Esercizi del corso LM410-Teoremi sulla Logica 1

Esercizi sul Capitolo 3 (Parte 1)

Esercizio 3.1 (Soddisfacibilità in una struttura del primo ordine)

Si consideri il linguaggio del primo ordine $\mathcal{L} = \{R\}$, dove R è un simbolo di predicato binario, e le formule seguenti di $\mathcal{L}$:

1. $\forall x \forall y \forall z(\neg R(x,x) \wedge (R(x,y) \to \neg R(y,x)) \wedge ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \to R(x,z)))$
2. $\exists x \forall y R(x,y)$
3. $\exists x \forall y R(y,x)$
4. $\forall x \exists y(R(x,y) \wedge \forall z(R(x,z) \to (z = y \vee R(y,z))))$
5. $\forall x \forall y(R(x,y) \to \exists z(R(x,z) \wedge R(z,y)))$.

Per ognuna delle tre interpretazioni di $\mathcal{L} = \{R\}$ seguenti, si chiede di determinare quali tra le formule precedenti sono realizzate, e quali non lo sono:

(a) Insieme di base : l'insieme dei naturali $\mathbb{N}$, interpretazione di R: la relazione $<$ tra interi.

(b) Insieme di base: l'insieme Q dei razionali, interpretazione di R: la relazione $<$ tra razionali.

(c) Insieme di base: l'insieme $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dei sottoinsiemi dell'insieme $\mathbb{N}$ dei naturali, interpretazione di R: la relazione $\subsetneq$ di inclusione stretta tra insiemi.

Esercizio 3.2 (Soddisfacibilità in una struttura del primo ordine)

Si consideri il linguaggio del primo ordine $\mathcal{L} = \{a, f, g, P, S\}$, dove a è un simbolo di costante, f e g sono due simboli di funzione binari, P (risp. S) è un simbolo di predicato unario (risp. binario). Siano date le formule seguenti di $\mathcal{L}$:

1. $\forall x \forall y S(f(x,y), g(x,y))$
2. $\forall x \forall y(S(g(x,y), f(x,y)) \to x = y)$
3. $\forall x \forall y(S(x,y) \to (P(x) \leftrightarrow P(y)))$
4. $\forall x \forall y((S(x,y) \wedge P(y) \wedge x \neq y) \to x = a)$
5. $\forall x \forall y((P(x) \wedge P(y)) \to (P(f(x,y)) \vee P(g(x,y))))$
6. $\forall x(\forall y(g(x,y) = g(y,x)) \to x = a)$
7. $\forall x \exists y(P(x) \to (\neg P(y) \wedge S(x,y)))$
8. $\forall x \exists y \exists z(\neg P(x) \to (y \neq z \wedge P(y) \wedge P(z) \wedge S(x,y) \wedge S(x,z)))$.

Per ognuna delle due interpretazioni di $\mathcal{L}$ seguenti, si chiede di determinare quali tra le formule precedenti sono realizzate, e quali non lo sono:

(a) – insieme di base : l'insieme dei naturali senza lo zero $\mathbb{N}^\star$
  – interpretazione di a: l'intero 1

– interpretazione di f: la funzione che associa a due interi m, n il massimo comun divisore di m ed n

– interpretazione di g: la funzione che associa a due interi m, n il minimo comune multiplo di m ed n

– interpretazione di P: il sottoinsieme di $\mathbb{N}^\star$ dei numeri primi

– interpretazione di S: la relazione di divisibilità ($S(m, n)$ è interpretato come m divide n)

(b) – insieme di base: l'insieme $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ dei sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ che sono finiti o il cui complementare è finito[1]

– interpretazione di a: l'insieme vuoto $\emptyset$

– interpretazione di f: la funzione che associa a due sottoinsiemi la loro intersezione

– interpretazione di g: la funzione che associa a due sottoinsiemi la loro unione

– interpretazione di P: il sottoinsieme di $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ i cui elementi sono gli insiemi finiti ($P(A)$ è interpretato come "A è un sottoinsieme finito di $\mathbb{N}$")

– interpretazione di S: la relazione di inclusione stretta ($S(A, B)$ è interpretato come $A \subsetneq B$).

Esercizio 3.3 (Soddisfacibilità in una struttura del primo ordine)

1. Fissiamo un linguaggio $\mathcal{L}$ del primo ordine tale che P e Q siano due variabili speciali per predicati di arietà 1 di $\mathcal{L}$.
   a) Dimostrare che, per ogni $\mathcal{L}$-struttura $\mathcal{M}$, vale $\mathcal{M} \models \forall x(P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow (\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x))$;
   b) Dimostrare che esiste una $\mathcal{L}$-struttura $\mathcal{M}$ tale che $\mathcal{M} \not\models \forall x(P(x) \vee Q(x)) \leftrightarrow (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x))$.
2. Fissiamo un linguaggio $\mathcal{L}$ del primo ordine tale che R sia una variabile speciale per predicati di arietà 2 di $\mathcal{L}$.
   a) Dimostrare che, per ogni $\mathcal{L}$-struttura $\mathcal{M}$, vale $\mathcal{M} \models \exists y \forall x R(x, y) \to \forall x \exists y R(x, y)$;
   b) Dimostrare che esiste una $\mathcal{L}$-struttura $\mathcal{M}$ tale che $\mathcal{M} \not\models \forall x \exists y R(x, y) \to \exists y \forall x R(x, y)$;
   c) Dimostrare che $\forall x \exists y R(y, x)$ è conseguenza logica delle due formule $\forall x \exists y R(x, y)$ e $\forall x \forall y(R(x, y) \to R(y, x))$;
   d) Dimostrare che
   $\forall x \forall y \forall z((R(x, y) \wedge R(y, z)) \to R(x, z)), \forall x \forall y(R(x, y) \to R(y, x)), \forall x \exists y R(x, y) \models \forall x R(x, x)$;
   e) Dimostrare che $\forall x \exists y R(x, y), \forall x \forall y \forall z((R(x, y) \wedge R(y, z)) \to R(z, x)) \not\models \forall x R(x, x)$.
3. Fissiamo un linguaggio $\mathcal{L}$ del primo ordine tale che P e Q siano due variabili speciali per predicati di arietà 1 di $\mathcal{L}$ e R sia una variabile speciale per predicati di arietà 2 di $\mathcal{L}$. Dimostrare che
   $\forall x \forall y((P(x) \wedge R(x, y)) \to Q(y)), \forall x \exists y R(x, y), \exists x P(x) \models \exists x Q(x)$.

Esercizio 3.4 (Espressività al primo ordine)

Dal punto di vista della logica del primo ordine, il metodo noto come *assiomatico-deduttivo* consiste nell'individuare un certo numero di formule chiuse (comunemente chiamate assiomi) e dedurne altre formule chiuse. L'insieme degli assiomi viene a volte chiamato *teoria*. Per scrivere (al primo ordine) gli assiomi di una determinata teoria, bisogna individuare il linguaggio entro il quale scriverli. Quasi sempre, tra i simboli necessari vi è l'uguaglianza. Dal punto di vista linguistico, l'uguaglianza è una variabile speciale per predicati di arietà 2, e si considerano pertanto linguaggi con un simbolo per l'uguaglianza. Ma si vuole anche che, in

[1] Ad esempio l'insieme $A = \{1, 2, 3\}$ è un elemento di $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ (perché A è finito), così come l'insieme $B = A^c = \{4, 5, 6, \ldots\}$ è un elemento di $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ (perché il complementare B^c di B - che è A- è finito). Invece l'insieme dei numeri pari è un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ che non è elemento di $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ (perché né lui né il suo complementare sono finiti).

una struttura per il linguaggio, il valore dell'uguaglianza sia la relazione di uguaglianza e non una qualunque relazione binaria. Per fare questo è necessario aggiungere degli assiomi ad hoc.

Nel seguito dell'esercizio, considereremo sempre linguaggi $\mathcal{L}$ con uguaglianza (cioè $= \in \mathcal{L}$) e supporremo che tutte le strutture siano *egualitarie*, cioè se $\mathcal{M}$ è una $\mathcal{L}$-struttura, vale $=_{\mathcal{M}} = \{(a,a) : a \in M\}$ (dove M è il supporto di $\mathcal{M}$).

1. Sia $\mathcal{L} = \{=, \neq\}$.
   a) Determinare una formula chiusa F_2 di $\mathcal{L}$ tale che, per ogni $\mathcal{L}$-struttura (egualitaria) $\mathcal{M}$, valga $\mathcal{M} \models F_2 \iff M$ contiene almeno due elementi;
   b) Per ogni $i \in \mathbb{N}$, $i \geqslant 2$, determinare una formula chiusa F_i di $\mathcal{L}$ tale che, per ogni $\mathcal{L}$-struttura (egualitaria) $\mathcal{M}$, valga $\mathcal{M} \models F_i \iff M$ contiene almeno i elementi;
   c) Per ogni $i \in \mathbb{N}$, $i \geqslant 2$, determinare una formula chiusa F_i di $\mathcal{L}$ tale che, per ogni $\mathcal{L}$-struttura (egualitaria) $\mathcal{M}$, valga $\mathcal{M} \models F_i \iff M$ contiene esattamente i elementi;
   d) Determinare una teoria T per $\mathcal{L}$ tale che, per ogni $\mathcal{L}$-struttura (egualitaria) $\mathcal{M}$, valga $\mathcal{M} \models T \iff M$ è un insieme infinito.
2. Scrivere gli assiomi della teoria dei gruppi in un linguaggio (con uguaglianza) contenente esattamente una variabile speciale per funzioni di arietà 2 ed una variabile speciale individuale.
3. Scrivere gli assiomi della teoria dei gruppi in un linguaggio (con uguaglianza) contenente esattamente una variabile speciale per funzioni di arietà 2.

Esercizio 3.5 (Indipendenza degli assiomi)

La teoria assiomatica degli insiemi di Zermelo è una teoria, che si denota con Z, nel linguaggio con uguaglianza $\mathcal{L} = \{=, \neq, \in, \notin\}$, dove $\in$ (così come $=$) è una variabile speciale per predicato di arietà 2. Anche in questo caso consideriamo solo $\mathcal{L}$-strutture egualitarie (cioè se $\mathcal{M}$ è una $\mathcal{L}$-struttura, vale $=_{\mathcal{M}} = \{(a,a) : a \in M\}$, dove M è il supporto di $\mathcal{M}$). Lo scopo dell'esercizio è dimostrare che l'assioma di estensionalità di Z è indipendente dall'assioma della coppia di Z.

1. L'assioma di estensionalità della teoria Z afferma che quando due insiemi hanno gli stessi elementi sono uguali. Esprimere, nel linguaggio $\mathcal{L}$, l'assioma di estensionalità, mediante una formula chiusa Ext.
2. L'assioma della coppia della teoria Z afferma che dati due insiemi a e b, esiste un insieme (unico per l'assioma di estensionalità) i cui elementi sono esattamente i due insiemi a e b di partenza (tale insieme si denota usualmente con $\{a, b\}$). Esprimere, nel linguaggio $\mathcal{L}$, l'assioma della coppia mediante una formula chiusa C.
3. Dimostrare che l'assioma di estensionalità è soddisfacibile ma non è universalmente valido: esiste una $\mathcal{L}$-struttura $\mathcal{M}_1$ tale che $\mathcal{M}_1 \models Ext$ ed una $\mathcal{L}$-struttura $\mathcal{M}_2$ tale che $\mathcal{M}_2 \not\models Ext$.
4. Dimostrare che l'assioma della coppia non è conseguenza logica dell'assioma di estensionalità, cioè che $Ext \not\models C$, ossia esiste una $\mathcal{L}$-struttura $\mathcal{M}$ tale che $\mathcal{M} \models Ext$ e $\mathcal{M} \not\models C$.
5. Dimostrare che l'assioma della coppia è soddisfacibile ma non è universalmente valido: esiste una $\mathcal{L}$-struttura $\mathcal{M}_1$ tale che $\mathcal{M}_1 \models C$ ed una $\mathcal{L}$-struttura $\mathcal{M}_2$ tale che $\mathcal{M}_2 \not\models C$.
6. Dimostrare che l'assioma di estensionalità non è conseguenza logica dell'assioma della coppia, cioè che $C \not\models Ext$, ossia esiste una $\mathcal{L}$-struttura $\mathcal{M}$ tale che $\mathcal{M} \models C$ e $\mathcal{M} \not\models Ext$.