Esercizi del corso LM410-Teoremi sulla Logica 1

Esercizi sul Capitolo 5

Esercizio 5.1 (Compattezza proposizionale e Assioma di scelta)

Una delle formulazioni dell'asioma di scelta è la seguente: il prodotto di una famiglia di insiemi non vuoti è non vuoto. Ovvero: se I è un insieme e F è una funzione di dominio I tale che, per ogni $i \in I$, l'immagine $F(i)$ di i è un insieme non vuoto, che denotiamo c_i, allora esiste una funzione $f : I \to \cup_{i \in I} c_i$ tale che $f(i) \in c_i$ per ogni $i \in I$[1]. Nel caso paticolare in cui, per ogni $i \in I$, valga $c_i = \{a_i, b_i\}$, questo assioma si può esprimere come segue:

$(AS)_2$ Sia $\{a_i, b_i\}_{i \in I}$ una famiglia di insiemi di due elementi[2]. Esiste allora una funzione f di dominio I tale che, per ogni $i \in I$, vale $f(i) \in \{a_i, b_i\}$, cioè $f(i) = a_i$ oppure $f(i) = b_i$.

Vogliamo dimostrare $(AS)_2$ sfruttando il teorema di compattezza del calcolo proposizionale, senza far uso (diretto) dell'assioma di scelta.

1. Consideriamo il linguaggio proposizionale seguente: $\mathcal{L} = \{X_{(i,a_i)}, \neg X_{(i,a_i)}, X_{(i,b_i)}, \neg X_{(i,b_i)} : i \in I\}$, dove $X_{(i,a_i)}, \neg X_{(i,a_i)}, X_{(i,b_i)}, \neg X_{(i,b_i)}$ sono lettere proposizionali.
   Per ogni $i \in I$, determinare una formula A_i tale che, per ogni $\mathcal{L}$-struttura[3] δ, valga[4] $\delta(A_i) = 1 \iff$ vale una ed una sola delle due uguaglianze seguenti: $\delta(X_{(i,a_i)}) = 1, \delta(X_{(i,b_i)}) = 1$.
2. Consideriamo l'insieme di formule $\mathcal{A}_I = \{A_i : i \in I\}$, dove A_i è la formula determinata al Punto 1. Dimostrare che se esiste una funzione f di dominio I tale che, per ogni $i \in I$, vale $f(i) \in \{a_i, b_i\}$, allora esiste una distribuzione di valori di verità δ_f tale che $\delta_f \models \mathcal{A}_I$ (cioè $\delta_f(A_i) = 1$ per ogni $i \in I$).
3. Dimostrare che la soddisfacibilità dell'insieme $\mathcal{A}_I$ equivale alla conclusione di $(AS)_2$, dimostrando il viceversa del Punto 2: se esiste una distribuzione di valori di verità δ tale che $\delta \models \mathcal{A}_I$, allora esiste una funzione f_δ di dominio I tale che, per ogni $i \in I$, vale $f_\delta(i) \in \{a_i, b_i\}$.
4. Dimostrare (AS_2) sfruttando il teorema di compattezza.
5. In quali casi $(AS)_2$ si può dimostrare senza usare (neanche indirettamente) l'assioma di scelta?

Esercizio 5.2 (Compattezza proposizionale e teorema di Tychonoff)

Lo scopo dell'esercizio è fornire una dimostrazione topologica del teorema di compattezza per il calcolo proposizionale, sfruttando il teorema di Tychonoff (il prodotto di una famiglia di spazi topologici compatti è compatto con la topologia prodotto).

Sia I un insieme e $(X_i)_{i \in I}$ una famiglia di spazi topologici indiciata da I. L'insieme $\Pi_{i \in I} X_i$ prodotto della famiglia $(X_i)_{i \in I}$ è l'insieme delle funzioni di dominio I che associano ad $i \in I$ un elemento di X_i:

$$\Pi_{i \in I} X_i = \{f \in (\bigcup_{i \in I} X_i)^I : \ f(i) \in X_i \text{ per ogni } i \in I\}.$$

[1] L'idea è che questa funzione *sceglie* come immagine di ogni $i \in I$ un elemento qualsiasi di c_i, senza che venga detto *come* -in virtù di che criterio- viene scelto questo elemento di c_i.

[2] Se ad esempio $I = \mathbb{N}$, la famiglia è costituita dagli insiemi $\{a_0, b_0\}, \{a_1, b_1\}, \ldots$, ognuno dei quali contiene 2 elementi.

[3] Si rammenta che una $\mathcal{L}$-struttura proposizionale, chiamata anche distribuzione di valori di verità, è una funzione che associa ad ogni lettera proposizionale del linguaggio il valore "0" oppure il valore "1".

[4] Per una formula proposizionale A e per una distribuzione di valori di verità δ, si scrive indifferentemente $\delta \models A$ e $\delta(A) = 1$.

La base canonica della topologia prodotto sull'insieme $\Pi_{i\in I}X_i$ ha come elementi i prodotti degli aperti di ciascuno degli spazi topologici X_i, dove solo in un numero finito di casi questi aperti possono essere diversi dallo spazio X_i tutto intero. Un tipico aperto di questa base è dunque $\Pi_{i\in I}U_i$, dove U_i è un aperto di X_i, e $U_i = X_i$ salvo per un numero finito di indici $i \in I$.

Consideriamo lo spazio topologico discreto sull'insieme $\{0,1\}$, in cui tutti i sottoinsiemi sono aperti: gli aperti sono dunque $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}$. Sia $\mathcal{V}$ un insieme (di cardinalità finita o infinita arbitrariamente grande) di lettere proposizionali e consideriamo il linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ costituito dall'insieme di variabili speciali $\mathcal{V}$ e dalle negazioni delle variabili speciali di $\mathcal{V}$. Per l'insieme prodotto $\Pi_{Z\in\mathcal{V}}X_Z$, dove $X_Z = \{0,1\}$ per ogni $Z \in \mathcal{V}$, si ha
$\Pi_{Z\in\mathcal{V}}X_Z = \{\varphi \in \{0,1\}^{\mathcal{V}} : \varphi(Y) \in \{0,1\} \text{ per ogni } Y \in \mathcal{V}\} = \{0,1\}^{\mathcal{V}}$. Possiamo munire tale insieme $\Pi_{Z\in\mathcal{V}}X_Z = \{0,1\}^{\mathcal{V}}$ della topologia prodotto.

Si osservi che $\{0,1\}$ è un insieme con due elementi diversi, ed è questa l'unica caratteristica che viene usata in questo esercizio. Pertanto si può benissimo pensare che $\varphi \in \{0,1\}^{\mathcal{V}}$ sia una struttura per il linguaggio proposizionale costruito sull'insieme $\mathcal{V}$, cioè una funzione che ad ogni lettera proposizionale X di $\mathcal{V}$ associa 0 (cioè "falso") oppure 1 (cioè "vero"). Ne consegue che, per ogni formula proposizionale A costruita sull'alfabeto $\mathcal{V}$, $\varphi(A) \in \{0,1\}$ è il valore ("vero" o "falso") attribuito dalla struttura φ alla formula A.

1. Dimostrare che un generico aperto (non vuoto) della base canonica dell'insieme $\{0,1\}^{\mathcal{V}}$ munito della topologia prodotto ha la forma seguente
   $\{\varphi \in \{0,1\}^{\mathcal{V}} : \ \varphi(Z_1) = \epsilon_1, \ldots, \varphi(Z_n) = \epsilon_n, \text{ dove } n \in \mathbb{N}, Z_i \in \mathcal{V} \text{ e } \epsilon_i \in \{0,1\} \text{ per } i \in \{1,\ldots,n\}\}$.
2. Dimostrare che gli aperti della base canonica della topologia prodotto sono anche chiusi.
3. Nel seguito potrà essere utile il risultato seguente (noto con il nome di *teorema di messa in forma normale congiuntiva*): per ogni formula A esiste una formula $A' = \wedge_{i\in I} \vee_{j\in J} A_{ij}$ equivalente ad A, dove A_{ij} sono formule atomiche (cioè elementi di $\mathcal{V}$ o negazioni di elementi di $\mathcal{V}$) e (ovviamente) I e J sono insiemi finiti.
   Ad ogni formula A del linguaggio $\mathcal{L}$ si può associare il sottoinsieme $C_A = \{\varphi \in \{0,1\}^{\mathcal{V}} : \varphi(A) = 1\}$ dell'insieme prodotto $\{0,1\}^{\mathcal{V}}$. Usando il teorema di messa in forma normale congiuntiva, dimostrare che C_A è un chiuso della topologia prodotto.
4. Osservare che una teoria T di $\mathcal{L}$ non è soddisfacibile sse $\bigcap_{A\in T} C_A = \emptyset$. Supponendo che lo spazio prodotto $\{0,1\}^{\mathcal{V}}$ sia uno spazio topologico compatto, dimostrare che vale il teorema di compattezza per il calcolo proposizionale.
5. Il teorema di Tychonoff afferma che se I è un insieme e $(X_i)_{i\in I}$ una famiglia di spazi topologici indiciata da I, tutti compatti, allora l'insieme $\Pi_{i\in I}X_i$ prodotto della famiglia $(X_i)_{i\in I}$ munito della topologia prodotto è anch'esso uno spazio topologico compatto.
   Dimostrare che dal teorema di Tychonoff discende il teorema di compattezza per il calcolo proposizionale.

Esercizio 5.3 (Compattezza e limiti espressivi della logica del primo ordine)

Lo scopo dell'esercizio è dimostrare che la proprietà di connessione dei grafi non è esprimibile al primo ordine, e precisamente

«Sia $\mathcal{L} = \{R, \neg R\}$ un linguaggio con uguaglianza dove R è un predicato di arietà 2. Non esiste alcuna teoria $T^\star$ in qualche linguaggio $\mathcal{L}^\star \supseteq \mathcal{L}$ tale che, per ogni $\mathcal{L}^\star$-struttura $\mathcal{M}$, vale $\mathcal{M} \models T^\star \iff \mathcal{M}$ è un grafo connesso.»

1. Per ogni intero $k \geqslant 0$, determinare una formula $C_k(x,y)$ del linguaggio $\mathcal{L}$ tale che, per ogni $\mathcal{L}$-struttura $\mathcal{M}$ e per ogni $a, b \in |\mathcal{M}|$, vale $\mathcal{M} \models C_k[a,b]$ sse esiste un "cammino" (cioè una successione di elementi di $\mathcal{M}$ due a due in relazione tra loro) di lunghezza esattamente $k+1$ da a a b.

2. Con l'ausilio delle formule $C_k(x,y)$ precedentemente determinate esprimere, mediante una teoria T' in un'opportuna estensione $\mathcal{L}'$ di $\mathcal{L}$, la proprietà di "sconnessione": per ogni $\mathcal{L}'$-struttura $\mathcal{M}$ vale $\mathcal{M} \models T'$ sse esistono due elementi (distinti) di $|\mathcal{M}|$ che non sono tra loro connessi (non esiste alcun cammino che abbia questi due elementi come estremi).
3. Sfruttando il teorema di compattezza, dimostrare che la proprietà di connessione dei grafi non è esprimibile al primo ordine.

Esercizio 5.4 (Equivalenza elementare)

Siano $\mathcal{M}$ ed $\mathcal{N}$ due $\mathcal{L}$-strutture e sia $\mathcal{W}$ un linguaggio tale che $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{L}$. Scriviamo $\mathcal{M} \equiv_{\mathcal{W}} \mathcal{N}$ quando $\mathcal{M}$ ed $\mathcal{N}$ soddisfano le stesse formule chiuse scritte usando solo simboli di $\mathcal{W}$: ad esempio $\equiv_{\mathcal{L}}$ è semplicemente la nozione usuale di equivalenza elementare tra $\mathcal{L}$-strutture.

Dimostrare che $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ se e soltanto se, per ogni $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{L}$ e $\mathcal{W}$ linguaggio finito, vale $\mathcal{M} \equiv_{\mathcal{W}} \mathcal{N}$.

Esercizio 5.5 (Equivalenza elementare ed isomorfismo)

Lo scopo dell'esercizio ̀dimostrare che, nel caso in cui le $\mathcal{L}$-strutture $\mathcal{M}$ ed $\mathcal{N}$ sono finite, è sufficiente che valga $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ perché valga anche $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$ (implicazione che in generale sappiamo essere falsa).

1. Usando le formule $F_n = \exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{1 \leqslant l \neq k \leqslant n} \neg x_l = x_k$ di $\mathcal{L}$, dimostrare che da $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ e dal fatto che $\mathcal{M}$ ed $\mathcal{N}$ sono finite, discende che i due supporti di $\mathcal{M}$ ed $\mathcal{N}$ hanno lo stesso numero di elementi. Nel seguito dell'esercizio indichiamo con k l'intero naturale pari alla cardinalità dei supporti di $\mathcal{M}$ ed $\mathcal{N}$, e poniamo $|\mathcal{M}| = \{m_1, \ldots, m_k\}$.
2. Sia $f : |\mathcal{M}| \to |\mathcal{N}|$ una funzione e $\varphi(y_1, \ldots, y_n)$ una formula di $\mathcal{L}$. Dimostrare che se, per qualche $m_1, \ldots, m_n \in |\mathcal{M}|$, vale $\mathcal{M} \models \varphi[m_1, \ldots, m_n]$ mentre $\mathcal{N} \not\models \varphi[f(m_1), \ldots, f(m_n)]$, allora esiste una formula $\varphi'(x_1, \ldots, x_k)$, avente esattamente k variabili libere, e tale che $\mathcal{M} \models \varphi'[m_1, \ldots, m_k]$ mentre $\mathcal{N} \not\models \varphi'[f(m_1), \ldots, f(m_k)]$.
Dedurne che se $\mathcal{M} \ncong \mathcal{N}$, allora, per ogni corrispondenza biunivoca $f : |\mathcal{M}| \to |\mathcal{N}|$, esiste una formula $\varphi_f(x_1, \ldots, x_k)$ con esattamente k variabili libere, tale che $\mathcal{M} \models \varphi_f[m_1, \ldots, m_k]$ mentre $\mathcal{N} \not\models \varphi_f[f(m_1), \ldots, f(m_k)]$.
3. Dalla finitezza di $|\mathcal{M}|$ ed $|\mathcal{N}|$ discende che il numero delle corrispondenze biunivoche da $|\mathcal{M}|$ in $|\mathcal{N}|$ è finito[5]: siano queste $f_1, \ldots, f_s$[6]. Per il punto precedente, se $\mathcal{M} \ncong \mathcal{N}$, allora, per ogni $i \in \{1, \ldots, s\}$, esiste una formula $\varphi_i(x_1, \ldots, x_k)$ con esattamente k variabili libere, tale che $\mathcal{M} \models \varphi_i[m_1, \ldots, m_k]$ mentre $\mathcal{N} \not\models \varphi_i[f_i(m_1), \ldots, f_i(m_k)]$.
Dedurne che se $\mathcal{M} \ncong \mathcal{N}$ allora esiste una formula chiusa Ψ di $\mathcal{L}$ tale che $\mathcal{M} \models \Psi$ e $\mathcal{N} \not\models \Psi$.

Esercizio 5.6 (Sottostrutture elementari)

(i) Nel linguaggio con la sola uguaglianza (e la sua negazione) $\mathcal{L}$, dimostrare che una $\mathcal{L}$-struttura finita non può avere sottostrutture elementari proprie (cioè diverse dalla struttura di partenza).

(ii) Considerare il linguaggio $\mathcal{L} = \{\underline{0}, =, \neq, < \neg <\}$, dove $\underline{0}$ è un simbolo di costante; e considerare la $\mathcal{L}$-struttura $(\mathbb{N}, 0, <)$ con le consuete interpretazioni dei simboli di $\mathcal{L}$. Dimostrare che $(\mathbb{N}, 0, <)$ non ammette sottostrutture elementari proprie, cioè dimostrare che se $\mathcal{M}$ è una $\mathcal{L}$-struttura tale che $\mathcal{M} \prec \mathbb{N}$, allora $M = \mathbb{N}$.

[**Suggerimento:** Esprimere, mediante una formula $Succ(x,y)$ di $\mathcal{L}$, il fatto che y è successore di x. Considerare la formula a parametri nella $\mathcal{L}$-struttura $\mathcal{M}$ seguente: $\exists y Succ[0, y]$. Osservare che è soddisfatta da $\mathbb{N}$ e dunque (poiché $\mathcal{M} \prec \mathbb{N}$) deve essere soddisfatta anche da $\mathcal{M}$. Dedurne che $1 \in M$. Generalizzare ad un

[5] È precisamente questa la proprietà fondamentale, che ovviamente non è vera nel caso generale, su cui riposa questa dimostrazione.

[6] Sappiamo peraltro che $s = k!$, pari al numero delle permutazioni di un insieme con k elementi.

elemento $n \in \mathbb{N}$ qualsiasi e dimostrare, per ogni $n \in \mathbb{N}$, che da $n \in M$ segue $n+1 \in M$. Concludere come richiesto che $M = \mathbb{N}$.]

Esercizio 5.7 (Sottostrutture elementari)

Consideriamo il linguaggio (con uguaglianza) $\mathcal{L} = \{<, \neg <\}$ e le $\mathcal{L}$-strutture seguenti: $(\mathbb{Q}, <)$, $(\mathbb{R}, <)$, $((a,b), <)$, dove $a, b \in \mathbb{R}$ e l'intervallo (a,b) s'intende aperto mentre nei tre casi considerati il valore del simbolo $<$ è la consueta relazione di minore stretto sul supporto della struttura considerata.

(i) Dimostrare che per ogni $m, r, r' \in \mathbb{R}$ tali che $m < r < r'$, la funzione $\varphi_{m,r,r'} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \backslash (r, r']$ definita ponendo $\varphi_{m,r,r'}(x) = x$ se $x \leqslant m$ oppure se $x > r'$ mentre per $m < x \leqslant r'$ vale $\varphi_{m,r,r'}(x) = r + (x - r')(r - m)/(r' - m)$ è un isomorfismo della $\mathcal{L}$-struttura $(\mathbb{R}, <)$ nella $\mathcal{L}$-struttura $\mathbb{R} \backslash (r, r']$ tale che $\varphi_{m,r,r'}(r') = r$.[7]

(ii) Dimostrare che per ogni $r, r', M \in \mathbb{R}$ tali che $r < r' < M$, la funzione $\varphi_{r,r',M} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \backslash [r, r')$ definita ponendo $\varphi_{r,r',M}(x) = x$ se $x < r$ oppure se $x \geqslant M$ mentre per $r \leqslant x < M$ vale $\varphi_{r,r',M}(x) = r' + (x - r)(M - r')/(M - r)$ è un isomorfismo della $\mathcal{L}$-struttura $(\mathbb{R}, <)$ nella $\mathcal{L}$-struttura $\mathbb{R} \backslash [r, r')$ tale che $\varphi_{r,r',M}(r) = r'$.[8]

(iii) Dimostrare che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a < b$, non vale $\mathbb{R} \backslash (a, b) \prec \mathbb{R}$.

(iv) Dimostrare che, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a < b$, vale $\mathbb{R} \backslash I_{ab} \prec \mathbb{R}$, dove I_{ab} è un intervallo di estremi a e b *che sia chiuso ad almeno uno dei due estremi*; più precisamente può essere $I_{ab} = (a, b]$ oppure $I_{ab} = [a, b)$ oppure $I_{ab} = [a, b]$.

(v) Dimostrare che, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a < b$, non vale $[a, b] \prec \mathbb{R}$, non vale $[a, b) \prec \mathbb{R}$, non vale $(a, b] \prec \mathbb{R}$.

(vi) Dimostrare che, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a < b$, vale $(a, b) \prec \mathbb{R}$.

(vii) Si può dimostrare, analogamente a quanto fatto a lezione per OLDSE (Paragrafo 5.7 del Capitolo 5 del libro di testo), la $\aleph_0$-categoricità della teoria degli ordini lineari densi con primo ed ultimo elemento, della teoria degli ordini lineari densi con primo ma senza ultimo elemento e della teoria degli ordini lineari densi senza primo ma con ultimo elemento. Dedurne che, per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tali che $c < a < b < d$, vale $[a, b) \equiv [c, d)$, vale $(a, b] \equiv (c, d]$ e vale $[a, b] \equiv [c, d]$.

(viii) Dimostrare che, per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tali che $c < a < b < d$, non vale $[a, b) \prec [c, d)$, non vale $(a, b] \prec (c, d]$ e non vale $[a, b] \prec [c, d]$.

(ix) Dimostrare che, per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tali che $c < a < b < d$, vale $(a, b) \prec (c, d)$.

(x) Dimostrare che vale $\mathbb{Q} \prec \mathbb{R}$.

Esercizio 5.8 (Teorema di Löwenheim-Skolem)

Sia $\mathcal{T}$ una teoria del linguaggio numerabile $\mathcal{L}$, e si supponga che:

- tutti i modelli di $\mathcal{T}$ siano infiniti;
- esistano due $\mathcal{L}$-strutture numerabili $\mathcal{M}_1$ ed $\mathcal{M}_2$ tali che, per ogni $\mathcal{L}$-struttura numerabile $\mathcal{M}$ di $\mathcal{L}$, valga $\mathcal{M} \cong \mathcal{M}_1$ oppure $\mathcal{M} \cong \mathcal{M}_2$.

1. Dimostrare che se F è una formula chiusa di $\mathcal{L}$, e se $\mathcal{M}_1 \models F$ e $\mathcal{M}_2 \models F$, allora $\mathcal{T} \vdash F$.
2. Dedurre dal punto precedente che se $\mathcal{T}$ non è una teoria completa, allora esiste una formula chiusa F_0 di $\mathcal{L}$ tale che $\mathcal{M}_1 \models F_0$ e $\mathcal{M}_2 \models \neg F_0$.

[7] Si può osservare che la funzione $\varphi_{m,r,r'}$ manda l'intervallo $[m, r']$ nell'intervallo $[m, r]$ "perdendo" l'intervallo $(r', r]$.
[8] Si può osservare che la funzione $\varphi_{r,r',M}$ manda l'intervallo $[r, M]$ nell'intervallo $[r', M]$ "perdendo" l'intervallo $[r, r')$.

Esercizio 5.9 (Completezza di una teoria)

(i) Dimostrare che se T è una teoria di $\mathcal{L}$ completa, allora, prese comunque due formule chiuse F e G di $\mathcal{L}$, vale l'equivalenza $T \models F \vee G \iff T \models F$ oppure $T \models G$.

Mostrare che omettendo l'ipotesi di completezza per T, l'equivalenza precedente non vale.

(ii) Vogliamo dimostrare che una teoria completa T è massimale. Più precisamente, fissato il linguaggio $\mathcal{L}$, denotiamo con $Th(T)$ l'insieme delle formule derivabili da T: $Th(T) = \{F : T \models F\}$. Dimostrare che se T è una teoria coerente e completa e se T' è una teoria coerente e tale che $Th(T) \subseteq Th(T')$, allora T e T' sono equivalenti.

Esercizio 5.10 (Completezza di una teoria)

Consideriamo la teoria T_0 ottenuta a partire dalla teoria OLDSE studiata a lezione, eliminando i due assiomi riguardanti l'assenza di estremi. T_0 sarà la teoria del linguaggio (con uguaglianza) $\mathcal{L} = \{=, <\}$[9] seguente:

- $\forall x(\neg x < x)$
- $\forall x \forall y \forall z((x < y \wedge y < z) \to x < z)$
- $\forall x \forall y(x < y \vee y < x \vee x = y)$
- $\forall x \forall y(x < y \to \exists z(x < z \wedge z < y))$

Chiamiamo (Min) (risp. (Max)) la negazione dell'assenza di minimo (risp. massimo) e cioè la formula che afferma l'esistenza di un minimo (risp. massimo).

1. Esprimere gli assiomi (Min) e (Max) nel linguaggio $\mathcal{L}$.
2. Chiamiamo T_1, T_2, T_3, T_4 le quattro teorie ottenute aggiungendo a T_0 esattamente un assioma tra (Min) e $\neg(Min)$ ed esattamente un assioma tra (Max) e $\neg(Max)$ nei 4 modi possibili: ad esempio, OLDSE sarà $T_0 \cup \{\neg(Min), \neg(Max)\}$.

   È possibile dimostrare che le teorie T_1, T_2, T_3, T_4 sono tutte e 4 complete. Accettando questo risultato (senza dimostrazione), dimostrare, usando il Punto (ii) dell'esercizio precedente, che T_1, T_2, T_3, T_4 sono le sole teorie complete e coerenti di $\mathcal{L}$ contenenti T_0 (a meno di equivalenza).

Esercizio 5.11 (Completezza e test di Vaught)

Lo scopo dell'esercizio è dimostrare che la teoria dei campi algebricamente chiusi di caratteristica 0 è completa. Per fare ciò, dimostreremo che tale teoria è k-categorica per qualsiasi cardinale $k > \aleph_0$.

Sfrutteremo il fatto che ogni campo di caratteristica 0 contiene (a meno di isomorfismi) il campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali. Supporremo di aver dimostrato il seguente teorema (la cui dimostrazione usa l'assioma di scelta):

«Ogni campo ammette un'unica estensione algebricamente chiusa (a meno di isomorfismi): per ogni campo K, esiste un campo K' algebricamente chiuso e tale che $K \subseteq K'$; inoltre se K'' è un campo algebricamente chiuso e tale che $K \subseteq K''$ allora $K' \cong K''$.
Inoltre, se K è infinito, allora K e K' hanno la stesa cardinalità.»

1. Scrivere, nel linguaggio (con uguaglianza) $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \times\}$, gli assiomi della teoria dei campi algebricamente chiusi di caratteristica 0.

[9] S'intende, come al solito, che sono presenti in $\mathcal{L}$ anche le negazioni dei simboli di predicato binari $=$ e $<$.

2. Sia K un sottocampo del campo L e sia $X \subseteq L$. Diciamo che X è *algebricamente libero* su K quando, per ogni sottoinsieme finito $\{x_1, \ldots, x_k\}$ di X, non esiste alcun polinomio p a coefficienti in K e diverso dal polinomio nullo tale che $p(x_1, \ldots, x_k) = 0$.[10]
   Per un campo K algebricamente chiuso di caratteristica 0, consideriamo il sottoinsieme $\mathcal{E}$ dell'insieme $\mathcal{P}(K)$ così definito:
   $$\mathcal{E} = \{Y \in \mathcal{P}(K) : \ Y \text{ è algebricamente libero su } \mathbb{Q}\}.$$
   Mostrare che esiste un elemento X massimale in $\mathcal{E}$.
3. Sia K un campo algebricamente chiuso di caratteristica 0, e sia X l'elemento massimale di $\mathcal{E}$ la cui esistenza è garantita dal punto precedente. Dimostrare che $\mathbb{Q}(X) \subseteq K$ è un'estensione algebrica di campi, dove $\mathbb{Q}(X)$ è il più piccolo sottocampo di K contenente $\mathbb{Q}$ ed X.[11]
4. Con le notazioni del punto precedente, dimostrare che *se K ha cardinalità più che numerabile*, allora l'insieme X ha la stessa cardinalità di K.
5. Dimostrare che la teoria dei campi algebricamente chiusi di caratteristica 0 è k-categorica per qualsiasi cardinale $k > \aleph_0$.
6. Dedurre dal punto precedente che la teoria dei campi algebricamente chiusi di caratteristica 0 è completa.

[10] Degli elementi di un tale sottoinsieme $\{x_1, \ldots, x_k\}$ di L si dice anche che sono *algebricamente indipendenti* su K. Si noti che $x_1, \ldots, x_k$ sono tutti trascendenti su K, e, più precisamente, che, per ogni $0 \leqslant i < k$, l'elemento x_{i+1} è trascendente sull'estensione $K(x_1, \ldots, x_i)$ di K.

[11] Per estensione algebrica, s'intende che ogni elemento di $\xi \in K$ è algebrico su $\mathbb{Q}(X)$: esiste cioè un polinomio a coefficienti in $\mathbb{Q}(X)$ che si annulla in ξ.