UNIVERSITÀ DEGLI STUDI "ROMA TRE"
LAUREA MAGISTRALE IN TEORIA DELLA COMUNICAZIONE
TCI – TEORIA DELLA COMPUTAZIONE E DELL'INTERAZIONE
A.A. 2012-2013
PROF. M. PEDICINI

FOGLIO LAVORO INDIVIDUALE 2 - DA RESTITUIRE PRIMA DEL 20/12/2012

COGNOME ____________________ NOME ____________________ MATRICOLA ______________

Esercizio 1. *Utilizzando lo schema di ricorsione multipla, mostrare che la funzione di Fibonacci $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (tale che $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ e $f(n+2) = f(n+1) + f(n)$, per $n > 1$), è una funzione ricorsiva.*

Esercizio 2. *Si definisca la funzione* esponenziale iterata di altezza *d:*

$$2^{[d]}(n) = \begin{cases} n & d = 0, \\ 2^{2^{[d-1]}(n)} & d > 0. \end{cases}$$

Si consideri la classe dei problemi decidibili in tempo limitato da una funzione esponenziale iterata di altezza d, per qualche d che non dipende da n. Questa classe viene detta complessitá elementare (o di Kalmar).

Dimostrare che la classe dei problemi Kalmar decidibili in tempo è anche Kalmar decidibile in spazio, ovvero che

$$\bigcup_{d \geq 1} \mathrm{DTIME}_1^{\{0,1\}}(2^{[d]}(n)) = \bigcup_{d \geq 1} \mathrm{DSPACE}_1^{\{0,1\}}(2^{[d]}(n)).$$

Esercizio 3. *Introduciamo un nuovo modello di calcolo: l'automa a pila.*

Un PDFA (push-down finite automata) è una variante dell'automa a stati finiti, ed è definito nel modo seguente:

DEFINIZIONE: *Un PDFA di alfabeto A, alfabeto della pila B e insieme degli stati Q è definito come una quadrupla (T, q_0, Z_0, F) dove*

$$T : Q \times A \cup \{\epsilon\} \times B \to Q \times B^*,$$

dove ϵ rappresenta la parola vuota, $F : Q \to \{0, 1\}$, $q_0 \in Q$ è uno stato particolare detto stato iniziale, $Z_0 \in B$ è il carattere con cui è inizializzata la pila.

Descrizione della Computazione Associata: *La pila contiene ad ogni passo di computazione una parola* $w \in B^*$ *la funzione di transizione agisce analogamente al caso degli automi finiti in base al carattere letto nella parola di input (eventualmente* ϵ*), allo stato corrente e inoltre in funzione dell'ultimo carattere della pila. La transizione è determinata dal valore* $T(q, a, b) = (q', w')$ *consiste nell'aggiornamento dello stato corrente che da* q *diventa* q' *(come nel caso dell'automa finito), il puntatore alla posizione corrente viene avanzato se* $a \neq \epsilon$ *mentre resta fermo se* $a = \epsilon$ *e l'ultimo carattere della pila viene sostituito con la parola* w' *(quindi se la pila è* wb *si ha* ww'*).*
É necessario richiedere che in corrispondenza del carattere letto ϵ *non sia possibile applicare nessuna transizione con carattere diverso da* ϵ *(altrimenti si perderebbe il determinismo).*
L'automa a pila termina la computazione quando ha letto l'ultimo carattere della parola di ingresso, ha effettuato la transizione associata e non può effettuare transizioni con carattere letto ϵ*. La configurazione finale è data da* q *e dalla pila* w*, analogamente al caso degli automi finiti, la parola di input è accettata se* $F(q) = 1$ *e viene refutata se* $F(q) = 0$*.*

a) *Definire l'algoritmo formale associato ad un automa a pila (e quindi il concetto di decidibilità per PDFA).*
b) *Fornire una maggiorazione del numero di configurazioni possibili per un PDFA in funzione della lunghezza della parola di input.*
c) *Dimostrare che ogni* X *decidibile per automa finito è anche PDFA decidibile.*
d) *Dimostrare che l'insieme* $X = \{0^p 1^p | p \in \mathbb{N}\}$ *è PDFA-decidibile.*
e) *Riadattando la dimostrazione che ogni funzione Turing computabile è ricorsiva, fornire una codifica per le configurazioni di un PDFA di alfabeto* $A = B = \{0, 1\}$ *nei naturali e mostrare che se* X *è un insieme decidibile per* $PDFA$ *allora è un insieme ricorsivo.*