Esercizi del corso LM410-Teoremi sulla Logica 1

Esercizi sul Capitolo 4

Esercizio 4.1 (Esempio concreto di eliminazione del taglio)

Applicare la procedura di eliminazione del taglio alla derivazione seguente di LK:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash \neg A, A$}
\RightLabel{W}
\UnaryInfC{$\vdash \neg A, A, B$}
\RightLabel{$\vee_m$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg A, A \vee B$}
\AxiomC{$\vdash \neg A, A$}
\RightLabel{W}
\UnaryInfC{$\vdash \neg A, A, B$}
\AxiomC{$\vdash \neg B, B$}
\RightLabel{W}
\UnaryInfC{$\vdash \neg B, B, A$}
\RightLabel{$\wedge_m$}
\BinaryInfC{$\vdash \neg A \wedge \neg B, B, B, A, A$}
\RightLabel{co}
\UnaryInfC{$\vdash \neg A \wedge \neg B, B, A$}
\RightLabel{$\vee_m$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg A \wedge \neg B, B \vee A$}
\RightLabel{cut}
\BinaryInfC{$\vdash \neg A, B \vee A$}
\end{prooftree}
$$

Esercizio 4.2 (Eliminazione del taglio per MALK)

Si consideri il sottosistema moltiplicativo ed additivo $MALK$ del calcolo dei sequenti classico LK, definito come segue:

- le formule di $MALK$ sono le formule del calcolo proposizionale senza le costanti logiche, dove distinguiamo gli stili dei connettivi (e non piú solo delle regole): ad esempio $A \wedge_m B$ e $A \wedge_a B$ sono due formule diverse.
- le regole di $MALK$ sono l'assioma, il taglio, le regole logiche moltiplicative e le regole logiche additive.

L'esercizio si propone di dimostrare che aggiungere a $MALK$ le regole strutturali equivale ad aggiungere a $MALK$ le due regole 0-arie R_1 ed R_2 che permettono il cambiamento di stile dei connettivi:

$$
\frac{}{\vdash \neg A \vee_a \neg B, A \wedge_m B}\, R_1 \qquad \frac{}{\vdash \neg A \vee_m \neg B, A \wedge_a B}\, R_2
$$

1. Spiegare perché dal teorema di eliminazione del taglio per LK dimostrato a lezione discende immediatamente il teorema di eliminazione del taglio per $MALK$. Dedurne che non è dimostrabile in $MALK$ il sequente vuoto.
2. Dimostrare che anche in $MALK$ le regole $\vee_m$ e $\wedge_a$ sono reversibili.
3. Dimostrare che i sequenti $\vdash \neg A \vee_a \neg B, A \wedge_m B$ e $\vdash \neg A \vee_m \neg B, A \wedge_a B$ non sono derivabili in $MALK$.
4. Dimostrare che aggiungendo a $MALK$ le regole strutturali di indebolimento e contrazione, i sequenti $\vdash \neg A \vee_a \neg B, A \wedge_m B$ e $\vdash \neg A \vee_m \neg B, A \wedge_a B$ sono derivabili.
5. Dimostrare che aggiungendo le due regole 0-arie che autorizzano il cambiamento di stile, le regole strutturali diventano "derivabili", cioè se chiamiamo $MALK'$ il calcolo dei sequenti ottenuto a partire da $MALK$ aggiungendo le regole R_1 ed R_2, allora:
   - se $\vdash \Gamma$ è derivabile in $MALK'$, allora lo sarà anche $\vdash \Gamma, A$
   - se $\vdash \Gamma, A, A$ è derivabile in $MALK'$, allora lo sarà anche $\vdash \Gamma, A$.

Esercizio 4.3 (Eliminazione del taglio per LK con l'idra)

Lo scopo dell'esercizio è fornire una dimostrazione di eliminazione del taglio per LK (in cui le regole per $\vee_m$ e per $\wedge_m$ sono tutte moltiplicative oppure tutte additive) alternativa a quella del libro, sfruttando la buona fondatezza dell'ordine multinsiemistico sull'insieme $\mathcal{M}_{fin}(\mathbb{N})$ dei multinsiemi finiti di interi naturali. Rammentiamo che un multinsieme finito di interi naturali è una funzione $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ quasi ovunque nulla, cioè $\mu(a) = 0$ salvo per un numero finito di interi naturali, e l'ordine $<_m$ tra multinsiemi di interi naturali è definito ponendo $\mu <_m \nu$ quando

- $\mu = [\,]$ e $\nu \neq [\,]$

oppure

- $\mu \neq [\,]$ e $\nu \neq [\,]$ ed esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che
  - $\mu(n) < \nu(n)$;
  - per ogni $m > n$ vale $\mu(m) = \nu(m)$.

Abbiamo dimostrato in un esercizio precedente che la relazione $<_m$ è una relazione di buon ordine sull'insieme $\mathcal{M}_{fin}(\mathbb{N})$, e pertanto non esiste una catena discendente infinita di multinsiemi: non esiste una successione $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ di multinsiemi tale che, per ogni $i \in \mathbb{N}$, vale $\mu_{i+1} < \mu_i$.

1. Per una derivazione π di LK, possiamo considerare il multinsieme $Cut(\pi)$ delle complessità delle formule di taglio contate il numero di volte in cui occorrono in π. Definire con precisione, per ogni derivazione π di LK, il multinsieme $Cut(\pi)$.
2. Definiamo ora un unico passo di riduzione (R) da applicare a qualunque taglio di tipo (L) oppure di tipo (S_2). Se c è un tale taglio, il passo (R) applicato a c consiste:
   - in un passo (L) se c è un taglio logico;
   - in un passo strutturale (S) se c è un taglio strutturale di tipo (S_2), seguito però da tanti passi logici quanti sono i tagli (necessariamente tutti di tipo (L)) creati dalla riduzione del taglio c.

   Dimostrare che se π' è ottenuta applicando un passo (R) ad un taglio logico[1] della derivazione π, allora $Cut(\pi') <_m Cut(\pi)$.
3. Considerare la derivazione π seguente:

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \vdots\end{matrix}}{\vdash \Gamma, A}\,R_1 \qquad \dfrac{\begin{matrix}\pi_2\\ \vdots\end{matrix}}{\vdash \Delta, \neg A}\,R_2}{\begin{matrix}\vdash \Gamma, \Delta\\ \vdots\end{matrix}}\,c
$$

   Supponendo che il taglio c sia di tipo (S_2), che R_1 sia una regola logica di conclusione principale A *e che* π_1 *sia senza tagli*, dimostrare che $Cut(\pi') <_m Cut(\pi)$, dove π' è la derivazione ottenuta applicando un passo (R) al taglio c di π.
   Dimostrare che invece non vale (in generale) $Cut(\pi'') <_m Cut(\pi)$, dove π'' è la derivazione ottenuta applicando un passo (S) al taglio c di π.

[1] Siamo dunque nel caso particolare in cui il passo (R) è un passo (L).

4. Se π è una derivazione quasi senza tagli tale che la regola di taglio ha come formula principale una formula atomica, mostrare che applicando un passo (S) a π si ottiene una derivazione π' tale che $Cut(\pi') <_m Cut(\pi)$.
5. Se π è una derivazione quasi senza tagli tale che la regola di taglio è di tipo (S_1) e ha come formula principale una formula non atomica, sfruttando il lemma di reversibilità si definisca un passo di riduzione che porti ad una derivazione π' tale che $Cut(\pi') <_m Cut(\pi)$.
6. Sfruttando quanto precede si definisca una procedura di eliminazione del taglio per LK in cui le regole per $\vee_m$ e per $\wedge_m$ sono tutte moltiplicative oppure tutte additive, e se ne dimostri la terminazione.