text{Decisione}_2 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\vdash \Theta', F : \omega * F}{\vdash \Theta', F : \omega} \text{Assorbimento}$$

Per mostrare la completezza di Σ'_3 , dobbiamo mostrare come trasformare ogni prova π di Σ_2 in una prova equivalente π di Σ'_3 . A tale scopo abbiamo bisogno di alcune proprietà di *invertibilità* delle regole sincrone. I Lemmi di Inversione (mostrati di seguito) permettono la permutabilità dei blocchi ininterrotti

di inferenze sincrone (sezioni critiche).

Identities: X è un atomo positivo

$$\frac{}{\vdash \Theta : X^\perp | X} I_1 \quad \frac{}{\vdash \Theta, X^\perp : X} I_2$$

Entropia: $\omega' \triangleleft \omega$

$$\frac{\vdash \Theta : \omega * F}{\vdash \Theta : \omega' * F} \quad \frac{\vdash \Theta : \omega | F}{\vdash \Theta : \omega' | F}$$

Regole sincrone: ω, ω' sono prive di formule asincrone

$$\frac{\vdash \Theta : \omega'' | F \quad \vdash \Theta : \omega' | G}{\vdash \Theta : \omega' < \omega'' | F \odot G} \odot \quad \frac{\vdash \Theta : \omega | F \quad \vdash \Theta : \omega' | G}{\vdash \Theta : \omega || \omega' | F \otimes G} \otimes$$

$$\frac{\vdash \Theta : \omega | F}{\vdash \Theta : \omega | F \oplus G} \oplus_1 \quad \frac{\vdash \Theta : \omega | G}{\vdash \Theta : \omega | F \oplus G} \oplus_2$$

$$\frac{}{\vdash \Theta : \mathbf{1}} \mathbf{1} \quad \frac{\vdash \Theta : F}{\vdash \Theta : !F} !$$

Regole asincrone

$$\frac{\vdash \Theta : \omega * F \quad \vdash \Theta : \omega * G}{\vdash \Theta : \omega * F \& G} \&$$

$$\frac{\vdash \Theta : \omega * (F || G)}{\vdash \Theta : \omega * F \wp G} \wp \quad \frac{\vdash \Theta : \omega * (F < G)}{\vdash \Theta : \omega * F \nabla G} \nabla$$

$$\frac{}{\vdash \Theta : \omega * \top} \top \quad \frac{\vdash \Theta : \bar{\omega}}{\vdash \Theta : \omega * \perp} \perp$$

$$\frac{\vdash \Theta, F : \bar{\omega}}{\vdash \Theta : \omega * ?F} ?$$

Reazione: F non è sincrone nè una atomo positivo

$$\frac{\vdash \Theta : \omega * F}{\vdash \Theta : \omega | F} \mathbf{R}$$

Decisione: F non è un atomo negativo ed ω è priva di formule asincrone

$$\frac{\vdash \Theta : \omega | F}{\vdash \Theta : \omega * F} \mathbf{D}_1 \quad \frac{\vdash \Theta, F : \omega | F}{\vdash \Theta, F : \bar{\omega}} \mathbf{D}_2$$

Tabella 5.1: Sistema Triadico con Entropia Σ'_3

Le proprietà di invertibilità sincrona stabiliscono che in una prova esistono sempre delle sezioni critiche di inferenze sincrone che possono essere spostate verso la radice della dimostrazione se questa risulta priva di conclusioni asincrone.

L'analogo dei Lemmi di invertibilità è dato dalle proprietà dell'esistenza di legami focalizzanti per le reti dimostrative.

Lemma 5.4 (\otimes -inversione) *Siano ω, ω' ordini seriali-paralleli su insiemi disgiunti, e sia F una formula sincrona o un atomo positivo, ed H sia diversa da un atomo positivo.*

1. Se $\vdash \Theta : \omega[F] \mid H = \alpha$ e $\vdash \Theta : \omega' * G = \beta$ sono derivabili, allora sarà dimostrabile anche

$$\vdash \Theta : \omega[F/(F \otimes G \parallel \omega')] \mid H$$

2. Se $\vdash \Theta : \omega * F$ e $\vdash \Theta : \omega'[G] \mid H = \beta$ sono derivabili, allora sarà dimostrabile anche

$$\vdash \Theta : \omega'[G/(F \otimes G \parallel \omega)] \mid H$$

DIMOSTRAZIONE — Ci limitiamo a mostrare la (1), l'altro caso essendo analogo. Usiamo una doppia induzione dato che due differenti generi di sequenti (a seconda della presenza o meno della barra “ \mid ” sono intrecciati nella derivazione in una prova.

Sia $R(n)$ la seguente ipotesi di induzione

$$R(n) = R_a(n) \text{ e } R_b(n-1)$$

dove

- $R_a(n)$: se $\vdash \Theta : \omega[F] \mid H$ e $\vdash \Theta : \omega' * G$ hanno le prove, rispettivamente, π e π' la cui *altezza totale*² non supera n , allora $\vdash \Theta : \omega[F/(F \otimes G \parallel \omega')] \mid H$ è derivabile.
- $R_b(n)$: $\vdash \Theta : \omega[F] * \omega''$ e $\vdash \Theta : \omega' * G$ hanno prove la cui altezza totale non supera n , allora $\vdash \Theta : \omega[F/(F \otimes G \parallel \omega')] * \omega''$ è derivabile.

²Se π è una prova del calcolo dei sequenti

$$\frac{\pi_1 \quad \pi_2}{s} = \pi$$

allora l'altezza di π è $h(\pi) = 1 + \max\{h(\pi_1), h(\pi_2)\}$. Il numero delle premesse può essere nullo, ed in tal caso l'altezza della prova è 1.

Assumiamo che valga $R(n)$ e proviamo che vale anche $R(n+1)$.

1. l'ultima regola di π è una istanza di entropia

$$\frac{\pi}{\vdash \Theta : \omega''[F] | H} \omega'' \triangleleft \omega$$

allora applichiamo l'ipotesi di induzione $R_a(n)$ ed infine concludiamo con $R_a(n+1)$ mediante un passo di entropia

$$\frac{\pi}{\vdash \Theta : \omega''[F/F \otimes G || \omega'] | H} \text{entropia}$$

2. l'ultima regola di π è una istanza di regola sincrona:

$$\frac{\pi_1 \quad \pi_2}{\vdash \Theta : \omega[F] | H_1 \quad \vdash \Theta : \omega'' | H_2} \odot$$

per ipotesi di induzione $R_a(n)$ esiste una prova di $\vdash \Theta : \omega[F/F \otimes G || \omega'] * H_1$ de cui mediante una istanza di regola \odot concludiamo $R(n+1)$;

3. l'ultima regola di π è una Reazione, allora, H è una formula asincrona, oppure un atomo negativo:
 - $H = H_1 \wp H_2$. Per il Lemma 5.3 sappiamo che l'ultima regola è una istanza di regola \wp ,

$$\frac{\vdots}{\vdash \Theta : \omega[F] * (H_1 || H_2)} \wp$$

$$\pi \frac{\vdash \Theta : \omega[F] * H_1 \wp H_2}{\vdash \Theta : \omega[F] | H_1 \wp H_2} \text{Reazione}$$

possiamo applicare l'ipotesi di induzione $R_b(n-1)$ alla prova π' e alla prova di $\vdash \Theta : \omega' * G$ ed otteniamo una prova di $\vdash \Theta : \omega[F/F \otimes G || \omega'] * (H_1 || H_2)$, da cui per mezzo di una istanza di regola \wp e di una Reazione otteniamo una prova di $\vdash \Theta : \omega[F/F \otimes G || \omega'] | H$;

Lemma 5.5 (\odot -inversione) *Siano ω, ω' ordini seriali-paralleli su insiemi disgiunti di occorrenze di formule non asincrone, e sia F una formula sincrona o un atomo positivo, e sia H una formula diversa da un atomo positivo.*

1. *Se $\omega[F] \mid H$ è e $\omega' * G$ sono derivabili, allora $\omega[F/(F \odot G < \omega')] \mid H$ è derivabile.*
2. *Se $\omega * F$ e $\omega'[G] \mid H$ sono derivabili, allora $\omega'[G/(\omega < F \odot G)] \mid H$ è derivabile.*

DIMOSTRAZIONE — La dimostrazione è per doppia induzione, analogamente a quella del precedente Lemma 5.4. \square

Lemma 5.6 (\oplus -inversione) *Sia ω un ordine seriale-parallelo su un insieme di occorrenze di formule non asincrone e sia F una formula sincrona o un atomo positivo. Se $\omega[F] \mid H$ è derivabile, allora anche $\omega[F/(F \oplus G)] \mid H$ è derivabile*

DIMOSTRAZIONE — La dimostrazione è analoga a quella del Lemma 5.4. \square

Lemma 5.7 (Assorbimento) *Se $\vdash \Theta, F : \omega * F$ è dimostrabile in Σ'_3 allora lo sarà anche $\vdash \Theta, F : \omega$.*

DIMOSTRAZIONE — Per semplice induzione sull'altezza della prova di $\vdash \Theta, F : \omega * F$. \square

Teorema 5.3 (Completezza di Σ'_3) . *Una prova π di $\vdash \Theta : \omega * F$ in Σ_2 , può sempre essere trasformata in una prova equivalente π di $\vdash \Theta : \omega * F$ in Σ'_3*

DIMOSTRAZIONE — Per induzione sull'altezza di π .

- π è un assioma $\frac{}{\vdash \Theta : X \vdash * X}$. Consideriamo, l'assioma $\frac{}{\vdash \Theta : X \vdash \top X}$ per X atomo positivo. Mediante una semplice istanza di Decisione D_1 deriviamo la prova di $\frac{}{\vdash \Theta : X \vdash * X}$.

Analogamente se π termina con una istanza di regola per la costante 1 oppure \top .

- Se $\vdash \Theta : \alpha$ contiene una conclusione asincrona, allora per il Lemma 5.3, possiamo sempre immaginare che tale formula sia principale, cioè, introdotta dall'ultima istanza della regola asincrona di π .

- Se l'ultima regola è un Assorbimento

$$\pi \frac{\pi' \frac{\vdash \Theta, F : \omega * F}{\vdash \Theta, F : \bar{\omega}}}{\vdash \Theta, F : \bar{\omega}} \text{centro}$$

grazie al Lemma 5.7 applicato alla prova π' esiste una prova di $\vdash \Theta, F : \bar{\omega}$.

- Se l'ultima regola è una istanza di !

$$\pi \frac{\pi' \frac{\vdash \Theta : F}{\vdash \Theta : !F}}{\vdash \Theta : !F} !$$

allora, per l'ipotesi di induzione applicata alla prova π' esiste una prova equivalente di π' in Σ_2 da cui mediante una istanza di regola ! deriviamo una prova di π .

Analogamente se l'ultima regola è l'Entropia.

- Se l'ultima regola di π è una istanza di \otimes (simile il caso della regola \odot oppure \oplus_i),

$$\pi \frac{\pi' \frac{\vdash \Theta : \omega * F}{\vdash \Theta : (\omega \parallel \omega') * F \otimes G} \quad \pi'' \frac{\vdash \Theta : \omega' * G}{\vdash \Theta : \omega' * G}}{\vdash \Theta : (\omega \parallel \omega') * F \otimes G} \otimes$$

– entrambe F e G sono formule asincrone oppure atomi negativi; allora per ipotesi di induzione esiste rispettivamente una prova di $\vdash \Theta : \omega * F$ ed una di $\vdash \Theta : \omega' * G$ dalle quali possiamo inferire la seguente prova

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \frac{\vdash \Theta : \omega * F}{\vdash \Theta : \omega | F} \text{Reazione} \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \frac{\vdash \Theta : \omega' * G}{\vdash \Theta : \omega' | G} \text{Reazione} \end{array}}{\frac{\vdash \Theta : (\omega \parallel \omega') | F \otimes G}{\vdash \Theta : (\omega \parallel \omega') * F \otimes G} \otimes} \otimes$$

$$\pi \frac{\vdash \Theta : (\omega \parallel \omega') | F \otimes G}{\vdash \Theta : (\omega \parallel \omega') * F \otimes G} \text{Decisione}_1$$

– F oppure G è una formula sincrona o un atomo positivo; allora facciamo un passo avanti (verso l'alto) nella prova e guardiamo alla penultima regola di inferenza. Ci sono diversi casi in cui è sufficiente applicare l'ipotesi di induzione. Consideriamo pertanto solo i casi cruciali in cui la regola è una Decisione (gli altri casi sono più semplici)

1. se la Decisione ha focus F allora banale;
2. se la Decisione ha focus $H \neq F$

$$\frac{\vdots}{\frac{\vdash \Theta : \alpha_H[F] | H}{\vdash \Theta : \omega * F = \alpha} \text{Decisione}_1}$$

allora applichiamo il Lemma di Inversione 5.4 alle prove di $\vdash \Theta : \alpha_H[F] | H$ e $\vdash \Theta : \omega' * G$ ed otteniamo la dimostrazione di

$$\vdash \Theta : \alpha_H[F/F \otimes G \parallel \omega'] | H$$

Sostituiamo nella varietà d'ordine $\alpha = \omega * F$ il punto F con l'ordine $F \otimes G \parallel \omega'$ ed otteniamo l'uguaglianza

$$\alpha_H[F/F \otimes G \parallel \omega'] * H = \omega * (F \parallel \omega')$$

che per la proprietà di focalizzazione e quella dell'incollatura delle varietà d'ordine, risulta uguale a $(\omega \parallel \omega') * F \otimes G$. Infine concludiamo,

$$\frac{\vdots}{\frac{\vdash \Theta : \alpha_H[F/F \otimes G \parallel \omega'] | H}{\vdash \Theta : \omega \parallel \omega' * F \otimes G} \text{Decisione}_1}$$

3. Se la Decisione ha come focus la formula $H \in \Theta$, allora procediamo in maniera analoga al caso appena esaminato

□

5.3.3 Focalizzazione dell'Entropia

Definizione 5.4 (Σ_3) . Il calcolo dei sequenti Σ_3 (Tavola 5.2) è ottenuto dal calcolo dei sequenti Σ'_3 (Tavola 5.1)

1. rimuovendo la regola di Entropia;
2. rimpiazzando la regola del \odot con la nuova regola ammissibile del Calcolo focalizzato moltiplicativo Σ_{mnl}^f (della Tavola 4.1)

$$\frac{\vdash \Theta : \Delta_Y(\omega) | F \quad \vdash \Theta : \Delta_X(\omega) | G}{\vdash \Theta : \omega | F \odot G} \odot$$

se X, Y è una partizione ammissibile di ω (Definizione 4.1).

Teorema 5.4 (Completezza di Σ_3) . Una prova π di $\vdash \Theta : \alpha$ è dimostrabile in Σ'_3 se e solo se π è dimostrabile in Σ_3 con una varietà $\alpha' \subseteq \alpha$.

DIMOSTRAZIONE — La dimostrazione segue come semplice conseguenza della proprietà sull'ammissibilità di una partizione, Lemma 4.3, e del Teorema di Minimalità 4.1. \square

5.4 Ottimalità del risultato

Per il Teorema 5.4 (conseguenza di quello sulla Minimalità 4.1), data una prova di NL siamo sempre in grado di trovare grazie alla focalizzazione una prova equivalente a quella data che fa uso della più piccola quantità di entropia necessaria. Ciò vuol dire che il Sistema Focalizzato Σ_3 rappresenta la soluzione migliore al problema della focalizzazione della Logica Non-commutativa, basata sulla scelta delle varietà d'ordini seriali-parallele.

Una versione forte della focalizzazione per le prove non commutative dovrebbe prendere in considerazione prove di NL con varietà d'ordine non necessariamente seriali-parallele.

[FOCALIZZAZIONE FORTE]:

Data una prova π non commutativa della varietà d'ordine α , allora esiste sempre una prova equivalente focalizzata con la medesima varietà d'ordine.

Come al solito tutti gli ordini e le varietà d'ordine maneggiate dal calcolo sono seriali-parallele.

Identities: X è un atomo positivo

$$\frac{}{\vdash \Theta : X^\perp | X} I_1 \quad \frac{}{\vdash \Theta, X^\perp : X} I_2$$

Regole sincrone: ω, ω' sono su insiemi privi di formule asincrone

$$\frac{\vdash \Theta : \Delta_Y(\omega) | F \quad \vdash \Theta : \Delta_X(\omega) | G}{\vdash \Theta : \omega | F \odot G} \odot \quad (X, Y) \text{ è ammissibile}$$

$$\frac{\vdash \Theta : \omega | F \quad \vdash \Theta : \omega' | G}{\vdash \Theta : \omega || \omega' | F \otimes G} \otimes$$

$$\frac{\vdash \Theta : \omega | F}{\vdash \Theta : \omega | F \oplus G} \oplus_1 \quad \frac{\vdash \Theta : \omega | G}{\vdash \Theta : \omega | F \oplus G} \oplus_2$$

$$\frac{}{\vdash \Theta : \mathbf{1}} \mathbf{1} \quad \frac{\vdash \Theta : F}{\vdash \Theta : !F} !$$

Regole asincrone

$$\frac{\vdash \Theta : \omega * F \quad \vdash \Theta : \omega * G}{\vdash \Theta : \omega * F \& G} \&$$

$$\frac{\vdash \Theta : \omega * (F || G)}{\vdash \Theta : \omega * F \wp G} \wp$$

$$\frac{\vdash \Theta : \omega * (F < G)}{\vdash \Theta : \omega * F \nabla G} \nabla$$

$$\frac{}{\vdash \Theta : \omega * \top} \top \quad \frac{\vdash \Theta : \bar{\omega}}{\vdash \Theta : \omega * \perp} \perp \quad \frac{\vdash \Theta, F : \bar{\omega}}{\vdash \Theta : \omega * ? F} ?$$

Reazione: F non è sincrona nè un atomo positivo

$$\frac{\vdash \Theta : \omega * F}{\vdash \Theta : \omega | F} \mathbf{R}$$

Decisione: F non è un atomo negativo ed ω è su un insieme di formule non asincrone

$$\frac{\vdash \Theta : \omega | F}{\vdash \Theta : \omega * F} \mathbf{D}_1 \quad \frac{\vdash \Theta, F : \omega | F}{\vdash \Theta, F : \bar{\omega}} \mathbf{D}_2$$

Tabella 5.2: Calcolo dei sequenti focalizzato Σ_3 per NL

Bibliografia

- [1] V. M. Abrusci Non-commutative proof-nets. *LMSLNS*, vol. 222, Cambridge University Press. Cambridge, 1995.
- [2] V. M. Abrusci Modules in Non-commutative Logic. *Lectures Notes in Computer Science*, (1581), Springer, 1999.
- [3] V.M. Abrusci and P. Ruet. Non commutative logic I: the multiplicative fragment. *Annals of Pure and Applied Logic*, 1999.
- [4] J-M. Andreoli. Proposition pour une synthèse des paradigmes de la programmation logique et de la programmation par objets. These de Doctorat de l'Universite Paris 6, spécialité Informatique. Juin 1990.
- [5] J-M. Andreoli. Logic programming with focusing proofs in linear logic. *Journal of Logic and Computation*, 2(3), 1992.
- [6] J-M. Andreoli and R. Maieli. Focusing and Proof-nets in Linear and Non-commutative logic. *Proc. of LPAR'99*, LNAI (1581), 1999.
- [7] J-M. Andreoli and R. Pareschi. LO and behold! concurrent structured processes. In *Proc. of OOPSLA/ECOOP'90*, Ottawa, Canada, 1990.
- [8] H. Barendregt. *The lambda-calculus: its syntax and semantics*. North Holland, 1980.
- [9] A. Colmerauer, H. Kanoui, P. Russel, R. Pasero. Une Systeme de Communication Homme-Machine en Francais. Groupe de Recherche en Intelligence Artificielle. Université d'Aix-Marseille, 1973.
- [10] V. Danos, J. B Joinet e H. Schellinx. A new deconstructive logic: linear logic. In *Preprint 936, Dept. of Mathematics, University of Utrecht*. Apparirà *Journal of Symbolic Logic*, 1995.

- [11] V. Danos, L. Regnier. The structure of multiplicatives. *Arch. Math. Logic* 28(3) (1989) 181-203.
- [12] A. Demaille. *Logique linéaires hybrides et leurs modalités: théories et applications*. Thèse de Doctorat, Ec.Nat.Sup.Télécommunications, 1999.
- [13] G. Gentzen. The collected works of Gehrard Gentzen. *Ed. Szabo. North Holland*, Amsterdam, 1969. SBN 7204-2254-X.
- [14] J-Y. Girard. Linear logic. *Theoretical Computer Science*, 50:1-102, 1987.
- [15] J-Y. Girard. Towards a geometry of interaction. *Contemp. Math.* 92 (1989) 69-108.
- [16] J-Y. Girard. Geometry of interaction I: interpretation of system F . In Ferro, Bonotto, Valentini, e Zanardo editori, *Logic Colloquium '88*, Amsterdam, 1989.
- [17] J-Y. Girard, Y. Lafont, P. Taylor. Proofs and Types. Cambridge tracts in theoretical computer science. *Cambridge University Press*, Cambridge, 1990.
- [18] J-Y. Girard. A new constructive logic: classical logic. *Mathematical Structures in Computer Science*, 1(3):225-296,1991.
- [19] J-Y. Girard. On the unity of logic. *Annals of Pure and Applied Logic* 59 (1993) 201-217.
- [20] J-Y. Girard. A new parallel syntax for additives. .
- [21] J-Y. Girard. *Linear Logic: its syntax and semantics*. Cambridge University Press, LMSLNS 222, 1995.
- [22] J-Y. Girard. On the meaning of logical rules I: syntax vs.semantics. In U.Berger and H.Schwichtenberg (Ed.), *Computational Logic*, Heidelberg, 1999. *Springer Verlag*. NATO series F 165.
- [23] J-Y. Girard. On the meaning of logical rules II: multiplicative/additive case. *Prépublication*. Institut de Mathématique de Luminy, Marseille, 1998.

- [24] J-Y. Girard. Comunicazione presentata al *Workshop on Non-commutative Logic*, nel quadro del programma di ricerca europea "Training and Mobility of Researchers in Linear Logic". Frascati, Aprile 1999.
- [25] J-Y. Girard. *Locus Solus. Prépublication*. Institut de Mathématique de Luminy, Marseille, 1999.
- [26] J. Herbrand. Researches in the Theory of Demonstration. In *From Frege to Godel: a source book in mathematical logic, 1879-1931*, J. van Heijenoort (Ed.), Harvard University Press, Mass., 1967, 525-581.
- [27] J. R. Hindley and J. P. Seldin. To H.B. Curry: Essays on combinatory logic, Lambda Calculus and Formalism. Accademic Press (1980).
- [28] J. S. Hodas and D. Miller. Logic programming in a fragment of intuitionistic linear logic. *Journal of Information and Computation*, 110(2):327-365, 1994.
- [29] W. A. Howard. The formulae-as-types notion of construction. In [27] 479-490.
- [30] S. C. Kleene. Permutability of inferences in Gentzen's calculi LK and LJ. *Memories of the American Mathematical Society*, 10:1-26, 1952.
- [31] R. A. Kowalski. Predicate Logic as a Programming Language. IFIP 74, 569-574.
- [32] J. L. Krivine and M. Parigot. Programming with proofs. 1990.
- [33] Y. Lafont. Interaction nets. In *Proc. of POPL'90*, 1989.
- [34] J. Lambek. The mathematics of sentence structure. In *Amer. Math. Monthly*, 65(3):154:170, 1958.
- [35] R. Maieli and P. Ruet. Non-commutative logic III : focusing proofs. *Prépublication*. Institut de Mathématique de Luminy, Marseille, 2000.
- [36] D. Miller. Lexical scoping as universal quantification. In *Proc. of the 6th International Conference on Logic Programming*, Lisboa, Portugal, 1989.
- [37] D. Miller. Forum: A multiple-conclusion specification logic. *Theoretical Computer Science*, 165(1):201-232, 1996.

- [38] D. Miller, G. Nadathur, F. Pfenning, and A. Scedrov. Uniform proofs as a foundation for logic programming. *Annals of Pure and Applied Logic*, 51:125–157, 1991.
- [39] R. Mohring. *Computationally tractable classes of ordered sets*. ASI Series 222. NATO, 1989.
- [40] M. Moortgat. Categorical type logics. *Handbook of Logic and Language*, MIT Press, 1996.
- [41] M. Okada. Girard’s phase semantics and an higher-order cut-elimination proof.. *Preprint Institut de Mathématiques de Luminy*, IML-CNRS, Marseille, 1994.
- [42] D. Prawitz. Natural Deduction. *Almqvist & Wiksell*, Stockolm, 1965.
- [43] C. Retoré. Pomset logic: A non-commutative extension of classical linear logic. In *Proc. of TLCA ’97*, pages 300–318, Nancy, France, 1997.
- [44] J. A. Robinson. A machine oriented logic based on the resolution principle. *Journal of the Association of Computing Machinery*, 12 (1965) 23-41.
- [45] P. Ruet. Non commutative logic II : Sequent calculus and phase semantics,1998. *Mathematical Structure in Computer Science*, 2000.